8. gyakorlat megoldásai
Sorozatok, numerikus sorok

F1. Állapítsuk meg a sorozatok határértékét.

(a) $\dfrac{5n^2-3n-1}{n+3}$, (b) $\dfrac{n^2+3n}{n^3+3}$, (c) $\dfrac{3n^2-n+1}{n^2+3n}$

(d) $\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$, (e) $\dfrac{\sqrt{n^2+1}-n}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}$,

(f) $\left(\dfrac{3n-1}{3n+2}\right)^{2n}$, (g) $\sqrt[n]{n+3}$

M1. (a) A törtet n-nel egyszerűsítve:

$$\frac{5n^2-3n-1}{n+3}=\frac{5n-3-\frac{1}{n}}{1+\frac{3}{n}}\to\frac{\infty-3+0}{1+0}=\infty$$

(b) A törtet n^2-el egyszerűsítve:

$$\frac{n^2+3n}{n^3+3}=\frac{1+\frac{3}{n}}{n+\frac{3}{n^2}}\to\frac{1+0}{\infty+0}=0$$

(c) A törtet n^2-el egyszerűsítve:

$$\frac{3n^2-n+1}{n^2+3n}=\frac{3-\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}{1+\frac{3}{n}}\to\frac{3+0+0}{1+0}=3$$

(d) Gyöktelenítünk:

$$\sqrt{n+1}-\sqrt{n}=(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})\frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=\frac{n+1-n}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}\to\frac{1}{\infty}=0.$$

(e) A számlálót és a nevezőt is gyöktelenítjük:

$$\frac{\sqrt{n^2+1}-n}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}=\frac{\frac{n^2+1-n^2}{\sqrt{n^2+1}+n}}{\frac{n+1-n}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}}=\frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}{\sqrt{n^2+1}+n}=\frac{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+\sqrt{1}}{\sqrt{n+\frac{1}{n}}+\sqrt{n}}\to\frac{2}{\infty}=0.$$

(f) A törtet $3n$-nel egyszerűsítve, majd felhasználva, hogy $\left(1+\dfrac{q}{n}\right)^n\to e^q$:

$$\left(\frac{3n-1}{3n+2}\right)^{2n}=\left(\frac{1-\frac{1}{3n}}{1+\frac{2}{3n}}\right)^{2n}=\left(\frac{\left(1+\frac{-\frac{1}{3}}{n}\right)^n}{\left(1+\frac{\frac{2}{3}}{n}\right)^n}\right)^2\to\left(\frac{e^{-\frac{1}{3}}}{e^{\frac{2}{3}}}\right)^2=e^{-2}.$$

(g) A rendőr-elvet fogjuk használni, amihez alulról és felülről becsülünk:

$$\begin{array}{ccccc} \sqrt[n]{n} & \leq & \sqrt[n]{n+3} & \leq & \sqrt[n]{2n} \\ \downarrow & & & & \downarrow \\ 1 & & & & 1, \end{array}$$

mert $\sqrt[n]{2n} = \sqrt[n]{2}\sqrt[n]{n} \to 1 \cdot 1 = 1$. Így a rendőrelv szerint $\sqrt[n]{n+3} \to 1$.

F2. Írjuk fel az alábbi sorok részletösszeg-sorozatát, konvergensek-e ezek a sorozatok? Ha igen, akkor mi lesz a sor összege?

(a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n$, (b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{2n-1}+3^n}{6^{n+1}}$.

M2. (a) A részletösszeg-sorozat:

$$S_N = \sum_{n=0}^{N} \left(\frac{1}{3}\right)^n = 1 + \frac{1}{3} + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{1}{3}\right)^N = \frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{N+1}}{1-\frac{1}{3}} \to \frac{1}{1-\frac{1}{3}} = \frac{3}{2},$$

mert $q^n \to 0$, ha $|q| < 1$. Így a sor konvergens, és az összege $\frac{3}{2}$.

(b) Az (a) részhez hasonlóan belátható, hogy $|q| < 1$ esetén

$$\sum_{n=0}^{\infty} aq^n = \frac{a}{1-q}$$

tetszőleges $a \in \mathbb{R}$ számra, így

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{2n-1}+3^n}{6^{n+1}} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{2n-1}}{6^{n+1}} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{6^{n+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2^2)^n \cdot 2^{-1}}{6^n \cdot 6} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{6^n \cdot 6} = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{12}\left(\frac{4}{6}\right)^n + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{6}\left(\frac{3}{6}\right)^n = \frac{\frac{1}{12}}{1-\frac{2}{3}} + \frac{\frac{1}{6}}{1-\frac{1}{2}} = \frac{7}{12}.\end{aligned}$$

F3. Döntsük el, hogy az alábbi sorok Leibniz típusúak-e. Abszolút konvergensek a sorok?

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$, (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{n^2+1}$.

M3. A $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sor pontosan akkor Leibniz-sor, ha teljesül az alábbi három feltétel:

– a_n alternáló (váltakozó előjelű),
– $a_n \to 0$ (nullsorozat),
– $|a_n|$ monoton csökken.

(a) Itt mindhárom feltétel teljesül, tehát ez Leibniz-sor, így konvergens.

Az abszolút konvergenciához a $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ sor konvergenciáját kell vizsgálni, azaz

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1/2}},$$

ami divergens, mert tudjuk, hogy a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^a}$ sor pontosan akkor konvergens, ha $a > 1$. Így a sor nem abszolút konvergens.

(b) Világos, hogy alternáló (felhasználjuk, hogy $\frac{n}{n^2+1} > 0$), a határérték:

$$\frac{n}{n^2+1} = \frac{1}{n + \frac{1}{n}} \to \frac{1}{\infty} = 0.$$

A monotonitáshoz az $|a_n|$ és az $|a_{n+1}|$-et kell összehasonlítani:

$$|a_n| - |a_{n+1}| = \frac{n}{n^2+1} - \frac{n+1}{(n+1)^2+1} = \frac{n(n^2+2n+2) - (n+1)(n^2+1)}{(n^2+1)(n^2+2n+2)} =$$

$$= \frac{n^3 + 2n^2 + 2n - (n^3 + n^2 + n + 1)}{(n^2+1)(n^2+2n+2)} = \frac{n^2+n-1}{(n^2+1)(n^2+2n+2)} > 0,$$

azaz $|a_n| > |a_{n+1}|$, ami azt jelenti, hogy az $|a_n|$ sorozat monoton csökken. (A monotonitást jelen esetben egyszerűbben is láthattuk volna, ha a törtet n-nel egyszerűsítjük).

Tehát ez is egy Leibniz-sor, és így konvergens.

Az abszolút konvergenciához a

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left|(-1)^n \frac{n}{n^2+1}\right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2+1}$$

sort kell vizsgálni. Mivel

$$\frac{n}{n^2+1} \geq \frac{n}{2n^2} = \frac{1}{2n},$$

és a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n}$ sor divergens, így a minoráns kritérium szerint a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2+1}$ sor is divergens. Tehát az eredeti sor nem abszolút konvergens.

F4. Döntsük el, hogy az alábbi sorok konvergensek, abszolút konvergensek vagy divergensek.

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+3}{n^2+3n}$, (b) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2n-3}{n^3-2n}$,

M4. Mivel mindkét sor racionális törtfüggvény alakú sorozat összege, ezért összehasonlító kritériumokat fogunk használni.
(a) A számláló elsőfokú, nevező másodfokú, ami azt jelenti, hogy a nevező csak 1 nagyságrenddel erősebb, mint a számláló és ez kevés a sor konvergenciájához, ezért minoráns kritériumot használunk:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+3}{n^2+3n} > \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2+3n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{4n^2} = \frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty$$

(b) A számláló elsőfokú, nevező harmadfokú, ami azt jelenti, hogy a nevező 2 nagyságrenddel erősebb, mint a számláló és ez elég a sor konvergenciájához, ezért majoráns kritériumot használunk:

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2n-3}{n^3-2n} < \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2n}{n^3-\frac{1}{2}n^3} = 2\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n}{\frac{1}{2}n^3} = 4\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty$$

Gyakorló feladatok végeredményei

M5. e^5

M6. 1