9. gyakorlat megoldásai
Hatványsorok, Taylor-sorok

F1. Döntsük el, hogy az alábbi sorok konvergensek, abszolút konvergensek vagy divergensek.

(a) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n!}$, (b) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$, (c) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2^n n!}{n^n}$,

(d) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ln n}$, (e) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2^{3n} n^7}{3^{2n}}$, (f) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{n+1}{n+4}\right)^n$,

M1. (a) A sor pozitív tagú és faktoriális van benne, tehát alkalmazzuk a hányadoskritériumot:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{(n+1)!}}{\frac{1}{n!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{(n+1)n!} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0 < 1,$$

tehát a sor abszolút konvergens.

(b) A számláló konstans, míg nevezőben egy másodfokú kifejezés (két elsőfokú szorzata) gyöke szerepel, ami elsőfokú, így a sor nem lesz konvergens és ehhez a minoráns kritériumot fogjuk használni:

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}} > \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{(n+1)(n+1)}} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n+1},$$

ami a harmonikus sor, tehát divergens.

(c) Ismét a hányadoskritériumot használjuk a faktoriális miatt:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{2^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{2^n n!}{n^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2\cdot 2^n n^n (n+1)n!}{2^n (n+1)^{n+1} n!} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n^n}{(n+1)^n} =$$

$$= 2 \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = 2 \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{-1}{n+1}\right)^n = 2e^{-1} = \frac{2}{e} < 1,$$

tehát a sor abszolút konvergens.

(d) Az összegezendő sorozat váltakozó előjelű, az abszolút értéke $\frac{1}{\ln n}$, ami 0-hoz tart és monoton csökken, tehát Leibniz-tétel miatt konvergens, de nem abszolút konvergens a minoráns kritérium miatt:

$\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \left|\frac{(-1)^n}{\ln n}\right| = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln n} > \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty$, tehát a sor csak feltételesen konvergens.

(e) Alkalmazzuk a gyökkritériumot:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{2^{3n}n^7}{3^{2n}}} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{8^n n^7}{9^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{8}{9}(\sqrt[n]{n})^7 = \frac{8}{9} < 1,$$

tehát a sor abszolút konvergens.

(f) A sor váltakozó előjelű, tehát ellenőrizzük a Leibniz-kritérium másik két pontját:

$$\lim_{n\to\infty} |a_n| = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+1}{n+4}\right)^n = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{-3}{n+4}\right)^n = e^{-3} \neq 0,$$

tehát az összegezendő sorozatnak nem 0 a határértéke, így a sor divergens.

F2. Állapítsuk meg az alábbi hatványsorok konvergenciatartományát.

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{\sqrt{n}}$, (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{2^{n-1}}$, (c) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-5)^n}{n!}$.

M2. Egy $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ hatványsor konvergenciasugarát az

$$r = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}} = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|}$$

képlettel számolhatjuk. Ekkor a hatványsor az $(x_0 - r, x_0 + r)$ intervallumban konvergens, a határpontokat külön meg kell nézni, hogy ott konvergens-e.

(a) $a_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}}$ és $x_0 = 0$. A konvergenciasugárhoz

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \sqrt[n]{\frac{1}{\sqrt{n}}} = \frac{1}{\sqrt[n]{\sqrt{n}}} = \frac{1}{\sqrt[2n]{n}} = \frac{1}{\sqrt{\sqrt[n]{n}}} \to 1,$$

így a konvergenciasugár 1. Még meg kell nézni az intervallumon határain, azaz ± 1-ben:

$x = 1$ esetén a hatványsor $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$, ami divergens.

$x = -1$ esetén a hatványsor $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$, ami Leibniz-sor, így konvergens.

Tehát a konvergenciatartomány a $[-1, 1)$ intervallum.

(b) $a_n = \dfrac{1}{2^{n-1}}$ és $x_0 = 2$. A konvergenciasugárhoz:

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \sqrt[n]{\frac{1}{2^{n-1}}} = \sqrt[n]{\frac{2}{2^n}} = \frac{\sqrt[n]{2}}{\sqrt[n]{2^n}} = \frac{\sqrt[n]{2}}{2} \to \frac{1}{2}.$$

A konvergenciasugár ennek a reciproka, azaz 2. Így a hatványsor a $(0,4)$ intervallumban biztosan konvergens. A két határpont:

$x = 4$ esetén a hatványsor $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(4-2)^n}{2^{n-1}} = \sum_{n=1}^{\infty} 2$, ami divergens.

$x = 0$ esetén a hatványsor $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(0-2)^n}{2^{n-1}} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot 2$, ami szintén divergens.

Tehát a konvergenciatartomány a $(0,4)$ intervallum.

(c) $a_n = \dfrac{1}{n!}$ és $x_0 = 5$. Ebben az esetben a konvergenciasugarat a

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{(n+1)!}}{\frac{1}{n!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{(n+1)!} = \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{(n+1)n!} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0$$

határértékből számoljuk (a faktoriális miatt a gyökös nem szerencsés). A konvergenciasugár ennek a reciproka, ami 0 esetén azt jelenti, hogy a sugár végtelen, így a hatványsor az egész számegyenesen konvergens.

F3. Írjuk fel a megadott függvények $x_0 = 0$ pont körüli Taylor-sorát. Határozzuk meg a sorok konvergenciasugarát is.

(a) $\cos(5x)$, (b) e^{-x^2},

(c) $\dfrac{x}{4+x^2}$, (d) $\dfrac{x+1}{x+3}$.

M3. (a) Mivel $\cos x = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$, így

$$\cos(5x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(5x)^{2n}}{(2n)!} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{5^{2n}}{(2n)!} x^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-25)^n}{(2n)!} x^{2n}.$$

Mivel a cos függvény hatványsora minden $x \in \mathbb{R}$-re konvergens, így a $\cos(5x)$ függvényé is, azaz a konvergenciasugár végtelen.

(b) Mivel $e^x = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$, így

$$e^{-x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-x^2)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} x^{2n}.$$

Mivel az e^x hatványsora minden $x \in \mathbb{R}$-re konvergens, így az e^{-x^2} függvényé is, azaz a konvergenciasugár végtelen.

(c) Itt azt használjuk fel, hogy $\dfrac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$, ha $|x| < 1$.

$$\frac{x}{4+x^2} = \frac{x}{4} \cdot \frac{1}{1+\frac{x^2}{4}} = \frac{x}{4} \cdot \frac{1}{1-\left(-\frac{x^2}{4}\right)} = \frac{x}{4} \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{x^2}{4}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4^{n+1}} x^{2n+1},$$

ha $\left|-\dfrac{x^2}{4}\right| < 1$, azaz $|x| < 2$, ami azt jelenti, hogy a konvergenciasugár 2. (d) Itt egy kicsit alakítani kell először:

$$\frac{x+1}{x+3} = \frac{x+3-2}{x+3} = 1 - \frac{2}{x+3}$$

A $\dfrac{2}{x+3}$ már hasonló a (c) feladathoz:

$$\frac{2}{x+3} = \frac{2}{3+x} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{1-\left(-\frac{x}{3}\right)} = \frac{2}{3} \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{x}{3}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 2}{3^{n+1}} x^n.$$

Ebből:

$$\frac{x+1}{x+3} = 1 - \frac{2}{x+3} = 1 - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 2}{3^{n+1}} x^n = \frac{1}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{(-1)^n \cdot 2}{3^{n+1}} x^n,$$

ahol az utolsó lépésben a konstanstagokat (1-et és az $n = 0$ tagot) összevontuk.

F4. Számoljuk ki $\sin 1$ és $\dfrac{1}{e}$ értékét 3 tizedesjegy pontossággal.

M4. Mivel $\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$, így

$$\sin 1 = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(2n+1)!} = 1 - \frac{1}{3!} + \frac{1}{5!} - \frac{1}{7!} + \dots = 1 - \frac{1}{6} + \frac{1}{120} - \frac{1}{5040} + \dots$$

Ez egy Leibniz-sor, így a sor egy részletösszegének az összegtől való eltérését a következő tag abszolút értékével becsülhetjük. Mivel három tizedesjegy pontossággal szeretnénk becsülni, így egy ezrednél kisebb hibát szeretnék, azaz ha az $\dfrac{1}{5040}$ taggal becsülhetünk, akkor

$$\left|\sin 1 - \frac{101}{120}\right| < \frac{1}{5040}.$$

Tehát $\sin 1 \approx \frac{101}{120} = 0,84166666\ldots$ Valójában $\sin 1 = 0,841470985\ldots$, tehát az első három tizedesjegy tényleg azonos.

Az $\frac{1}{e}$ hasonlóan az $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ hatványsorból:

$$e^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} = 1 - 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{6} + \frac{1}{24} - \frac{1}{120} + \frac{1}{720} - \frac{1}{5040} + \ldots$$

Ez is egy Leibniz-sor, így hasonlóan becsülhetünk, mint az előző feladatrésznél. Az $1 - 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{6} + \frac{1}{24} - \frac{1}{120} + \frac{1}{720} = \frac{265}{720}$ részletösszegből

$$\left| \frac{1}{e} - \frac{265}{720} \right| < \frac{1}{5040}.$$

Tehát $\frac{1}{e} \approx \frac{265}{720} = \frac{53}{144} = 0,3680555\ldots$, míg $\frac{1}{e} = 0,367879441\ldots$. Kerekítve itt is megegyezik az első három tizedesjegy.

Gyakorló feladatok végeredményei

M5. Ez már volt

M6.

M7. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 2^{2n+1}}{(2n+1)!} x^{2n+2}$

M8. $1 - \frac{0,1^2}{2} = 0{,}995$