3. gyakorlat
Egyenesek, lineáris összefüggőség, mátrixok

F1. Írjuk fel azt az egyenest paraméteres és egyenletrendszeres alakban is, amely átmegy az $A(3,1,2)$ és $B(-1,1,3)$ pontokon.

F2. Adjuk meg az az $e:\ x = 1+t;\ y = 4-t;\ z = 3+2t$ és $f:\ x = -1+2t;$ $y = 7-3t;\ z = 4-t$ egyenesek metszéspontját, ha létezik.

F3. Igazoljuk, hogy az $e:\ \dfrac{x-1}{3} = \dfrac{2y}{5} = -\dfrac{z+1}{3}$ és az $f:\ x = t;\ y = 2t-3;$ $z = -5$ egyenesek kitérőek, továbbá adjuk meg a hajlásszögüket.

F4. Döntsük el, hogy a következő $\mathbb{R}^3$-beli vektorok lineárisan függetlenek-e vagy nem:

$$\text{(a)}\quad \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 3 \end{bmatrix},\ \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix},\ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{bmatrix};\qquad \text{(b)}\quad \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix},\ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix},\ \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

F5. Az alábbi mátrixok közül melyeket tudjuk összeszorozni? Számítsuk ki néhány szorzás eredményét! Írjuk fel a mátrixok transzponáltját is!

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix},\qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix},\qquad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix},\qquad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

F6. Egy cég három gyárában négyféle terméket állít elő. Az

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 5 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 0 \\ 5 & 6 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

mátrix a_{ij} eleme jelentse az i-edik gyárban egy nap alatt előállított j-edik termék számát. A

$$\mathbf{p} = \begin{bmatrix} 40 \\ 60 \\ 50 \\ 20 \end{bmatrix}$$

vektor j-edik komponense a j-edik termék egységára. Mekkora az egy nap alatt előállított termelési érték gyáranként?

F7. Egy kereskedelmi cég n féle terméket forgalmaz m boltjában. Az $\mathbf{A}$ mátrix a_{ij} eleme jelentse a j-edik termék i-edik boltban egy hónap alatt forgalmazott mennyiségét. A $\mathbf{p}$ vektor p_i komponense jelölje az i-edik termék egységárát. Az $\mathbf{A}$ mátrix, a $\mathbf{p}$ vektor, az $\mathbf{e}_i$ (a kanonikus bázisvektor), valamint az $\mathbf{1}$ (az az oszlopvektor, amelynek minden koordinátája 1) vektorok segítségével írjuk fel:

(a) a havi bevételt boltonként;

(b) az r-edik bolt havi bevételét;

(c) az r-edik boltban a q-adik áruból eladott mennyiséget;

(d) az egy hónap alatt eladott termékmennyiséget termékenként;

(e) a havi összbevételt.

Opcionális

F8. Milyen t paraméter esetén lesz az $e: \dfrac{x+2}{2} = -\dfrac{y}{3} = \dfrac{z-1}{4}$ és az $f: \dfrac{x-3}{t} = \dfrac{y-1}{4} = \dfrac{z-7}{2}$ egyenesek merőlegesek egymásra?

F9. Tekintsük az $\mathbb{R}^3$ tér

$$\mathbf{a} = \big(1,\ 3,\ 4\big), \qquad \mathbf{b} = \big(2,\ 7,\ 2\big), \qquad \mathbf{c} = \big(-1,\ 2,\ 1\big)$$

vektorait. Döntsük el, hogy az $\mathbf{x} = \big(-3,\ 1,\ -2\big)$ vektor benne van-e a vektorok által generált — az $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \rangle$ szimbólummal jelölt — altérben.

F10. Igazoljuk, hogy az $\mathbb{R}^4$ tér

$$M = \big\{ (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \ \big|\ x_1 + 3x_2 = 5x_3 - x_4 \big\}$$

részhalmaza egy altér $\mathbb{R}^4$-ben. Hány dimenziós ez az altér? Adjuk meg egy bázisát.

F11. Határozzuk meg mindazon $\mathbf{B}$ mátrixokat, amelyek az

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

mátrixszal felcserélhetők.