18. előadás

Feltételes szélsőérték

Horváth Márton

BME, Matematika Intézet,
Algebra és Geometria Tanszék

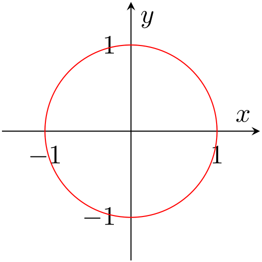
2024. május 6.

Bevezető feladat

Határozzuk meg az $f(x,y) = x^2 + y^2 + 2y - 1$ függvény minimumát és maximumát az $x^2 + y^2 = 1$ feltétel mellett.

Ha $x^2 + y^2 = 1$, akkor a függvény:

$$f(x,y) = 1 + 2y - 1 = 2y$$



Az $x^2 + y^2 = 1$ feltételből az is következik, hogy $-1 \le y \le 1$, így a függvény minimuma -2, a függvény maximuma 2.

Feltételes szélsőérték:
Egy többváltozós $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ függvény szélsőértékeit keressük egy $g\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ függvény nullhelyein.

A továbbiakban csak az $n = 2, k = 1$ esettel foglalkozunk.

Lagrange-függvény

Az $f(x, y)$ függvény lokális szélsőértékeit keressük a $g(x, y) = 0$ feltétel mellett. Ekkor tekintsük az

$$F(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda g(x, y)$$

Lagrange-függvényt, ahol λ a Lagrange-multiplikátor.

Tétel (lokális szélsőérték létezésének szükséges feltétele):
Tegyük fel, hogy az $f, g \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ függvényeknek az $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ pontban az elsőrendű parciális deriváltjai léteznek és folytonosak, továbbá a g függvény parciális deriváltjai nem mind 0-ák.
Ha az f függvénynek az $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ pontban lokális szélsőértéke van a $g(x, y) = 0$ feltétel mellett, akkor a megfelelő pontban az $F(x, y, \lambda)$ függvény mindhárom parciális deriváltja 0.

Megjegyzés:
$F'_\lambda(x, y, \lambda) = g(x, y)$ eltűnése pontosan a feltétel.

Elégséges feltétel

Tétel (lokális szélsőérték létezésének elégséges feltétele):
Tegyük fel, hogy az $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ pontban az $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ függvénynek a másodrendű parciális deriváltjai léteznek és folytonosak, továbbá a $g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ függvény elsőrendű parciális deriváltjai léteznek.
Ha egy (x_0, y_0, λ_0) hármasra

$$F'_x(x_0, y_0, \lambda_0) = F'_y(x_0, y_0, \lambda_0) = F'_\lambda(x_0, y_0, \lambda_0) = 0 \quad \text{(stacionárius pont)}$$

és

$$\begin{vmatrix} F''_{xx}(x_0, y_0, \lambda_0) & F''_{xy}(x_0, y_0, \lambda_0) & F''_{x\lambda}(x_0, y_0, \lambda_0) \\ F''_{yx}(x_0, y_0, \lambda_0) & F''_{yy}(x_0, y_0, \lambda_0) & F''_{y\lambda}(x_0, y_0, \lambda_0) \\ F''_{\lambda x}(x_0, y_0, \lambda_0) & F''_{\lambda y}(x_0, y_0, \lambda_0) & F''_{\lambda\lambda}(x_0, y_0, \lambda_0) \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} F''_{xx}(x_0, y_0, \lambda_0) & F''_{xy}(x_0, y_0, \lambda_0) & g'_x(x_0, y_0) \\ F''_{yx}(x_0, y_0, \lambda_0) & F''_{yy}(x_0, y_0, \lambda_0) & g'_y(x_0, y_0) \\ g'_x(x_0, y_0) & g'_y(x_0, y_0) & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= 2F''_{xy}(x_0, y_0, \lambda_0)g'_x(x_0, y_0)g'_y(x_0, y_0) - F''_{yy}(x_0, y_0, \lambda_0)g'_x(x_0, y_0)^2 -$$
$$-F''_{xx}(x_0, y_0, \lambda_0)g'_y(x_0, y_0)^2$$

- pozitív, akkor lokális maximuma van
- negatív, akkor lokális minimuma van

az (x_0, y_0) pontban az $f(x, y)$ függvénynek a $g(x, y) = 0$ feltétel mellett.

Példa

Keressük meg az $f(x, y) = 6x + 8y - 10$ függvény feltételes szélsőértékeit az $x^2 + y^2 = 25$ feltétel mellett.

Példa

Keressük meg az $f(x,y) = 6x + 8y - 10$ függvény feltételes szélsőértékeit az $x^2 + y^2 = 25$ feltétel mellett.

A $g(x,y) = x^2 + y^2 - 25$ függvénnyel a Lagrange-függvény:

$$F(x,y,\lambda) = 6x + 8y - 10 + \lambda \left(x^2 + y^2 - 25\right)$$

A parciális deriváltjai:

$$\begin{aligned}
F'_x(x,y,\lambda) &= 6 + \lambda \cdot 2x = 6 + 2\lambda x && \Rightarrow x = -\tfrac{6}{2\lambda} = -\tfrac{3}{\lambda} \\
F'_y(x,y,\lambda) &= 8 + \lambda \cdot 2y = 8 + 2\lambda y && \Rightarrow y = -\tfrac{8}{2\lambda} = -\tfrac{4}{\lambda} \\
F'_\lambda(x,y,\lambda) &= x^2 + y^2 - 25
\end{aligned}$$

Az utolsó egyenletbe helyettesítve:

$$\begin{aligned}
\left(-\tfrac{3}{\lambda}\right)^2 + \left(-\tfrac{4}{\lambda}\right)^2 &= 25 \\
\tfrac{25}{\lambda^2} &= 25 \\
\lambda &= \pm 1
\end{aligned}$$

Így $x = \mp 3$, és $y = \mp 4$. Tehát a stacionárius pontok: $(-3,-4,1)$ és $(3,4,-1)$. A feltétel parciális deriváltjai $\left(g'_x(x,y) = 2x \text{ és } g'_y(x,y) = 2y\right)$ csak az origóban tűnnek el egyszerre, de ott nem teljesül a feltétel.

Példa folytatása

A másodrendű parciális deriváltak:

$$\begin{aligned} F'_x(x,y,\lambda) &= 6 + 2\lambda x \\ F'_y(x,y,\lambda) &= 8 + 2\lambda y \\ F'_\lambda(x,y,\lambda) &= x^2 + y^2 - 25 \end{aligned} \qquad \Rightarrow \qquad \begin{aligned} F''_{xx}(x,y,\lambda) &= 2\lambda \\ F''_{xy}(x,y,\lambda) &= 0 \\ F''_{yy}(x,y,\lambda) &= 2\lambda \\ F''_{\lambda x}(x,y,\lambda) &= 2x \\ F''_{\lambda y}(x,y,\lambda) &= 2y \end{aligned}$$

A Hesse-determináns:

$$\begin{vmatrix} 2\lambda & 0 & 2x \\ 0 & 2\lambda & 2y \\ 2x & 2y & 0 \end{vmatrix} = -8x^2\lambda - 8y^2\lambda,$$

ami a $(-3,-4,1)$ pontban negatív, így itt lokális minimum van,
míg a $(3,4,-1)$ pontban pozitív, így itt lokális maximum van.

Az adott feltétel mellett a függvény
(lokális) minimuma: $f(-3,-4) = -60$,
(lokális) maximuma: $f(3,4) = 40$.

Szélsőérték keresése korlátos és zárt tartományon

Az $f(x, y)$ függvény (abszolút) minimumát és maximumát keressük a $\{(x, y) \mid g(x, y) \geq 0\}$ korlátos tartományon.

Először megkeressük az f függvény lokális szélsőértékeit, melyek közül csak a tartományba esőket vesszük figyelembe.

Majd az f függvény szélsőértékeit megkeressük a $g(x, y) = 0$ feltétel mellett a Lagrange-függvénnyel.

A kapott eredményekből megállapítjuk az abszolút minimumot és maximumot.

Példa

Keressük meg az $f(x,y) = x^2 - x + y^2$ függvény szélsőértékeit az egységkörlapon $(\{(x,y) \mid x^2 + y^2 \leq 1\})$.

Példa

Keressük meg az $f(x,y) = x^2 - x + y^2$ függvény szélsőértékeit az egységkörlapon $(\{(x,y) \mid x^2 + y^2 \leq 1\})$.

Először lokális szélsőértékeket keresünk. Ehhez a parciális deriváltak:

$$f'_x(x,y) = 2x - 1$$
$$f'_y(x,y) = 2y$$

Egyetlen stacionárius pont van: $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$, mely a megadott tartományba esik.
A másodrendű parciális deriváltak:

$$f''_{xx}(x,y) = 2$$
$$f''_{xy}(x,y) = 0$$
$$f''_{yy}(x,y) = 2$$

A Hesse-determináns: $\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 4 > 0$, tehát az $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ lokális szélsőérték, mégpedig lokális minimum $(2 > 0)$.
A lokális minimum értéke: $f\left(\frac{1}{2}, 0\right) = -\frac{1}{4}$.

Példa folytatása

$$f(x,y) = x^2 - x + y^2$$
$$g(x,y) = x^2 + y^2 - 1$$
$$F(x,y,\lambda) = x^2 - x + y^2 + \lambda\left(x^2 + y^2 - 1\right)$$

A paciális deriváltak:

$$F'_x(x,y,\lambda) = 2x - 1 + \lambda 2x$$
$$F'_y(x,y,\lambda) = 2y + \lambda 2y$$
$$F'_\lambda(x,y,\lambda) = x^2 + y^2 - 1$$

Ha $F'_y(x,y,\lambda)$ eltűnik, akkor $y = 0$ vagy $\lambda = -1$, viszont az utóbbi esetben $F'_x(x,y,\lambda) = -1$. Tehát $y = 0$ és a harmadik egyenletből $x = \pm 1$. A stacionárius pontok: $\left(1, 0, -\frac{1}{2}\right), \left(-1, 0, -\frac{3}{2}\right)$. A Hesse-determináns:

$$\begin{vmatrix} 2+2\lambda & 0 & 2x \\ 0 & 2+2\lambda & 2y \\ 2x & 2y & 0 \end{vmatrix} = -(2x)^2(2+2\lambda) - (2y)^2(2+2\lambda) = -8(1+\lambda)(x^2+y^2)$$

A $\left(1, 0, -\frac{1}{2}\right)$ lokális minimumhely, értéke: $f(1,0) = 0$.
A $\left(-1, 0, -\frac{3}{2}\right)$ lokális maximumhely, értéke: $f(-1,0) = 2$.

A függvény abszolút minimuma $-\frac{1}{4}$, míg abszolút maximuma 2.

Feladat

Keressük meg az $f(x, y) = x^3y^5$ függvény lokális szélsőértékeit.

Feladat

Keressük meg az $f(x,y)=x^3y^5$ függvény lokális szélsőértékeit.

A parciális deriváltak:

$$f'_x(x,y)=3x^2y^5$$
$$f'_y(x,y)=5x^3y^4$$

Ha x vagy y nulla, akkor mindkettő eltűnik (másutt nem), tehát a két tengely összes pontja stacionárius pont.

Számoljuk ki a másodrendű parciális deriváltakat:

$$f''_{xx}(x,y)=6xy^5$$
$$f''_{xy}(x,y)=15x^2y^4$$
$$f''_{yy}(x,y)=20x^3y^3$$

A Hesse-féle determináns:

$$f''_{xx}(x,y)f''_{yy}(x,y)-\big(f''_{xy}(x,y)\big)^2=6xy^5\cdot 20x^3y^3-\big(15x^2y^4\big)^2=-105x^4y^8,$$

mely az összes stacionárius pontban nulla.
A függvény az első és harmadik síknegyedben pozitív, a második és negyedik síknegyedben negatív, így nincs lokális szélsőértéke.

Feladat második kérdése

Keressük meg az $f(x, y) = x^3y^5$ függvény lokális szélsőértékeit.
Keressük meg f minimumát és maximumát az $(0, 0)$, $(0, 1)$, $(1, 0)$ csúcsú háromszöglapon.

Feladat második kérdése

Keressük meg az $f(x,y) = x^3y^5$ függvény lokális szélsőértékeit.
Keressük meg f minimumát és maximumát az $(0,0)$, $(0,1)$, $(1,0)$ csúcsú háromszöglapon.

Mivel a függvénynek nincs lokális szélsőértéke, így a minimum és a maximum a határon lesz. A tengelyeken a függvény nulla, a háromszöglapon másutt pozitív, így a minimuma 0. A maximuma a $(0,1)$ és $(1,0)$ közötti szakaszon lesz. Ezt paraméterezhetjük $\{(x, 1-x) \mid x \in [0,1]\}$ alakban, és ekkor a függvény:

$$g(x) = f(x, 1-x) = x^3(1-x)^5,$$

melynek maximuma $g'(x) = 0$ esetén lehet. A deriváltja:

$$\begin{aligned} g'(x) &= 3x^2(1-x)^5 + x^3 5(1-x)^4(-1) = 3x^2(1-x)^5 - 5x^3(1-x)^4 = \\ &= (3(1-x) - 5x)x^2(1-x)^4 = (3-8x)x^2(1-x)^4, \end{aligned}$$

mely $x = \frac{3}{8}$ esetén tűnik el (a széleken kívül). Ez lokális maximum, mert előtte pozitív, utána negatív a $g'(x)$. Az ennek megfelelő $\left(\frac{3}{8}, \frac{5}{8}\right)$ pontban van az f függvény maximuma, melynek értéke: $f\left(\frac{3}{8}, \frac{5}{8}\right) = \frac{3^3 \cdot 5^5}{8^8} = \frac{84375}{16777216} \approx 0{,}00503$.

A háromszöglapon a függvény minimuma 0, maximuma kb. $0{,}00503$.

A feladat második kérdése Lagrange-módszerrel

Az $f(x,y)=x^3y^5$ függvény lokális szélsőértékét keressük a $(0,1)$ és $(1,0)$ közötti szakaszon, azaz a $g(x,y)=x+y-1$ függvény nullhelyén:

$$F(x,y,\lambda)=x^3y^5+\lambda\,(x+y-1)$$

A paciális deriváltak:

$$F'_x(x,y,\lambda)=3x^2y^5+\lambda$$
$$F'_y(x,y,\lambda)=5x^3y^4+\lambda$$
$$F'_\lambda(x,y,\lambda)=x+y-1$$

A feltételből : $y=1-x$.

Az első két derivált eltűnéséből:

$$3x^2y^5=5x^3y^4$$
$$3x^2(1-x)^5=5x^3(1-x)^4$$
$$3(1-x)=5x$$
$$x=\tfrac{3}{8}$$

Tehát a $\left(\frac{3}{8},\frac{5}{8},-\frac{84375}{2097152}\right)$ stacionárius pont.

A Hesse-determináns:

$$\begin{vmatrix} 6xy^5 & 15x^2y^4 & 1 \\ 15x^2y^4 & 20x^3y^3 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 15x^2y^4+15x^2y^4-20x^3y^3-6xy^5=(30xy-20x^2-6y^2)xy^3,$$

ami a stacionárius pontban pozitív, így ez feltételes lokális maximum.