8. gyakorlat
Többváltozós függvények deriválása

1. Határozzuk meg az alábbi függvények elsőrendű parciális deriváltjait.
   (a) $f(x,y) = x^3 - 5x^2y - xy + 3y^6 - 1$;
   (b) $f(x,y) = e^{x^2+y^3}$;
   (c) $f(x,y,z) = xe^{-y}\mathrm{tg}(z)$.
2. Írjuk fel az adott pontban az alábbi felületek érintősíkját.
   (a) $f(x,y) = x^2 + 3xy + y^2, \quad P(1,-2)$;
   (b) $f(x,y) = x\ln(x+y), \quad P(-2,3)$.
3. Számítsuk ki az alábbi kétváltozós függvények iránymenti deriváltját az adott pontban és irányban.
   (a) $f(x,y) = 2x^2 - 3xy + y^2 + 15, \quad P(3,2), \quad \mathbf{v} = (2,-4)$;
   (b) $f(x,y) = \mathrm{tg}(2x+y), \quad P\left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\right), \quad \alpha = 225°$.
4. Az $f(x,y) = \dfrac{y^3}{e^{2x+1}}$ függvény grafikonjára a $\left(-\frac{1}{2}, 1\right)$ pont fölött egy vízcseppet ejtünk. Merre fog elindulni? Mekkora az adott pontban a maximális meredekség?
5. Írjuk fel az $f(x,y,z) = \left(x + 2yz, \sqrt{x} + \ln z\right)$ függvény $(4,3,1)$ pontbeli Jacobi-mátrixát.
6. Legyen $f(x,y) = 3x^2y$, és $x(t) = \sin(t)$, $y(t) = \ln t$. Határozzuk meg a $t \mapsto f(x(t), y(t))$ függvény deriváltját a többváltozós láncszabály segítségével.

Bónuszfeladat

7. Az $f(x,y) = \ln(xy)$ függvény grafikonjának mely pontjában lesz az érintősík párhuzamos az $x + y + z = 1$ egyenletű síkkal?

Házi feladatok

8. Számítsuk ki az $f(x,y) = \mathrm{arctg}\left(\dfrac{x}{y}\right)$ függvény elsőrendű parciális deriváltjait.
9. Írjuk fel az $f(x,y) = \dfrac{\sqrt{x-2}}{e^{y-1}}$ függvény érintősíkját a $P(3,1)$ pontban.
10. Legyen $f(x,y) = \sqrt{x^2 - 4y}$. Számítsuk ki a $P(4,3)$ pontban az iránymenti derivált minimumát és maximumát.