

# Determinánsok

Matematika A2x

2020 ősz

# Bevezetés

Determináns: A valós négyzetes mátrixokhoz valós számot rendelő függvény, azaz  $\det : \mathbb{R}^{n \times n} \mapsto \mathbb{R}$

# Bevezetés

Determináns: A valós négyzetes mátrixokhoz valós számot rendelő függvény, azaz  $\det : \mathbb{R}^{n \times n} \mapsto \mathbb{R}$

**Kérdés:** Hogyan rendelje hozzá ezt a számot?

# Bevezetés

Determináns: A valós négyzetes mátrixokhoz valós számot rendelő függvény, azaz  $\det : \mathbb{R}^{n \times n} \mapsto \mathbb{R}$

**Kérdés:** Hogyan rendelje hozzá ezt a számot?

**Válasz:** Két megközelítés van, egy konstruktív és egy axiomatikus.

# Bevezetés

Determináns: A valós négyzetes mátrixokhoz valós számot rendelő függvény, azaz  $\det : \mathbb{R}^{n \times n} \mapsto \mathbb{R}$

**Kérdés:** Hogyan rendelje hozzá ezt a számot?

**Válasz:** Két megközelítés van, egy konstruktív és egy axiomatikus.

**Kérdés:** Hányféleképpen lehet egy  $n \times n$ -es sakktáblára lerakni  $n$  db bástyát úgy, hogy azok ne üssék egymást?

# Bevezetés

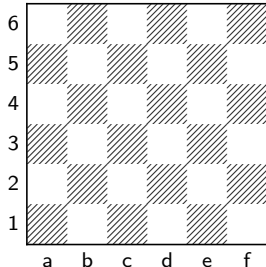
Determináns: A valós négyzetes mátrixokhoz valós számot rendelő függvény, azaz  $\det : \mathbb{R}^{n \times n} \mapsto \mathbb{R}$

**Kérdés:** Hogyan rendelje hozzá ezt a számot?

**Válasz:** Két megközelítés van, egy konstruktív és egy axiomatikus.

**Kérdés:** Hányféleképpen lehet egy  $n \times n$ -es sakktáblára lerakni  $n$  db bástyát úgy, hogy azok ne üssék egymást?

Az első oszlopban bárhová letehetjük a bástyát,



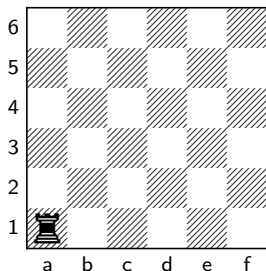
# Bevezetés

Determináns: A valós négyzetes mátrixokhoz valós számot rendelő függvény, azaz  $\det : \mathbb{R}^{n \times n} \mapsto \mathbb{R}$

**Kérdés:** Hogyan rendelje hozzá ezt a számot?

**Válasz:** Két megközelítés van, egy konstruktív és egy axiomatikus.

**Kérdés:** Hányféleképpen lehet egy  $n \times n$ -es sakktáblára lerakni  $n$  db bástyát úgy, hogy azok ne üssék egymást?



Az első oszlopban bárhová letehetjük a bástyát, ez összesen 6 lehetőség. A második sorban már csak a maradék 5 sorba rakhatjuk,

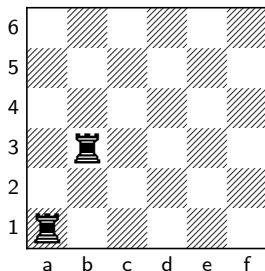
# Bevezetés

Determináns: A valós négyzetes mátrixokhoz valós számot rendelő függvény, azaz  $\det : \mathbb{R}^{n \times n} \mapsto \mathbb{R}$

**Kérdés:** Hogyan rendelje hozzá ezt a számot?

**Válasz:** Két megközelítés van, egy konstruktív és egy axiomatikus.

**Kérdés:** Hányféleképpen lehet egy  $n \times n$ -es sakktáblára lerakni  $n$  db bástyát úgy, hogy azok ne üssék egymást?



Az első oszlopban bárhová letehetjük a bástyát, ez összesen 6 lehetőség. A második sorban már csak a maradék 5 sorba rakhatjuk, a következőnek már csak négy sor jut,



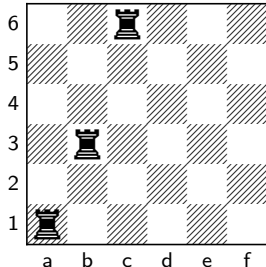
# Bevezetés

Determináns: A valós négyzetes mátrixokhoz valós számot rendelő függvény, azaz  $\det : \mathbb{R}^{n \times n} \mapsto \mathbb{R}$

**Kérdés:** Hogyan rendelje hozzá ezt a számot?

**Válasz:** Két megközelítés van, egy konstruktív és egy axiomatikus.

**Kérdés:** Hányféleképpen lehet egy  $n \times n$ -es sakktáblára lerakni  $n$  db bástyát úgy, hogy azok ne üssék egymást?



Az első oszlopban bárhová letehetjük a bástyát, ez összesen 6 lehetőség. A második sorban már csak a maradék 5 sorba rakhatjuk, a következőnek már csak négy sor jut, a következőknek már csak három,

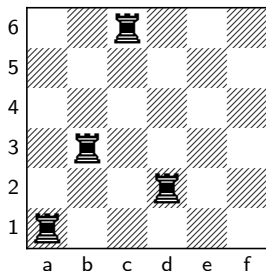
# Bevezetés

Determináns: A valós négyzetes mátrixokhoz valós számot rendelő függvény, azaz  $\det : \mathbb{R}^{n \times n} \mapsto \mathbb{R}$

**Kérdés:** Hogyan rendelje hozzá ezt a számot?

**Válasz:** Két megközelítés van, egy konstruktív és egy axiomatikus.

**Kérdés:** Hányféleképpen lehet egy  $n \times n$ -es sakktáblára lerakni  $n$  db bástyát úgy, hogy azok ne üssék egymást?



Az első oszlopban bárhová letehetjük a bástyát, ez összesen 6 lehetőség. A második sorban már csak a maradék 5 sorba rakhatjuk, a következőnek már csak négy sor jut, a következőknek már csak három, kettő,

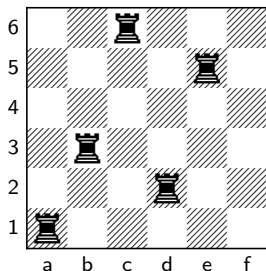
# Bevezetés

Determináns: A valós négyzetes mátrixokhoz valós számot rendelő függvény, azaz  $\det : \mathbb{R}^{n \times n} \mapsto \mathbb{R}$

**Kérdés:** Hogyan rendelje hozzá ezt a számot?

**Válasz:** Két megközelítés van, egy konstruktív és egy axiomatikus.

**Kérdés:** Hányféleképpen lehet egy  $n \times n$ -es sakktáblára lerakni  $n$  db bástyát úgy, hogy azok ne üssék egymást?



Az első oszlopban bárhová letehetjük a bástyát, ez összesen 6 lehetőség. A második sorban már csak a maradék 5 sorba rakhatjuk, a következőnek már csak négy sor jut, a következőknek már csak három, kettő, az utolsó pedig csak egy helyre kerülhet.

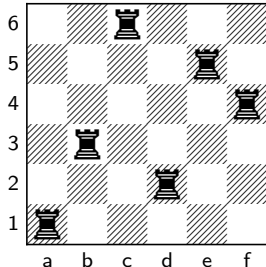
# Bevezetés

Determináns: A valós négyzetes mátrixokhoz valós számot rendelő függvény, azaz  $\det : \mathbb{R}^{n \times n} \mapsto \mathbb{R}$

**Kérdés:** Hogyan rendelje hozzá ezt a számot?

**Válasz:** Két megközelítés van, egy konstruktív és egy axiomatikus.

**Kérdés:** Hányféleképpen lehet egy  $n \times n$ -es sakktáblára lerakni  $n$  db bástyát úgy, hogy azok ne üssék egymást?



Az első oszlopban bárhová letehetjük a bástyát, ez összesen 6 lehetőség. A második sorban már csak a maradék 5 sorba rakhatjuk, a következőnek már csak négy sor jut, a következőknek már csak három, kettő, az utolsó pedig csak egy helyre kerülhet. Ezek egymástól függetlenül előfordulhatnak, tehát összesen  $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6!$  lehetőség van.

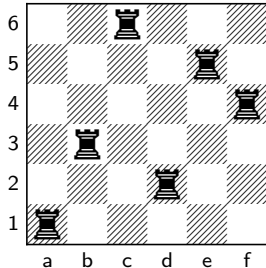
# Bevezetés

Determináns: A valós négyzetes mátrixokhoz valós számot rendelő függvény, azaz  $\det : \mathbb{R}^{n \times n} \mapsto \mathbb{R}$

**Kérdés:** Hogyan rendelje hozzá ezt a számot?

**Válasz:** Két megközelítés van, egy konstruktív és egy axiomatikus.

**Kérdés:** Hányféleképpen lehet egy  $n \times n$ -es sakktáblára lerakni  $n$  db bástyát úgy, hogy azok ne üssék egymást?



Az első oszlopban bárhová letehetjük a bástyát, ez összesen 6 lehetőség. A második sorban már csak a maradék 5 sorba rakhatjuk, a következőnek már csak négy sor jut, a következőknek már csak három, kettő, az utolsó pedig csak egy helyre kerülhet. Ezek egymástól függetlenül előfordulhatnak, tehát összesen  $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6!$  lehetőség van.

**Válasz:** Egy  $n \times n$ -es sakktáblán  $n!$  darab ilyen lehelyezés van.

# Permutáció, inverziószám és determináns

Minden bástyaelhelyezést le tudunk könyvelni úgy, hogy leírjuk egymás után, hogy az aktuális lehelyezésnél hanyadik sorba került a bástya. Az előző példában ez:  $(136254)$ .

# Permutáció, inverziószám és determináns

Minden bástyaelhelyezést le tudunk könyvelni úgy, hogy leírjuk egymás után, hogy az aktuális lehelyezésnél hanyadik sorba került a bástya. Az előző példában ez: (136254).

Ezeket hívjuk az 1-6 számokat lehetséges **permutáció**inak. Jelölés:  $S_n$ . A permutációk és a bástyaelhelyezések között kölcsönösen egyértelmű megfeleltetés van. Jelölés:  $\sigma$  és a permutáció elemei  $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n$

# Permutáció, inverziószám és determináns

Minden bástyaelhelyezést le tudunk könyvelni úgy, hogy leírjuk egymás után, hogy az aktuális lehelyezésnél hanyadik sorba került a bástya. Az előző példában ez: (136254).

Ezeket hívjuk az 1-6 számokat lehetséges **permutáció**inak. Jelölés:  $S_n$ .

A permutációk és a bástyaelhelyezések között kölcsönösen egyértelmű megfeleltetés van. Jelölés:  $\sigma$  és a permutáció elemei  $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n$

**Inverzió:** A permutációban két szomszédos elem felcserélése. Példa:  
(136254)  $\rightarrow$  (132654)



# Permutáció, inverziószám és determináns

Minden bástyaelhelyezést le tudunk könyvelni úgy, hogy leírjuk egymás után, hogy az aktuális lehelyezésnél hanyadik sorba került a bástya. Az előző példában ez: (136254).

Ezeket hívjuk az 1-6 számokat lehetséges **permutáció**inak. Jelölés:  $S_n$ . A permutációk és a bástyaelhelyezések között kölcsönösen egyértelmű megfeleltetés van. Jelölés:  $\sigma$  és a permutáció elemei  $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n$

**Inverzió:** A permutációban két szomszédos elem felcserélése. Példa:  
(136254)  $\rightarrow$  (132654)

**Inverziószám:** Egy adott permutációból az (123456) permutáció eléréséhez szükséges inverziók száma. Jelölés:  $I(\sigma)$ . Példa:  $I(136254) = 5$ , mert  
(136254)  $\rightarrow$  (132654)  $\rightarrow$  (123654)  $\rightarrow$  (123645)  $\rightarrow$  (123465)  $\rightarrow$  (123456)

# Permutáció, inverziószám és determináns

Minden bástyaelhelyezést le tudunk könyvelni úgy, hogy leírjuk egymás után, hogy az aktuális lehelyezésnél hanyadik sorba került a bástya. Az előző példában ez: (136254).

Ezeket hívjuk az 1-6 számokat lehetséges **permutációknak**. Jelölés:  $S_n$ . A permutációk és a bástyaelhelyezések között kölcsönösen egyértelmű megfeleltetés van. Jelölés:  $\sigma$  és a permutáció elemei  $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n$

**Inverzió:** A permutációban két szomszédos elem felcserélése. Példa:  
(136254)  $\rightarrow$  (132654)

**Inverziószám:** Egy adott permutációból az (123456) permutáció eléréséhez szükséges inverziók száma. Jelölés:  $I(\sigma)$ . Példa:  $I(136254) = 5$ , mert  
(136254)  $\rightarrow$  (132654)  $\rightarrow$  (123654)  $\rightarrow$  (123645)  $\rightarrow$  (123465)  $\rightarrow$  (123456)

## Definíció

Legyen  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , ekkor **determinánsnak** nevezzük a  $\det(A) : \mathbb{R}^{n \times n} \mapsto \mathbb{R}$  függvényt a  $\det(A) = |A| = \sum_{\sigma \in S_n} (-1)^{I(\sigma)} \prod_{i=1}^n a_{i\sigma_i}$  hozzárendelési szabállyal.

# Determináns kiszámítása

$n = 1$  Számítsuk ki  $\det[a]$  értékét.

# Determináns kiszámítása

$n = 1$  Számítsuk ki  $\det[a]$  értékét. Itt csak 1 lehetőség van,  $\det[a] = a$

# Determináns kiszámítása

$n = 1$  Számítsuk ki  $\det[a]$  értékét. Itt csak 1 lehetőség van,  $\det[a] = a$

$n = 2$  Számítsuk ki  $\det(A)$  értékét, ha  $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ .

# Determináns kiszámítása

$n = 1$  Számítsuk ki  $\det[a]$  értékét. Itt csak 1 lehetőség van,  $\det[a] = a$

$n = 2$  Számítsuk ki  $\det(A)$  értékét, ha  $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ .

Itt 2 permutáció van, nevezetesen a főátló (12) és mellékátló (21). Ezek alapján  $\det(A) = ad - bc$ , mert a főátló inverziószáma 0, a mellékátlóé 1.

# Determináns kiszámítása

$n = 1$  Számítsuk ki  $\det[a]$  értékét. Itt csak 1 lehetőség van,  $\det[a] = a$

$n = 2$  Számítsuk ki  $\det(A)$  értékét, ha  $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ .

Itt 2 permutáció van, nevezetesen a főátló (12) és mellékátló (21). Ezek alapján  $\det(A) = ad - bc$ , mert a főátló inverziószáma 0, a mellékátlóé 1.

$n = 3$  Számítsuk ki  $\det(A)$  értékét, ha  $A = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix}$ .

# Determináns kiszámítása

$n = 1$  Számítsuk ki  $\det[a]$  értékét. Itt csak 1 lehetőség van,  $\det[a] = a$

$n = 2$  Számítsuk ki  $\det(A)$  értékét, ha  $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ .

Itt 2 permutáció van, nevezetesen a főátló (12) és mellékátló (21). Ezek alapján  $\det(A) = ad - bc$ , mert a főátló inverziószáma 0, a mellékátlóé 1.

$n = 3$  Számítsuk ki  $\det(A)$  értékét, ha  $A = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix}$ .

Itt már  $3! = 6$  lehetséges permutáció van, foglaljuk össze egy táblázatban:

| permutáció | inverziószám | szorzat        |
|------------|--------------|----------------|
| (123)      | 0            | $a_1 b_2 c_3$  |
| (132)      | 1            | $-a_1 b_3 c_2$ |
| (213)      | 1            | $-a_2 b_1 c_3$ |
| (231)      | 2            | $a_2 b_3 c_1$  |
| (312)      | 2            | $a_3 b_1 c_2$  |
| (321)      | 3            | $-a_3 b_2 c_1$ |

$$\det(A) = a_1 b_2 c_3 + a_2 b_3 c_1 + a_3 b_1 c_2 - (a_1 b_3 c_2 + a_2 b_1 c_3 + a_3 b_2 c_1) = \mathbf{abc}$$



# Aldetermináns

## Definíció

Válasszunk ki  $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$  mátrix  $k$  darab sorát és  $k$  darab oszlopát, ahol  $k \leq \min(n, m)$ . **Aldeterminánsnak** nevezzük a kiválasztott sorokban és oszlopokban lévő elemekből álló determinánst.

# Aldetermináns

## Definíció

Válasszunk ki  $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$  mátrix  $k$  darab sorát és  $k$  darab oszlopát, ahol  $k \leq \min(n, m)$ . **Aldeterminánsnak** nevezzük a kiválasztott sorokban és oszlopokban lévő elemekből álló determinánst.

Példa:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 5 & 2 \\ 1 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

# Aldetermináns

## Definíció

Válasszunk ki  $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$  mátrix  $k$  darab sorát és  $k$  darab oszlopát, ahol  $k \leq \min(n, m)$ . **Aldeterminánsnak** nevezzük a kiválasztott sorokban és oszlopokban lévő elemekből álló determinánst.

Példa:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 5 & 2 \\ 1 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

# Aldetermináns

## Definíció

Válasszunk ki  $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$  mátrix  $k$  darab sorát és  $k$  darab oszlopát, ahol  $k \leq \min(n, m)$ . **Aldeterminánsnak** nevezzük a kiválasztott sorokban és oszlopokban lévő elemekből álló determinánst.

Példa:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 5 & 2 \\ 1 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

# Aldetermináns

## Definíció

Válasszunk ki  $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$  mátrix  $k$  darab sorát és  $k$  darab oszlopát, ahol  $k \leq \min(n, m)$ . **Aldeterminánsnak** nevezzük a kiválasztott sorokban és oszlopokban lévő elemekből álló determinánst.

Példa:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 5 & 2 \\ 1 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 12 - 2 = 10$$

# Aldetermináns

## Definíció

Válasszunk ki  $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$  mátrix  $k$  darab sorát és  $k$  darab oszlopát, ahol  $k \leq \min(n, m)$ . **Aldeterminánsnak** nevezzük a kiválasztott sorokban és oszlopokban lévő elemekből álló determinánst.

Példa:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 5 & 2 \\ 1 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 12 - 2 = 10$$

## Definíció

Az  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  mátrix azon aldeterminánsát, melyet  $A$  mátrix  $i$ . sorának és  $j$ . oszlopának elhagyásával kapott mátrix determinánsaként kapunk  $A_{ij}$ -vel jelöljük. **Előjeles aldeterminánsnak** nevezzük a  $(-1)^{i+j} A_{ij}$  értéket.

# Determinánsok kifejtése

**Kérdés:** Hogyan számolunk ki  $3 \times 3$ -nál nagyobb determinánsokat?

# Determinánsok kifejtése

**Kérdés:** Hogyan számolunk ki  $3 \times 3$ -nál nagyobb determinánsokat?

**Ötlet:** Csináljuk indukcióval, és csoportosítsunk. Például egy  $4 \times 4$ -es determinánsban válasszuk ki az első oszlopot. Nézzük meg, hogy milyen szorzatokban van benne ennek az oszlopnak az első, második, harmadik és negyedik eleme.



# Determinánsok kifejtése

**Kérdés:** Hogyan számolunk ki  $3 \times 3$ -nál nagyobb determinánsokat?

**Ötlet:** Csináljuk indukcióval, és csoportosítsunk. Például egy  $4 \times 4$ -es determinánsban válasszuk ki az első oszlopot. Nézzük meg, hogy milyen szorzatokban van benne ennek az oszlopnak az első, második, harmadik és negyedik eleme. Ha az első oszlopból az első elemet választjuk, akkor az ő sorából és oszlopából már nem választható ki más, viszont a maradék  $3 \times 3$ -as mátrixban tetszőlegesen választhatjuk meg a permutációt.

# Determinánsok kifejtése

**Kérdés:** Hogyan számolunk ki  $3 \times 3$ -nál nagyobb determinánsokat?

**Ötlet:** Csináljuk indukcióval, és csoportosítsunk. Például egy  $4 \times 4$ -es determinánsban válasszuk ki az első oszlopot. Nézzük meg, hogy milyen szorzatokban van benne ennek az oszlopnak az első, második, harmadik és negyedik eleme. Ha az első oszlopból az első elemet választjuk, akkor az ő sorából és oszlopából már nem választható ki más, viszont a maradék  $3 \times 3$ -as mátrixban tetszőlegesen választhatjuk meg a permutációt. Ugyanígy kapjuk az oszlop többi elemét tartalmazó szorzatokat, amivel csoportosítottuk a  $4! = 24$  szorzatot 4 darab  $3! (= 6)$ -os csoportba.

# Determinánsok kifejtése

**Kérdés:** Hogyan számolunk ki  $3 \times 3$ -nál nagyobb determinánsokat?

**Ötlet:** Csináljuk indukcióval, és csoportosítsunk. Például egy  $4 \times 4$ -es determinánsban válasszuk ki az első oszlopot. Nézzük meg, hogy milyen szorzatokban van benne ennek az oszlopnak az első, második, harmadik és negyedik eleme. Ha az első oszlopból az első elemet választjuk, akkor az ő sorából és oszlopából már nem választható ki más, viszont a maradék  $3 \times 3$ -as mátrixban tetszőlegesen választhatjuk meg a permutációt. Ugyanígy kapjuk az oszlop többi elemét tartalmazó szorzatokat, amivel csoportosítottuk a  $4! = 24$  szorzatot 4 darab  $6 (=3!)$ -os csoportba. Kiemelve  $a_{11}$ -et az őt tartalmazó szorzatból, pont  $A_{11}$ -et kapjuk és így tovább.

# Determinánsok kifejtése

**Kérdés:** Hogyan számolunk ki  $3 \times 3$ -nál nagyobb determinánsokat?

**Ötlet:** Csináljuk indukcióval, és csoportosítsunk. Például egy  $4 \times 4$ -es determinánsban válasszuk ki az első oszlopot. Nézzük meg, hogy milyen szorzatokban van benne ennek az oszlopnak az első, második, harmadik és negyedik eleme. Ha az első oszlopból az első elemet választjuk, akkor az ő sorából és oszlopából már nem választható ki más, viszont a maradék  $3 \times 3$ -as mátrixban tetszőlegesen választhatjuk meg a permutációt. Ugyanígy kapjuk az oszlop többi elemét tartalmazó szorzatokat, amivel csoportosítottuk a  $4! = 24$  szorzatot 4 darab  $6 (= 3!)$ -os csoportba. Kiemelve  $a_{11}$ -et az őt tartalmazó szorzatból, pont  $A_{11}$ -et kapjuk és így tovább. Amire figyelünk kell még, az az inverziószám és így a permutációhoz tartozó előjel az összegben. Ezt úgy kapjuk (bizonyítás nélkül), hogy alkalmazzuk a sakktábla szabályt, azaz  $A_{ij}$  előjele  $(-1)^{i+j}$  lesz. Ez pedig éppen az első oszlopban lévő előjeles aldeterminánsok összege lesz.

# Determinánsok kifejtése

**Kérdés:** Hogyan számolunk ki  $3 \times 3$ -nál nagyobb determinánsokat?

**Ötlet:** Csináljuk indukcióval, és csoportosítsunk. Például egy  $4 \times 4$ -es determinánsban válasszuk ki az első oszlopot. Nézzük meg, hogy milyen szorzatokban van benne ennek az oszlopnak az első, második, harmadik és negyedik eleme. Ha az első oszlopból az első elemet választjuk, akkor az ő sorából és oszlopából már nem választható ki más, viszont a maradék  $3 \times 3$ -as mátrixban tetszőlegesen választhatjuk meg a permutációt. Ugyanígy kapjuk az oszlop többi elemét tartalmazó szorzatokat, amivel csoportosítottuk a  $4! = 24$  szorzatot 4 darab  $6 (= 3!)$ -os csoportba. Kiemelve  $a_{11}$ -et az őt tartalmazó szorzatból, pont  $A_{11}$ -et kapjuk és így tovább. Amire figyelünk kell még, az az inverziószám és így a permutációhoz tartozó előjel az összegben. Ezt úgy kapjuk (bizonyítás nélkül), hogy alkalmazzuk a sakktábla szabályt, azaz  $A_{ij}$  előjele  $(-1)^{i+j}$  lesz. Ez pedig éppen az első oszlopban lévő előjeles aldeterminánsok összege lesz. Ezt a gondolatmenetet bármelyik sorra, vagy oszlopra alkalmazhatjuk!

# Kifejtési tétel

## Tétel (Kifejtési tétel)

Legyen  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  és  $(A)_{ij} = a_{ij}$ . Ekkor  $\det(A)$ -t kifejthetjük a  $k$ . sora szerint:

$$\det(A) = \sum_{j=1}^n (-1)^{k+j} a_{kj} A_{kj},$$

# Kifejtési tétel

## Tétel (Kifejtési tétel)

Legyen  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  és  $(A)_{ij} = a_{ij}$ . Ekkor  $\det(A)$ -t kifejthetjük a  $k$ . sora

szerint:  $\det(A) = \sum_{j=1}^n (-1)^{k+j} a_{kj} A_{kj}$ , vagy az  $l$ . oszlopa szerint:

$$\det(A) = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+l} a_{il} A_{il}.$$

# Kifejtési tétel

## Tétel (Kifejtési tétel)

Legyen  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  és  $(A)_{ij} = a_{ij}$ . Ekkor  $\det(A)$ -t kifejthetjük a  $k$ . sora

szerint:  $\det(A) = \sum_{j=1}^n (-1)^{k+j} a_{kj} A_{kj}$ , vagy az  $l$ . oszlopa szerint:

$$\det(A) = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+l} a_{il} A_{il}.$$

1. példa Fejtsük ki az  $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 5 \\ 4 & 3 & 1 \end{bmatrix}$  mátrix determinánsát első sora és második oszlopa szerint!



# Kifejtési tétel

## Tétel (Kifejtési tétel)

Legyen  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  és  $(A)_{ij} = a_{ij}$ . Ekkor  $\det(A)$ -t kifejtethetjük a  $k$ . sora

szerint:  $\det(A) = \sum_{j=1}^n (-1)^{k+j} a_{kj} A_{kj}$ , vagy az  $l$ . oszlopa szerint:

$$\det(A) = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+l} a_{il} A_{il}.$$

1. példa Fejtsük ki az  $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 5 \\ 4 & 3 & 1 \end{bmatrix}$  mátrix determinánsát első sora és második oszlopa szerint!

$$\det(A) = 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} - 3 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} + 4 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} =$$

# Kifejtési tétel

## Tétel (Kifejtési tétel)

Legyen  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  és  $(A)_{ij} = a_{ij}$ . Ekkor  $\det(A)$ -t kifejtethetjük a  $k$ . sora

szerint:  $\det(A) = \sum_{j=1}^n (-1)^{k+j} a_{kj} A_{kj}$ , vagy az  $l$ . oszlopa szerint:

$$\det(A) = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+l} a_{il} A_{il}.$$

1. példa Fejtsük ki az  $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 5 \\ 4 & 3 & 1 \end{bmatrix}$  mátrix determinánsát első sora és második oszlopa szerint!

$$\det(A) = 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} - 3 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} + 4 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} =$$

$$(1 - 15) - 3(2 - 20) + 4(6 - 4) = -14 + 54 + 8 = 48$$

# Kifejtési tétel

## Tétel (Kifejtési tétel)

Legyen  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  és  $(A)_{ij} = a_{ij}$ . Ekkor  $\det(A)$ -t kifejtethetjük a  $k$ . sora

szerint:  $\det(A) = \sum_{j=1}^n (-1)^{k+j} a_{kj} A_{kj}$ , vagy az  $l$ . oszlopa szerint:

$$\det(A) = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+l} a_{il} A_{il}.$$

1. példa Fejtsük ki az  $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 5 \\ 4 & 3 & 1 \end{bmatrix}$  mátrix determinánsát első sora és második oszlopa szerint!

$$\det(A) = 1 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} - 3 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} + 4 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} =$$

$$(1 - 15) - 3(2 - 20) + 4(6 - 4) = -14 + 54 + 8 = 48$$

$$\det(A) = -3 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} - 3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} =$$

# Kifejtési tétel

## Tétel (Kifejtési tétel)

Legyen  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  és  $(A)_{ij} = a_{ij}$ . Ekkor  $\det(A)$ -t kifejtethetjük a  $k$ . sora

szerint:  $\det(A) = \sum_{j=1}^n (-1)^{k+j} a_{kj} A_{kj}$ , vagy az  $l$ . oszlopa szerint:

$$\det(A) = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+l} a_{il} A_{il}.$$

1. példa Fejtsük ki az  $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 5 \\ 4 & 3 & 1 \end{bmatrix}$  mátrix determinánsát első sora és második oszlopa szerint!

$$\det(A) = 1 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} - 3 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} + 4 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} =$$

$$(1 - 15) - 3(2 - 20) + 4(6 - 4) = -14 + 54 + 8 = 48$$

$$\det(A) = -3 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} - 3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} =$$

$$-3(2 - 20) + (1 - 16) - 3(5 - 8) = 54 - 15 + 9 = 48$$

# Kifejtési tétel

## Tétel (Kifejtési tétel)

Legyen  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  és  $(A)_{ij} = a_{ij}$ . Ekkor  $\det(A)$ -t kifejtethetjük a  $k$ . sora

szerint:  $\det(A) = \sum_{j=1}^n (-1)^{k+j} a_{kj} A_{kj}$ , vagy az  $l$ . oszlopa szerint:

$$\det(A) = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+l} a_{il} A_{il}.$$

1. példa Fejtsük ki az  $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 5 \\ 4 & 3 & 1 \end{bmatrix}$  mátrix determinánsát első sora és második oszlopa szerint!

$$\det(A) = 1 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} - 3 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} + 4 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} =$$

$$(1 - 15) - 3(2 - 20) + 4(6 - 4) = -14 + 54 + 8 = 48$$

$$\det(A) = -3 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} - 3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} =$$

$$-3(2 - 20) + (1 - 16) - 3(5 - 8) = 54 - 15 + 9 = 48$$

Segítség az előjelhez:

$$\begin{bmatrix} + & - & \dots \\ - & + & \dots \\ \vdots & \vdots & \end{bmatrix}$$

Sakktábla-szabály

# A determináns kapcsolata sor-és oszlopműveletekkel

## Tétel

Legyen  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  mátrix, ekkor

- 1 ha két sorát/oszlopát felcseréljük, akkor a determináns értéke az ellentetjére változik,

# A determináns kapcsolata sor-és oszlopműveletekkel

## Tétel

Legyen  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  mátrix, ekkor

- 1 ha két sorát/oszlopát felcseréljük, akkor a determináns értéke az ellentetjére változik,
- 2 ha egy sorát/oszlopát megszorozzuk  $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  számmal, akkor a determináns értéke  $\lambda$ -szorosára változik,

# A determináns kapcsolata sor-és oszlopműveletekkel

## Tétel

Legyen  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  mátrix, ekkor

- 1 ha két sorát/oszlopát felcseréljük, akkor a determináns értéke az ellentetjére változik,
- 2 ha egy sorát/oszlopát megszorozzuk  $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  számmal, akkor a determináns értéke  $\lambda$ -szorosára változik,
- 3 ha egy sorához/oszlopához hozzáadjuk egy másik sor/oszlop számszorosát, akkor a determináns értéke nem változik.



# A determináns kapcsolata sor-és oszlopműveletekkel

## Tétel

Legyen  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  mátrix, ekkor

- 1 ha két sorát/oszlopát felcseréljük, akkor a determináns értéke az ellentettjére változik,
- 2 ha egy sorát/oszlopát megszorozzuk  $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  számmal, akkor a determináns értéke  $\lambda$ -szorosára változik,
- 3 ha egy sorához/oszlopához hozzáadjuk egy másik sor/oszlop számszorosát, akkor a determináns értéke nem változik.

Következmények:

# A determináns kapcsolata sor-és oszlopműveletekkel

## Tétel

Legyen  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  mátrix, ekkor

- 1 ha két sorát/oszlopát felcseréljük, akkor a determináns értéke az ellentettjére változik,
- 2 ha egy sorát/oszlopát megszorozzuk  $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  számmal, akkor a determináns értéke  $\lambda$ -szorosára változik,
- 3 ha egy sorához/oszlopához hozzáadjuk egy másik sor/oszlop számszorosát, akkor a determináns értéke nem változik.

Következmények:

- Ha a mátrixnak van egyforma sora/oszlopa, akkor a determináns 0.

# A determináns kapcsolata sor-és oszlopműveletekkel

## Tétel

Legyen  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  mátrix, ekkor

- 1 ha két sorát/oszlopát felcseréljük, akkor a determináns értéke az ellentettjére változik,
- 2 ha egy sorát/oszlopát megszorozzuk  $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  számmal, akkor a determináns értéke  $\lambda$ -szorosára változik,
- 3 ha egy sorához/oszlopához hozzáadjuk egy másik sor/oszlop számszorosát, akkor a determináns értéke nem változik.

Következmények:

- Ha a mátrixnak van egyforma sora/oszlopa, akkor a determináns 0.
- Ha a mátrixnak van egy csupa 0 sora/oszlopa, akkor a determináns 0.

# A determináns kapcsolata sor-és oszlopműveletekkel

## Tétel

Legyen  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  mátrix, ekkor

- ❶ ha két sorát/oszlopát felcseréljük, akkor a determináns értéke az ellentettjére változik,
- ❷ ha egy sorát/oszlopát megszorozzuk  $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  számmal, akkor a determináns értéke  $\lambda$ -szorosára változik,
- ❸ ha egy sorához/oszlopához hozzáadjuk egy másik sor/oszlop számszorosát, akkor a determináns értéke nem változik.

Következmények:

- Ha a mátrixnak van egyforma sora/oszlopa, akkor a determináns 0.
- Ha a mátrixnak van egy csupa 0 sora/oszlopa, akkor a determináns 0.
- A Gauss-Jordan elimináció nem változtat azon, hogy a determináns 0 volt, vagy sem.

# A determináns kapcsolata sor-és oszlopműveletekkel

## Tétel

Legyen  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  mátrix, ekkor

- ❶ ha két sorát/oszlopát felcseréljük, akkor a determináns értéke az ellentettjére változik,
- ❷ ha egy sorát/oszlopát megszorozzuk  $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  számmal, akkor a determináns értéke  $\lambda$ -szorosára változik,
- ❸ ha egy sorához/oszlopához hozzáadjuk egy másik sor/oszlop számszorosát, akkor a determináns értéke nem változik.

Következmények:

- Ha a mátrixnak van egyforma sora/oszlopa, akkor a determináns 0.
- Ha a mátrixnak van egy csupa 0 sora/oszlopa, akkor a determináns 0.
- A Gauss-Jordan elimináció nem változtat azon, hogy a determináns 0 volt, vagy sem.
- Felső/alsó háromszög mátrixok determinánsa a főátlóban lévő elemek szorzata.

# Példa

2. példa Számítsuk ki a következő determinánst:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

# Példa

2. példa Számítsuk ki a következő determinánst:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

1. megoldás (kifejtés) Fejtsük ki a harmadik oszlopa szerint

# Példa

2. példa Számítsuk ki a következő determinánst:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

1. megoldás (kifejtés) Fejtsük ki a harmadik oszlopa szerint, mert ott sok 0 van:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \cdot |\cdot| - 1 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 4 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} - 0 \cdot |\cdot| =$$



# Példa

2. példa Számítsuk ki a következő determinánst:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

1. megoldás (kifejtés) Fejtsük ki a harmadik oszlopa szerint, mert ott sok 0 van:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \cdot |\cdot| - 1 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 4 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} - 0 \cdot |\cdot| =$$

$$-((2+0+24)-(8+0+8))$$

# Példa

2. példa Számítsuk ki a következő determinánst:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

1. megoldás (kifejtés) Fejtsük ki a harmadik oszlopa szerint, mert ott sok 0 van:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \cdot |\cdot| - 1 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 4 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} - 0 \cdot |\cdot| =$$

$$-((2+0+24)-(8+0+8))+3((1+4+12)-(4+3+4))=$$

# Példa

2. példa Számítsuk ki a következő determinánst:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

1. megoldás (kifejtés) Fejtsük ki a harmadik oszlopa szerint, mert ott sok 0 van:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \cdot |\cdot| - 1 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 4 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} - 0 \cdot |\cdot| =$$

$$-((2+0+24)-(8+0+8))+3((1+4+12)-(4+3+4)) = -10+18 = 8$$

# Példa

2. példa Számítsuk ki a következő determinánst:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

1. megoldás (kifejtés) Fejtsük ki a harmadik oszlopa szerint, mert ott sok 0 van:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \cdot |\cdot| - 1 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 4 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} - 0 \cdot |\cdot| =$$

$$-((2+0+24)-(8+0+8))+3((1+4+12)-(4+3+4)) = -10+18 = 8$$

De sorműveletekkel ez tovább gyorsítható!

## Példa – folytatás

2. megoldás (sorművelet+kifejtés) Vonjuk ki az második sor háromszorosát a harmadik sorból, majd úgy fejtsünk ki:

$$\left| \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \end{array} \right| \begin{array}{l} s_3 - 3s_2 \\ = \end{array}$$

## Példa – folytatás

2. megoldás (sorművelet+kifejtés) Vonjuk ki az második sor háromszorosát a harmadik sorból, majd úgy fejtsünk ki:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} s_3 - 3s_2 \\ \\ \\ \end{matrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & 0 & -3 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} =$$

## Példa – folytatás

2. megoldás (sorművelet+kifejtés) Vonjuk ki az második sor háromszorosát a harmadik sorból, majd úgy fejtsünk ki:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} s_3 - 3s_2 \\ \\ \\ \end{matrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & 0 & -3 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -2 & -1 & -3 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} =$$

## Példa – folytatás

2. megoldás (sorművelet+kifejtés) Vonjuk ki az második sor háromszorosát a harmadik sorból, majd úgy fejtsünk ki:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} \xrightarrow{s_3 - 3s_2} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & 0 & -3 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -2 & -1 & -3 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = \\
 -((-1 - 12 - 12) - (-4 - 9 - 4)) = -(-25 + 17) = 8$$



## Példa – folytatás

2. megoldás (sorművelet+kifejtés) Vonjuk ki az második sor háromszorosát a harmadik sorból, majd úgy fejtsünk ki:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} \xrightarrow{s_3 - 3s_2} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & 0 & -3 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -2 & -1 & -3 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = \\
 -((-1 - 12 - 12) - (-4 - 9 - 4)) = -(-25 + 17) = 8$$

3. megoldás (sorműveletek)

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

## Példa – folytatás

2. megoldás (sorművelet+kifejtés) Vonjuk ki az második sor háromszorosát a harmadik sorból, majd úgy fejtsünk ki:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} s_3 - 3s_2 \\ \\ \\ \end{matrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & 0 & -3 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -2 & -1 & -3 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = \\
 -((-1 - 12 - 12) - (-4 - 9 - 4)) = -(-25 + 17) = 8$$

3. megoldás (sorműveletek)

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} s_2 - 2s_1 \\ s_3 - 4s_1 \\ = \\ s_4 - 2s_1 \end{matrix}$$

## Példa – folytatás

2. megoldás (sorművelet+kifejtés) Vonjuk ki az második sor háromszorosát a harmadik sorból, majd úgy fejtsünk ki:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} \xrightarrow{s_3 - 3s_2} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & 0 & -3 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -2 & -1 & -3 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$-((-1 - 12 - 12) - (-4 - 9 - 4)) = -(-25 + 17) = 8$$

3. megoldás (sorműveletek)

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} \xrightarrow{\begin{matrix} s_2 - 2s_1 \\ s_3 - 4s_1 \\ s_4 - 2s_1 \end{matrix}} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & -3 & 1 & -3 \\ 0 & -6 & 3 & -8 \\ 0 & -1 & 0 & -3 \end{vmatrix}$$

## Példa – folytatás

2. megoldás (sorművelet+kifejtés) Vonjuk ki az második sor háromszorosát a harmadik sorból, majd úgy fejtsünk ki:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} \xrightarrow{s_3 - 3s_2} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & 0 & -3 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -2 & -1 & -3 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = \\
 -((-1 - 12 - 12) - (-4 - 9 - 4)) = -(-25 + 17) = 8$$

3. megoldás (sorműveletek)

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} \xrightarrow{\substack{s_2 - 2s_1 \\ s_3 - 4s_1 \\ s_4 - 2s_1}} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & -3 & 1 & -3 \\ 0 & -6 & 3 & -8 \\ 0 & -1 & 0 & -3 \end{vmatrix} \xrightarrow{s_2 \leftrightarrow s_4} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & -3 \\ 0 & -6 & 3 & -8 \\ 0 & -3 & 1 & -3 \end{vmatrix}$$

## Példa – folytatás

2. megoldás (sorművelet+kifejtés) Vonjuk ki az második sor háromszorosát a harmadik sorból, majd úgy fejtsünk ki:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} \xrightarrow{s_3 - 3s_2} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & 0 & -3 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -2 & -1 & -3 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = \\
 -((-1 - 12 - 12) - (-4 - 9 - 4)) = -(-25 + 17) = 8$$

3. megoldás (sorműveletek)

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} \xrightarrow{\substack{s_2 - 2s_1 \\ s_3 - 4s_1 \\ s_4 - 2s_1}} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & -3 & 1 & -3 \\ 0 & -6 & 3 & -8 \\ 0 & -1 & 0 & -3 \end{vmatrix} \xrightarrow{s_2 \leftrightarrow s_4} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & -3 \\ 0 & -6 & 3 & -8 \\ 0 & -3 & 1 & -3 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & -3 \\ 0 & -6 & 3 & -8 \\ 0 & -3 & 1 & -3 \end{vmatrix}$$

## Példa – folytatás

2. megoldás (sorművelet+kifejtés) Vonjuk ki az második sor háromszorosát a harmadik sorból, majd úgy fejtsünk ki:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} \xrightarrow{s_3 - 3s_2} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & 0 & -3 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -2 & -1 & -3 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = \\
 -((-1 - 12 - 12) - (-4 - 9 - 4)) = -(-25 + 17) = 8$$

3. megoldás (sorműveletek)

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} \xrightarrow{\substack{s_2 - 2s_1 \\ s_3 - 4s_1 \\ s_4 - 2s_1}} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & -3 & 1 & -3 \\ 0 & -6 & 3 & -8 \\ 0 & -1 & 0 & -3 \end{vmatrix} \xrightarrow{s_2 \leftrightarrow s_4} \\
 = - \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & -3 \\ 0 & -6 & 3 & -8 \\ 0 & -3 & 1 & -3 \end{vmatrix} \xrightarrow{s_2(-1)} =$$

## Példa – folytatás

2. megoldás (sorművelet+kifejtés) Vonjuk ki az második sor háromszorosát a harmadik sorból, majd úgy fejtsünk ki:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} \xrightarrow{s_3 - 3s_2} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & 0 & -3 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -2 & -1 & -3 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = \\
 -((-1 - 12 - 12) - (-4 - 9 - 4)) = -(-25 + 17) = 8$$

3. megoldás (sorműveletek)

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} \xrightarrow{\substack{s_2 - 2s_1 \\ s_3 - 4s_1 \\ s_4 - 2s_1}} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & -3 & 1 & -3 \\ 0 & -6 & 3 & -8 \\ 0 & -1 & 0 & -3 \end{vmatrix} \xrightarrow{s_2 \leftrightarrow s_4} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & -3 \\ 0 & -6 & 3 & -8 \\ 0 & -3 & 1 & -3 \end{vmatrix} = \\
 = - \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & -3 \\ 0 & -6 & 3 & -8 \\ 0 & -3 & 1 & -3 \end{vmatrix} \xrightarrow{s_2(-1)} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & -6 & 3 & -8 \\ 0 & -3 & 1 & -3 \end{vmatrix}$$

## Példa – folytatás

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & -6 & 3 & -8 \\ 0 & -3 & 1 & -3 \end{vmatrix}$$



## Példa – folytatás

$$\left| \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & -6 & 3 & -8 \\ 0 & -3 & 1 & -3 \end{array} \right| \begin{array}{l} s_3 + 6s_2 \\ = \\ s_4 + 3s_2 \end{array}$$

# Példa – folytatás

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & -6 & 3 & -8 \\ 0 & -3 & 1 & -3 \end{vmatrix} \begin{matrix} s_3 + 6s_2 \\ = \\ s_4 + 3s_2 \end{matrix} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 10 \\ 0 & 0 & 1 & 6 \end{vmatrix}$$

# Példa – folytatás

$$\begin{array}{c}
 \left| \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & -6 & 3 & -8 \\ 0 & -3 & 1 & -3 \end{array} \right| \begin{array}{l} s_3 + 6s_2 \\ = \\ s_4 + 3s_2 \end{array} \left| \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 10 \\ 0 & 0 & 1 & 6 \end{array} \right| \begin{array}{l} s_3 - 2s_4 \\ = \end{array}
 \end{array}$$

# Példa – folytatás

$$\begin{array}{c}
 \left| \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & -6 & 3 & -8 \\ 0 & -3 & 1 & -3 \end{array} \right| \\
 \begin{array}{l} s_3 + 6s_2 \\ = \\ s_4 + 3s_2 \end{array}
 \end{array}
 \begin{array}{c}
 \left| \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 10 \\ 0 & 0 & 1 & 6 \end{array} \right| \\
 \begin{array}{l} s_3 - 2s_4 \\ = \end{array}
 \end{array}
 \begin{array}{c}
 \left| \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 6 \end{array} \right|
 \end{array}$$

# Példa – folytatás

$$\begin{array}{c}
 \left| \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & -6 & 3 & -8 \\ 0 & -3 & 1 & -3 \end{array} \right| \\
 \begin{array}{l} s_3 + 6s_2 \\ = \\ s_4 + 3s_2 \end{array}
 \end{array}
 \begin{array}{c}
 \left| \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 10 \\ 0 & 0 & 1 & 6 \end{array} \right| \\
 \begin{array}{l} s_3 - 2s_4 \\ = \end{array}
 \end{array}
 \begin{array}{c}
 \left| \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 6 \end{array} \right|
 \end{array}$$

$$\begin{array}{l}
 s_4 - s_3 \\
 =
 \end{array}$$

# Példa – folytatás

$$\begin{array}{l}
 \left| \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & -6 & 3 & -8 \\ 0 & -3 & 1 & -3 \end{array} \right| \begin{array}{l} s_3 + 6s_2 \\ = \\ s_4 + 3s_2 \end{array} \left| \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 10 \\ 0 & 0 & 1 & 6 \end{array} \right| \begin{array}{l} s_3 - 2s_4 \\ = \end{array} \left| \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 6 \end{array} \right| \\
 s_4 - s_3 = \left| \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \end{array} \right| =
 \end{array}$$

# Példa – folytatás

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & -6 & 3 & -8 \\ 0 & -3 & 1 & -3 \end{vmatrix} \begin{matrix} s_3 + 6s_2 \\ = \\ s_4 + 3s_2 \end{matrix} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 10 \\ 0 & 0 & 1 & 6 \end{vmatrix} \begin{matrix} s_3 - 2s_4 \\ = \end{matrix} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 6 \end{vmatrix}$$

$$\begin{matrix} s_4 - s_3 \\ = \end{matrix} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 8 = 8$$

# Determináns egyéb tulajdonságai

## Tétel

*Legyen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , ekkor*

- $\det(A) = \det(A^T)$



# Determináns egyéb tulajdonságai

## Tétel

Legyen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , ekkor

- $\det(A) = \det(A^T)$
- $\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B)$

# Determináns egyéb tulajdonságai

## Tétel

Legyen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , ekkor

- $\det(A) = \det(A^T)$
- $\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B)$
- $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$

# Determináns egyéb tulajdonságai

## Tétel

Legyen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , ekkor

- $\det(A) = \det(A^T)$
- $\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B)$
- $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$
- $A$  pontosan akkor invertálható, ha  $\det(A) \neq 0$

# Determináns egyéb tulajdonságai

## Tétel

Legyen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , ekkor

- $\det(A) = \det(A^T)$
- $\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B)$
- $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$
- $A$  pontosan akkor invertálható, ha  $\det(A) \neq 0$
- $\det(A) \neq 0 \Leftrightarrow r(A) = n$

# Determináns egyéb tulajdonságai

## Tétel

Legyen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , ekkor

- $\det(A) = \det(A^T)$
- $\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B)$
- $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$
- $A$  pontosan akkor invertálható, ha  $\det(A) \neq 0$
- $\det(A) \neq 0 \Leftrightarrow r(A) = n$

$\vdots$

# Determináns egyéb tulajdonságai

## Tétel

Legyen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , ekkor

- $\det(A) = \det(A^T)$
- $\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B)$
- $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$
- $A$  pontosan akkor invertálható, ha  $\det(A) \neq 0$
- $\det(A) \neq 0 \Leftrightarrow r(A) = n$

$\vdots$

## Definíció

Az  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  mátrix *szinguláris*, ha  $\det(A) = 0$  és *reguláris*, vagy *nem szinguláris*, ha  $\det(A) \neq 0$ .

# Determináns axiomatikus definíciója

## Definíció

Az  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  mátrixra  $\det(A)$  egy olyan függvény, mely rendelkezik az alábbi tulajdonságokkal:

- *homogén*:  $\det(\dots \lambda \mathbf{a}^i \dots) = \lambda \det(\dots \mathbf{a}^i \dots)$

# Determináns axiomatikus definíciója

## Definíció

Az  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  mátrixra  $\det(A)$  egy olyan függvény, mely rendelkezik az alábbi tulajdonságokkal:

- *homogén*:  $\det(\dots \lambda \mathbf{a}^i \dots) = \lambda \det(\dots \mathbf{a}^i \dots)$
- *additív*:  $\det(\dots \mathbf{a}^i + \mathbf{b}^i \dots) = \det(\dots \mathbf{a}^i \dots) + \det(\dots \mathbf{b}^i \dots)$



# Determináns axiomatikus definíciója

## Definíció

Az  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  mátrixra  $\det(A)$  egy olyan függvény, mely rendelkezik az alábbi tulajdonságokkal:

- *homogén*:  $\det(\dots \lambda \mathbf{a}^i \dots) = \lambda \det(\dots \mathbf{a}^i \dots)$
- *additív*:  $\det(\dots \mathbf{a}^i + \mathbf{b}^i \dots) = \det(\dots \mathbf{a}^i \dots) + \det(\dots \mathbf{b}^i \dots)$
- *alternáló*:  $\det(\dots \mathbf{a}^i \dots \mathbf{a}^j \dots) = -\det(\dots \mathbf{a}^j \dots \mathbf{a}^i \dots)$

# Determináns axiomatikus definíciója

## Definíció

Az  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  mátrixra  $\det(A)$  egy olyan függvény, mely rendelkezik az alábbi tulajdonságokkal:

- *homogén*:  $\det(\dots \lambda \mathbf{a}^i \dots) = \lambda \det(\dots \mathbf{a}^i \dots)$
- *additív*:  $\det(\dots \mathbf{a}^i + \mathbf{b}^i \dots) = \det(\dots \mathbf{a}^i \dots) + \det(\dots \mathbf{b}^i \dots)$
- *alternáló*:  $\det(\dots \mathbf{a}^i \dots \mathbf{a}^j \dots) = -\det(\dots \mathbf{a}^j \dots \mathbf{a}^i \dots)$
- *kezdőérték*:  $\det(\mathbf{e}^1 \mathbf{e}^2 \dots \mathbf{e}^n) = 1$

# Adjungált

## Definíció

Az  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  mátrixnak az *adjungáltja*  $\text{adj}(A)$ , ha  $(\text{adj}(A))_{ij} = (-1)^{i+j} A_{ij}$ .  
Azaz az előjeles aldeterminánsokból álló mátrixot nevezzük adjungáltkak.

# Adjungált

## Definíció

Az  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  mátrixnak az *adjungáltja*  $\text{adj}(A)$ , ha  $(\text{adj}(A))_{ij} = (-1)^{i+j} A_{ij}$ . Azaz az előjeles aldeterminánsokból álló mátrixot nevezzük adjungáltként.

3. példa Adjuk meg az  $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & 2 & 3 \\ -6 & -1 & 2 \end{bmatrix}$  mátrix adjungáltját.

# Adjungált

## Definíció

Az  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  mátrixnak az **adjungáltja**  $\text{adj}(A)$ , ha  $(\text{adj}(A))_{ij} = (-1)^{i+j} A_{ij}$ . Azaz az előjeles aldeterminánsokból álló mátrixot nevezzük adjungáltkak.

3. példa Adjuk meg az  $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & 2 & 3 \\ -6 & -1 & 2 \end{bmatrix}$  mátrix adjungáltját.

$$\text{adj}(A) = \begin{bmatrix} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & 3 \\ -6 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ -6 & -1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} -1 & -2 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -6 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -6 & -1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} \end{bmatrix} =$$

# Adjungált

## Definíció

Az  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  mátrixnak az **adjungáltja**  $\text{adj}(A)$ , ha  $(\text{adj}(A))_{ij} = (-1)^{i+j} A_{ij}$ . Azaz az előjeles aldeterminánsokból álló mátrixot nevezzük adjungáltkak.

3. példa Adjuk meg az  $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & 2 & 3 \\ -6 & -1 & 2 \end{bmatrix}$  mátrix adjungáltját.

$$\text{adj}(A) = \begin{bmatrix} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & 3 \\ -6 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ -6 & -1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} -1 & -2 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -6 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -6 & -1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & -18 & 12 \\ 4 & -10 & 7 \\ 1 & -3 & 2 \end{bmatrix}$$

# Adjungáltas inverzképlet

## Tétel

*Ha az  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  mátrix invertálható, akkor*

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \operatorname{adj}(A)^T$$

# Adjungáltas inverzképlet

## Tétel

Ha az  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  mátrix invertálható, akkor

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \text{adj}(A)^T$$

4. példa Adjuk meg az  $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & 2 & 3 \\ -6 & -1 & 2 \end{bmatrix}$  mátrix inverzét az adjungáltja segítségével.



# Adjungáltas inverzképlet

## Tétel

Ha az  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  mátrix invertálható, akkor

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \operatorname{adj}(A)^T$$

4. példa Adjuk meg az  $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & 2 & 3 \\ -6 & -1 & 2 \end{bmatrix}$  mátrix inverzét az

adjungáltja segítségével.

Az előző példa alapján

$$\operatorname{adj}(A)^T = \begin{bmatrix} 7 & -18 & 12 \\ 4 & -10 & 7 \\ 1 & -3 & 2 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 7 & 4 & 1 \\ -18 & -10 & -3 \\ 12 & 7 & 2 \end{bmatrix}$$

## Példa – folytatás

Az inverz kiszámításához már csak  $\det(A)$  kell:

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & 2 & 3 \\ -6 & -1 & 2 \end{vmatrix}$$

## Példa – folytatás

Az inverz kiszámításához már csak  $\det(A)$  kell:

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & 2 & 3 \\ -6 & -1 & 2 \end{vmatrix} \begin{array}{l} s_3 + 6s_1 \\ = \end{array}$$

# Példa – folytatás

Az inverz kiszámításához már csak  $\det(A)$  kell:

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & 2 & 3 \\ -6 & -1 & 2 \end{vmatrix} \xrightarrow{s_3 + 6s_1} \begin{vmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & -7 & -10 \end{vmatrix} =$$

# Példa – folytatás

Az inverz kiszámításához már csak  $\det(A)$  kell:

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & 2 & 3 \\ -6 & -1 & 2 \end{vmatrix} \xrightarrow{s_3 + 6s_1} \begin{vmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & -7 & -10 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -7 & -10 \end{vmatrix}$$

$$=$$

## Példa – folytatás

Az inverz kiszámításához már csak  $\det(A)$  kell:

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & 2 & 3 \\ -6 & -1 & 2 \end{vmatrix} \stackrel{s_3 + 6s_1}{=} \begin{vmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & -7 & -10 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -7 & -10 \end{vmatrix}$$

$= -20 + 21 = 1$ , tehát az inverzre a következő adódik:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \operatorname{adj}(A)^T =$$

## Példa – folytatás

Az inverz kiszámításához már csak  $\det(A)$  kell:

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & 2 & 3 \\ -6 & -1 & 2 \end{vmatrix} \overset{s_3 + 6s_1}{=} \begin{vmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & -7 & -10 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -7 & -10 \end{vmatrix}$$

$= -20 + 21 = 1$ , tehát az inverzre a következő adódik:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \operatorname{adj}(A)^T = \frac{1}{1} \begin{bmatrix} 7 & 4 & 1 \\ -18 & -10 & -3 \\ 12 & 7 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 4 & 1 \\ -18 & -10 & -3 \\ 12 & 7 & 2 \end{bmatrix}$$

## Példa – folytatás

Az inverz kiszámításához már csak  $\det(A)$  kell:

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & 2 & 3 \\ -6 & -1 & 2 \end{vmatrix} \begin{matrix} s_3 + 6s_1 \\ = \end{matrix} \begin{vmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & -7 & -10 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -7 & -10 \end{vmatrix}$$

$= -20 + 21 = 1$ , tehát az inverzre a következő adódik:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \operatorname{adj}(A)^T = \frac{1}{1} \begin{bmatrix} 7 & 4 & 1 \\ -18 & -10 & -3 \\ 12 & 7 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 4 & 1 \\ -18 & -10 & -3 \\ 12 & 7 & 2 \end{bmatrix}$$

**Megjegyzés:** Ez a formula nagyon jól működik  $2 \times 2$ -es mátrixokra.

Ha  $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ , akkor  $A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$



# Cramer-szabály

**Kérdés:** Kinek jutott eszébe egyáltalán a determináns és mire használták?

# Cramer-szabály

**Kérdés:** Kinek jutott eszébe egyáltalán a determináns és mire használták?

**Válasz:** Az elsődleges cél olyan egyenletrendszerek megoldása volt, ahol

- ugyanannyi ismeretlen van, mint egyenlet, azaz  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$

# Cramer-szabály

**Kérdés:** Kinek jutott eszébe egyáltalán a determináns és mire használták?

**Válasz:** Az elsődleges cél olyan egyenletrendszerek megoldása volt, ahol

- ugyanannyi ismeretlen van, mint egyenlet, azaz  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$
- az együtthatómátrix teljes rangú, azaz  $\det(A) \neq 0$

# Cramer-szabály

**Kérdés:** Kinek jutott eszébe egyáltalán a determináns és mire használták?

**Válasz:** Az elsődleges cél olyan egyenletrendszerek megoldása volt, ahol

- ugyanannyi ismeretlen van, mint egyenlet, azaz  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$
- az együtthatómátrix teljes rangú, azaz  $\det(A) \neq 0$

Tekintsük az  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$  egyenletet, ahol  $A = \begin{bmatrix} \mathbf{a}^1 & \mathbf{a}^2 & \dots & \mathbf{a}^n \end{bmatrix}$  az együtthatómátrix,  $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$  az eredményvektor és  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  az ismeretlenekből álló vektor.

# Cramer-szabály

**Kérdés:** Kinek jutott eszébe egyáltalán a determináns és mire használták?

**Válasz:** Az elsődleges cél olyan egyenletrendszerek megoldása volt, ahol

- ugyanannyi ismeretlen van, mint egyenlet, azaz  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$
- az együtthatómátrix teljes rangú, azaz  $\det(A) \neq 0$

Tekintsük az  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$  egyenletet, ahol  $A = \begin{bmatrix} \mathbf{a}^1 & \mathbf{a}^2 & \dots & \mathbf{a}^n \end{bmatrix}$  az együtthatómátrix,  $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$  az eredményvektor és  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  az ismeretlenekből álló vektor. Ekkor

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} \mathbf{b} & \mathbf{a}^2 & \dots & \mathbf{a}^n \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \mathbf{a}^1 & \mathbf{a}^2 & \dots & \mathbf{a}^n \end{vmatrix}}, \quad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} \mathbf{a}^1 & \mathbf{b} & \dots & \mathbf{a}^n \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \mathbf{a}^1 & \mathbf{a}^2 & \dots & \mathbf{a}^n \end{vmatrix}}, \dots,$$

$$x_i = \frac{\begin{vmatrix} \mathbf{a}^1 & \mathbf{a}^2 & \dots & \mathbf{b} & \dots & \mathbf{a}^n \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \mathbf{a}^1 & \mathbf{a}^2 & \dots & \mathbf{a}^i & \dots & \mathbf{a}^n \end{vmatrix}}, \dots, \quad x_n = \frac{\begin{vmatrix} \mathbf{a}^1 & \mathbf{a}^2 & \dots & \mathbf{b} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \mathbf{a}^1 & \mathbf{a}^2 & \dots & \mathbf{a}^n \end{vmatrix}}$$

# Cramer-szabály

**Kérdés:** Kinek jutott eszébe egyáltalán a determináns és mire használták?

**Válasz:** Az elsődleges cél olyan egyenletrendszerek megoldása volt, ahol

- ugyanannyi ismeretlen van, mint egyenlet, azaz  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$
- az együtthatómátrix teljes rangú, azaz  $\det(A) \neq 0$

Tekintsük az  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$  egyenletet, ahol  $A = \begin{bmatrix} \mathbf{a}^1 & \mathbf{a}^2 & \dots & \mathbf{a}^n \end{bmatrix}$  az együtthatómátrix,  $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$  az eredményvektor és  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  az ismeretlenekből álló vektor. Ekkor

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} \mathbf{b} & \mathbf{a}^2 & \dots & \mathbf{a}^n \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \mathbf{a}^1 & \mathbf{a}^2 & \dots & \mathbf{a}^n \end{vmatrix}}, \quad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} \mathbf{a}^1 & \mathbf{b} & \dots & \mathbf{a}^n \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \mathbf{a}^1 & \mathbf{a}^2 & \dots & \mathbf{a}^n \end{vmatrix}}, \dots,$$

$$x_i = \frac{\begin{vmatrix} \mathbf{a}^1 & \mathbf{a}^2 & \dots & \mathbf{b} & \dots & \mathbf{a}^n \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \mathbf{a}^1 & \mathbf{a}^2 & \dots & \mathbf{a}^i & \dots & \mathbf{a}^n \end{vmatrix}}, \dots, x_n = \frac{\begin{vmatrix} \mathbf{a}^1 & \mathbf{a}^2 & \dots & \mathbf{b} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \mathbf{a}^1 & \mathbf{a}^2 & \dots & \mathbf{a}^n \end{vmatrix}}$$

$$\text{Jelölés: } B_i := \begin{vmatrix} \mathbf{a}^1 & \mathbf{a}^2 & \dots & \mathbf{b} & \dots & \mathbf{a}^n \end{vmatrix}, \text{ ekkor } x_i = \frac{\det(B_i)}{\det(A)}.$$

# Példa

5. példa Oldjuk meg az alábbi egyenletrendszert a Cramer-szabály segítségével, ha lehetséges.

$$\begin{aligned}x + 2y &= 4 \\x + 3y - z &= 6 \\-2x + z &= -5\end{aligned}$$

# Példa

5. példa Oldjuk meg az alábbi egyenletrendszert a Cramer-szabály segítségével, ha lehetséges.

$$\begin{aligned}x + 2y &= 4 \\x + 3y - z &= 6 \\-2x + z &= -5\end{aligned}$$

Leolvassza az együtthatómátrixot és az eredményvektort:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & -1 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ és } \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \\ -5 \end{bmatrix}$$



# Példa

5. példa Oldjuk meg az alábbi egyenletrendszert a Cramer-szabály segítségével, ha lehetséges.

$$\begin{aligned}x + 2y &= 4 \\x + 3y - z &= 6 \\-2x + z &= -5\end{aligned}$$

Leolvassva az együtthatómátrixot és az eredményvektort:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & -1 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ és } \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \\ -5 \end{bmatrix}$$

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & -1 \\ -2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 3 + 4 + 0 - (0 + 0 + 2) = 5$$

# Példa

5. példa Oldjuk meg az alábbi egyenletrendszert a Cramer-szabály segítségével, ha lehetséges.

$$\begin{aligned}x + 2y &= 4 \\x + 3y - z &= 6 \\-2x + z &= -5\end{aligned}$$

Leolvassva az együtthatómátrixot és az eredményvektort:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & -1 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ és } \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \\ -5 \end{bmatrix}$$

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & -1 \\ -2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 3 + 4 + 0 - (0 + 0 + 2) = 5$$

## Példa – folytatás

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & -1 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ és } \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \\ -5 \end{bmatrix} \text{ és már tudjuk, hogy } \det(A) = 5$$

$$\det(B_1) = \begin{vmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 6 & 3 & -1 \\ -5 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 12 + 10 + 0 - (0 + 0 + 12) = 10 \Rightarrow x = \frac{10}{5} = 2$$

# Példa – folytatás

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & -1 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ és } \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \\ -5 \end{bmatrix} \text{ és már tudjuk, hogy } \det(A) = 5$$

$$\det(B_1) = \begin{vmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 6 & 3 & -1 \\ -5 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 12 + 10 + 0 - (0 + 0 + 12) = 10 \Rightarrow x = \frac{10}{5} = 2$$

$$\det(B_2) = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 1 & 6 & -1 \\ -2 & -5 & 1 \end{vmatrix} = 6 + 8 + 0 - (0 + 5 + 4) = 5 \Rightarrow y = \frac{5}{5} = 1$$

# Példa – folytatás

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & -1 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ és } \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \\ -5 \end{bmatrix} \text{ és már tudjuk, hogy } \det(A) = 5$$

$$\det(B_1) = \begin{vmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 6 & 3 & -1 \\ -5 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 12 + 10 + 0 - (0 + 0 + 12) = 10 \Rightarrow x = \frac{10}{5} = 2$$

$$\det(B_2) = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 1 & 6 & -1 \\ -2 & -5 & 1 \end{vmatrix} = 6 + 8 + 0 - (0 + 5 + 4) = 5 \Rightarrow y = \frac{5}{5} = 1$$

$$\det(B_3) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 6 \\ -2 & 0 & -5 \end{vmatrix} = -15 - 24 + 0 - (-24 + 0 - 10) = -5 \Rightarrow z = \frac{-5}{5} = -1$$

# Példa – folytatás

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & -1 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ és } \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \\ -5 \end{bmatrix} \text{ és már tudjuk, hogy } \det(A) = 5$$

$$\det(B_1) = \begin{vmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 6 & 3 & -1 \\ -5 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 12 + 10 + 0 - (0 + 0 + 12) = 10 \Rightarrow x = \frac{10}{5} = 2$$

$$\det(B_2) = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 1 & 6 & -1 \\ -2 & -5 & 1 \end{vmatrix} = 6 + 8 + 0 - (0 + 5 + 4) = 5 \Rightarrow y = \frac{5}{5} = 1$$

$$\det(B_3) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 6 \\ -2 & 0 & -5 \end{vmatrix} = -15 - 24 + 0 - (-24 + 0 - 10) = -5 \Rightarrow z = \frac{-5}{5} = -1$$

# Sor-és oszlopműveletek – áttekintés

Emlék: Sor-és oszlopműveletek

- 1 Két sor/oszlop felcserélése ( $s_i \leftrightarrow s_j$ ,  $o_i \leftrightarrow o_j$ )

# Sor-és oszlopműveletek – áttekintés

Emlék: Sor-és oszlopműveletek

- 1 Két sor/oszlop felcserélése ( $s_i \leftrightarrow s_j$ ,  $o_i \leftrightarrow o_j$ )
- 2 Sor/Oszlop szorzása nem 0 számmal ( $\lambda s_i$ ,  $\lambda o_i$ )



# Sor-és oszlopműveletek – áttekintés

**Emlék:** Sor-és oszlopműveletek

- 1 Két sor/oszlop felcserélése ( $s_i \leftrightarrow s_j$ ,  $o_i \leftrightarrow o_j$ )
- 2 Sor/Oszlop szorzása nem 0 számmal ( $\lambda s_i$ ,  $\lambda o_i$ )
- 3 Egy sorhoz/oszlophoz hozzáadjuk egy másik sor/oszlop számszorosát ( $s_i + \lambda s_j$ ,  $o_i + \lambda o_j$ )

# Sor-és oszlopműveletek – áttekintés

**Emlék:** Sor-és oszlopműveletek

- 1 Két sor/oszlop felcserélése ( $s_i \leftrightarrow s_j$ ,  $o_i \leftrightarrow o_j$ )
- 2 Sor/Oszlop szorzása nem 0 számmal ( $\lambda s_i$ ,  $\lambda o_i$ )
- 3 Egy sorhoz/oszlophoz hozzáadjuk egy másik sor/oszlop számszorosát ( $s_i + \lambda s_j$ ,  $o_i + \lambda o_j$ )

Nézzük meg, hogy az egyes sor-és oszlopműveleteket milyen esetekben szabad, vagy nem szabad alkalmaznunk:

# Sor-és oszlopműveletek – áttekintés

**Emlék:** Sor-és oszlopműveletek

- 1 Két sor/oszlop felcserélése ( $s_i \leftrightarrow s_j$ ,  $o_i \leftrightarrow o_j$ )
- 2 Sor/Oszlop szorzása nem 0 számmal ( $\lambda s_i$ ,  $\lambda o_i$ )
- 3 Egy sorhoz/oszlophoz hozzáadjuk egy másik sor/oszlop számszorosát ( $s_i + \lambda s_j$ ,  $o_i + \lambda o_j$ )

Nézzük meg, hogy az egyes sor-és oszlopműveleteket milyen esetekben szabad, vagy nem szabad alkalmaznunk:

- egyenletrendszer megoldás: csak sorműveletek 1-3

# Sor-és oszlopműveletek – áttekintés

**Emlék:** Sor-és oszlopműveletek

- 1 Két sor/oszlop felcserélése ( $s_i \leftrightarrow s_j$ ,  $o_i \leftrightarrow o_j$ )
- 2 Sor/Oszlop szorzása nem 0 számmal ( $\lambda s_i$ ,  $\lambda o_i$ )
- 3 Egy sorhoz/oszlophoz hozzáadjuk egy másik sor/oszlop számszorosát ( $s_i + \lambda s_j$ ,  $o_i + \lambda o_j$ )

Nézzük meg, hogy az egyes sor-és oszlopműveleteket milyen esetekben szabad, vagy nem szabad alkalmaznunk:

- egyenletrendszer megoldás: csak sorműveletek 1-3
- inverz kiszámítás(eliminációval): csak sorművelet 1-3

# Sor-és oszlopműveletek – áttekintés

**Emlék:** Sor-és oszlopműveletek

- 1 Két sor/oszlop felcserélése ( $s_i \leftrightarrow s_j$ ,  $o_i \leftrightarrow o_j$ )
- 2 Sor/Oszlop szorzása nem 0 számmal ( $\lambda s_i$ ,  $\lambda o_i$ )
- 3 Egy sorhoz/oszlophoz hozzáadjuk egy másik sor/oszlop számszorosát ( $s_i + \lambda s_j$ ,  $o_i + \lambda o_j$ )

Nézzük meg, hogy az egyes sor-és oszlopműveleteket milyen esetekben szabad, vagy nem szabad alkalmaznunk:

- egyenletrendszer megoldás: csak sorműveletek 1-3
- inverz kiszámítás(eliminációval): csak sorművelet 1-3
- mátrix rangjának meghatározása: sor-és oszlopműveletek 1-3
- determináns kiszámítása: sor-és oszlopműveletek 3

# Sor-és oszlopműveletek – áttekintés

**Emlék:** Sor-és oszlopműveletek

- ① Két sor/oszlop felcserélése ( $s_i \leftrightarrow s_j$ ,  $o_i \leftrightarrow o_j$ )
- ② Sor/Oszlop szorzása nem 0 számmal ( $\lambda s_i$ ,  $\lambda o_i$ )
- ③ Egy sorhoz/oszlophoz hozzáadjuk egy másik sor/oszlop számszorosát ( $s_i + \lambda s_j$ ,  $o_i + \lambda o_j$ )

Nézzük meg, hogy az egyes sor-és oszlopműveleteket milyen esetekben szabad, vagy nem szabad alkalmaznunk:

- egyenletrendszer megoldás: csak sorműveletek 1-3
- inverz kiszámítás(eliminációval): csak sorművelet 1-3
- mátrix rangjának meghatározása: sor-és oszlopműveletek 1-3
- determináns kiszámítása: sor-és oszlopműveletek 3
  - ▶ sorcsere: a determináns  $(-1)$ -szeresére változik

# Sor-és oszlopműveletek – áttekintés

## Emlék: Sor-és oszlopműveletek

- ① Két sor/oszlop felcserélése ( $s_i \leftrightarrow s_j$ ,  $o_i \leftrightarrow o_j$ )
- ② Sor/Oszlop szorzása nem 0 számmal ( $\lambda s_i$ ,  $\lambda o_i$ )
- ③ Egy sorhoz/oszlophoz hozzáadjuk egy másik sor/oszlop számszorosát ( $s_i + \lambda s_j$ ,  $o_i + \lambda o_j$ )

Nézzük meg, hogy az egyes sor-és oszlopműveleteket milyen esetekben szabad, vagy nem szabad alkalmaznunk:

- egyenletrendszer megoldás: csak sorműveletek 1-3
- inverz kiszámítás(eliminációval): csak sorművelet 1-3
- mátrix rangjának meghatározása: sor-és oszlopműveletek 1-3
- determináns kiszámítása: sor-és oszlopműveletek 3
  - ▶ sorcsere: a determináns  $(-1)$ -szeresére változik
  - ▶ sor/oszlop osztásánál ki kell emelni az osztót