Függvénysorok

Matematika A2x

2020 ősz

Bevezetés

	$\mathbb{N} \mapsto \mathbb{R}$	$\mathbb{N} \mapsto (\mathbb{R} \mapsto \mathbb{R})$
Jelölés:	$n \mapsto a_n$	$n \mapsto f_n(x)$
Név:	sorozat ✓	függvénysorozat
Összegezve:	numerikus sor ✓	függvénysor

Bevezetés

	$\mathbb{N} \mapsto \mathbb{R}$	$\mathbb{N} \mapsto (\mathbb{R} \mapsto \mathbb{R})$
Jelölés:	$n \mapsto a_n$	$n \mapsto f_n(x)$
Név:	sorozat ✓	függvénysorozat
Összegezve:	numerikus sor ✓	függvénysor

A $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ numerikus sorban a számokat kicseréljük függvényekere: $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$.

Bevezetés

	$\mathbb{N} \mapsto \mathbb{R}$	$\mathbb{N} \mapsto (\mathbb{R} \mapsto \mathbb{R})$
Jelölés:	$n \mapsto a_n$	$n \mapsto f_n(x)$
Név:	sorozat ✓	függvénysorozat
Összegezve:	numerikus sor ✓	függvénysor

A $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ numerikus sorban a számokat kicseréljük függvényekere: $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$.
Ez az összeg biznyos x-re konvergens, bizonyos x-re nem az.

Definíció

Legyen $f_n(x)$ függvények egy sorozata, ekkor az $S_N(x) := \sum_{n=1}^{N} f_n(x)$ *függvényt részletösszeg-függvénynek nevezzük.*

Bevezetés

	$\mathbb{N} \mapsto \mathbb{R}$	$\mathbb{N} \mapsto (\mathbb{R} \mapsto \mathbb{R})$
Jelölés:	$n \mapsto a_n$	$n \mapsto f_n(x)$
Név:	sorozat ✓	függvénysorozat
Összegezve:	numerikus sor ✓	függvénysor

A $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ numerikus sorban a számokat kicseréljük függvényekere: $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$.
Ez az összeg biznyos x-re konvergens, bizonyos x-re nem az.

Definíció

Legyen $f_n(x)$ függvények egy sorozata, ekkor az $S_N(x) := \sum_{n=1}^{N} f_n(x)$ függvényt részletösszeg-függvénynek nevezzük. Az $f_n(x)$ függvénysorozathoz tartozó függvénysornak nevezzük a $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ összeget.

Konvergenciatartomány

Definíció

A $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ *függvénysor konvergenciatartománya azon* $x \in \mathbb{R}$*-ek halmaza, melyre* $S_N(x)$ *sorozat konvergens és* $F(x) := \lim_{N\to\infty} S_N$ *határérték lesz a sor összegfüggvénye.*

Konvergenciatartomány

Definíció

A $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ *függvénysor* *konvergenciatartománya azon* $x \in \mathbb{R}$*-ek halmaza, melyre* $S_N(x)$ *sorozat konvergens és* $F(x) := \lim_{N\to\infty} S_N$ *határérték lesz a sor összegfüggvénye.*

1. példa Vizsgáljuk meg az $f_n(x) = x^n$ függvénysorozat részletösszeg--függvényét és a konvergenciatartományát.

Konvergenciatartomány

Definíció

A $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ *függvénysor konvergenciatartománya azon* $x \in \mathbb{R}$*-ek halmaza, melyre* $S_N(x)$ *sorozat konvergens és* $F(x) := \lim_{N\to\infty} S_N$ *határérték lesz a sor összegfüggvénye.*

1. példa Vizsgáljuk meg az $f_n(x) = x^n$ függvénysorozat részletösszeg--függvényét és a konvergenciatartományát.

Rögzített x-re ez egy mértani sor x kvócienssel, ezért

$S_N(x) = \sum_{n=1}^{N} x^n = x\dfrac{1-x^N}{1-x}$, ami $|x| < 1$ esetén konvergens, ha $N \to \infty$.

Konvergenciatartomány

Definíció

A $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ *függvénysor konvergenciatartománya azon* $x \in \mathbb{R}$*-ek halmaza, melyre* $S_N(x)$ *sorozat konvergens és* $F(x) := \lim_{N\to\infty} S_N$ *határérték lesz a sor összegfüggvénye.*

1. példa Vizsgáljuk meg az $f_n(x) = x^n$ függvénysorozat részletösszeg--függvényét és a konvergenciatartományát.
Rögzített x-re ez egy mértani sor x kvócienssel, ezért
$S_N(x) = \sum_{n=1}^{N} x^n = x\frac{1-x^N}{1-x}$, ami $|x| < 1$ esetén konvergens, ha $N \to \infty$.
Ekkor viszont $\lim_{N\to\infty} S_N = \frac{x}{1-x}$ lesz a $\sum_{n=1}^{\infty} x^n$ függvénysor összegfüggvénye és $I = (-1, 1)$ lesz a konvergenciatartomány.

Hatványsorok

Definíció

A $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ *alakú függvénysorokat* **hatványsor***nak nevezzük. Az* x_0 *a hatványsor középpontja és* a_n *az együtthatósorozat.*

Hatványsorok

Definíció

A $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ *alakú függvénysorokat hatványsornak nevezzük. Az* x_0 *a hatványsor középpontja és* a_n *az együtthatósorozat.*

Kérdés: Milyen $x \in \mathbb{R}$ esetén lesz a hatványsor konvergens?

Hatványsorok

Definíció

A $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ *alakú függvénysorokat hatványsornak nevezzük. Az* x_0 *a hatványsor középpontja és* a_n *az együtthatósorozat.*

Kérdés: Milyen $x \in \mathbb{R}$ esetén lesz a hatványsor konvergens?
Ha x értékét lerögzítjük, akkor ez már egy numerikus sor, mert nincs benne változó és így alkalmazhatjuk rá a gyökkritériumot:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n(x-x_0)^n|} = |x-x_0| \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} < 1 \Leftrightarrow |x-x_0| < \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$$

Hatványsorok

Definíció

A $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ *alakú függvénysorokat* hatványsor*nak nevezzük. Az* x_0 *a hatványsor középpontja és* a_n *az együtthatósorozat.*

Kérdés: Milyen $x \in \mathbb{R}$ esetén lesz a hatványsor konvergens?
Ha x értékét lerögzítjük, akkor ez már egy numerikus sor, mert nincs benne változó és így alkalmazhatjuk rá a gyökkritériumot:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n(x-x_0)^n|} = |x-x_0| \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} < 1 \Leftrightarrow |x-x_0| < \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$$

Vagy akár a hányadoskritériumot:

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}(x-x_0)^{n+1}}{a_n(x-x_0)^n} \right| = |x-x_0| \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| < 1 \Leftrightarrow |x-x_0| < \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|$$

Cauchy-Hadamard-tétel

Tétel

A $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$ *hatványsor konvergenciasugara*

$$r = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}} = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| .$$

A hatványsor az $(x_0 - r, x_0 + r)$ *intervallumon konvergens, míg az* $[x_0 - r, x_0 + r]$ *intervallumon kívül divergens.*

Cauchy-Hadamard-tétel

Tétel

A $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ *hatványsor konvergenciasugara*

$$r = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}} = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|.$$

A hatványsor az $(x_0 - r, x_0 + r)$ *intervallumon konvergens, míg az* $[x_0 - r, x_0 + r]$ *intervallumon kívül divergens.*

Ha $r = 0$, akkor csak x_0-ban konvergens a hatványsor, ha $r = \infty$, akkor minden $x \in \mathbb{R}$-re konvergens.
A tétel következménye, hogy a hatványsor konvergenciatartománya egy intervallum, melynek középpontja x_0, hossza pedig $2r$. A végpontokban külön meg kell vizsgálni a konvergenciát a gyök-és hányadoskritériumokban lévő $q = 1$ esetén fellépő bizonytalanság miatt. Ez két numerikus sor vizsgálat, ahol már nem használható a fenti két kritérium.

Példa

2. példa Vizsgáljuk meg a $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-3)^n}{2^n n}$ sor konvergenciáját.

Példa

2. példa Vizsgáljuk meg a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-3)^n}{2^n n}$ sor konvergenciáját.

Leolvashtó a középpontja és együtthatósorozata: $x_0 = 3,\ a_n = \frac{1}{2^n n}$.

Példa

2. példa Vizsgáljuk meg a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-3)^n}{2^n n}$ sor konvergenciáját.

Leolvashtó a középpontja és együtthatósorozata: $x_0 = 3,\ a_n = \frac{1}{2^n n}$.

Első lépésként állapítsuk meg a konvergenciasugarat, melyhez használjuk a gyökkritériumot: $r = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{a_n}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{\frac{1}{2^n n}}} = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{2^n n} = \lim\limits_{n\to\infty} 2\sqrt[n]{n} = 2.$

Példa

2. példa Vizsgáljuk meg a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-3)^n}{2^n n}$ sor konvergenciáját.

Leolvashtó a középpontja és együtthatósorozata: $x_0 = 3,\ a_n = \frac{1}{2^n n}$.

Első lépésként állapítsuk meg a konvergenciasugarat, melyhez használjuk a gyökkritériumot: $r = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{a_n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{\frac{1}{2^n n}}} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{2^n n} = \lim_{n\to\infty} 2\sqrt[n]{n} = 2.$

A Cauchy-Hadamard-tétel miatt $(3-2, 3+2) = (1, 5)$ intervallumon belül konvergens, míg az $[1, 5]$ intervallumon kívül divergens.

Példa

2. példa Vizsgáljuk meg a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-3)^n}{2^n n}$ sor konvergenciáját.

Leolvashtó a középpontja és együtthatósorozata: $x_0 = 3,\ a_n = \frac{1}{2^n n}$.

Első lépésként állapítsuk meg a konvergenciasugarat, melyhez használjuk a gyökkritériumot: $r = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{a_n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{\frac{1}{2^n n}}} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{2^n n} = \lim_{n\to\infty} 2\sqrt[n]{n} = 2.$

A Cauchy-Hadamard-tétel miatt $(3-2, 3+2) = (1, 5)$ intervallumon belül konvergens, míg az $[1, 5]$ intervallumon kívül divergens. Ha

$x = 1$, akkor $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1-3)^n}{2^n n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^n}{2^n n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$, ami Leibniz típusú, tehát véges, így az 1 benne van a konvergenciatartományban.

Példa

2. példa Vizsgáljuk meg a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-3)^n}{2^n n}$ sor konvergenciáját.

Leolvashtó a középpontja és együtthatósorozata: $x_0 = 3,\ a_n = \frac{1}{2^n n}$.

Első lépésként állapítsuk meg a konvergenciasugarat, melyhez használjuk a gyökkritériumot: $r = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{a_n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{\frac{1}{2^n n}}} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{2^n n} = \lim_{n\to\infty} 2\sqrt[n]{n} = 2.$

A Cauchy-Hadamard-tétel miatt $(3-2, 3+2) = (1, 5)$ intervallumon belül konvergens, míg az $[1, 5]$ intervallumon kívül divergens. Ha

$x = 1$, akkor $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1-3)^n}{2^n n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^n}{2^n n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$, ami Leibniz típusú, tehát véges, így az 1 benne van a konvergenciatartományban.

$x = 5$, akkor $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(5-3)^n}{2^n n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{2^n n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ harmonikus sor, ami divergens, így az 5 nincs benne a konvergenciatartományban.

Példa

2. példa Vizsgáljuk meg a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-3)^n}{2^n n}$ sor konvergenciáját.

Leolvashtó a középpontja és együtthatósorozata: $x_0 = 3, \; a_n = \frac{1}{2^n n}$.

Első lépésként állapítsuk meg a konvergenciasugarat, melyhez használjuk a gyökkritériumot: $r = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{a_n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{\frac{1}{2^n n}}} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{2^n n} = \lim_{n\to\infty} 2\sqrt[n]{n} = 2.$

A Cauchy-Hadamard-tétel miatt $(3-2, 3+2) = (1,5)$ intervallumon belül konvergens, míg az $[1,5]$ intervallumon kívül divergens. Ha

$x = 1$, akkor $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1-3)^n}{2^n n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^n}{2^n n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$, ami Leibniz típusú, tehát véges, így az 1 benne van a konvergenciatartományban.

$x = 5$, akkor $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(5-3)^n}{2^n n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{2^n n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ harmonikus sor, ami divergens, így az 5 nincs benne a konvergenciatartományban.

Tehát a fenti sor konvergens, ha $x \in [1,5)$.

Példa

3. példa Vizsgáljuk meg a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3x)^n}{n^2}$ sor konvergenciáját.

Példa

3. példa Vizsgáljuk meg a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3x)^n}{n^2}$ sor konvergenciáját.

A $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3x)^n}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n^2} x^n$ átalakítás után látszik, hogy $a_n = \frac{3^n}{n^2}$ és $x_0 = 0$.

Példa

3. példa Vizsgáljuk meg a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3x)^n}{n^2}$ sor konvergenciáját.

A $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3x)^n}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n^2} x^n$ átalakítás után látszik, hogy $a_n = \frac{3^n}{n^2}$ és $x_0 = 0$.

Ezúttal alkalmazzuk a hányadostesztet:

$$r = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{3^n}{n^2}}{\frac{3^{n+1}}{(n+1)^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{3^n(n+1)^2}{3\cdot 3^n n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2+2n+1}{3n^2} = \frac{1}{3}$$

Példa

3. példa Vizsgáljuk meg a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3x)^n}{n^2}$ sor konvergenciáját.

A $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3x)^n}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n^2} x^n$ átalakítás után látszik, hogy $a_n = \frac{3^n}{n^2}$ és $x_0 = 0$.

Ezúttal alkalmazzuk a hányadostesztet:

$$r = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{3^n}{n^2}}{\frac{3^{n+1}}{(n+1)^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{3^n(n+1)^2}{3\cdot 3^n n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2+2n+1}{3n^2} = \frac{1}{3}$$

A Cauchy-Hadamard-tétel miatt $\left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$ intervallumon belül konvergens, míg az $\left[-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right]$ intervallumon kívül divergens.

Példa

3. példa Vizsgáljuk meg a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3x)^n}{n^2}$ sor konvergenciáját.

A $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3x)^n}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n^2} x^n$ átalakítás után látszik, hogy $a_n = \frac{3^n}{n^2}$ és $x_0 = 0$.

Ezúttal alkalmazzuk a hányadostesztet:

$$r = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{3^n}{n^2}}{\frac{3^{n+1}}{(n+1)^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{3^n (n+1)^2}{3 \cdot 3^n n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2+2n+1}{3n^2} = \frac{1}{3}$$

A Cauchy-Hadamard-tétel miatt $\left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$ intervallumon belül konvergens, míg az $\left[-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right]$ intervallumon kívül divergens.

Ha $x = \pm\frac{1}{3}$, akkor $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n^2} \left(\pm\frac{1}{3}\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\pm 1)^n}{n^2}$, de ez a sor abszolút konvergens, így a $\pm\frac{1}{3}$ benne van a konvergenciatartományban.

Példa

3. példa Vizsgáljuk meg a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3x)^n}{n^2}$ sor konvergenciáját.

A $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3x)^n}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n^2} x^n$ átalakítás után látszik, hogy $a_n = \frac{3^n}{n^2}$ és $x_0 = 0$.

Ezúttal alkalmazzuk a hányadostesztet:

$$r = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{3^n}{n^2}}{\frac{3^{n+1}}{(n+1)^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{3^n(n+1)^2}{3\cdot 3^n n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2+2n+1}{3n^2} = \frac{1}{3}$$

A Cauchy-Hadamard-tétel miatt $\left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$ intervallumon belül konvergens, míg az $\left[-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right]$ intervallumon kívül divergens.

Ha $x = \pm\frac{1}{3}$, akkor $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n^2} \left(\pm\frac{1}{3}\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\pm 1)^n}{n^2}$, de ez a sor abszolút konvergens, így a $\pm\frac{1}{3}$ benne van a konvergenciatartományban.

Tehát a fenti sor konvergens, ha $x \in \left[-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right]$.

Példa

4. példa Vizsgáljuk meg a $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(6-2x)^n}{n!}$ sor konvergenciáját.

Példa

4. példa Vizsgáljuk meg a $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(6-2x)^n}{n!}$ sor konvergenciáját.

A $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(6-2x)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-2)^n}{n!}(x-3)^n$ átalakítás után látszik, hogy $a_n = \frac{(-2)^n}{n!}$ és $x_0 = 3$.

Példa

4. példa Vizsgáljuk meg a $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(6-2x)^n}{n!}$ sor konvergenciáját.

A $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(6-2x)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-2)^n}{n!}(x-3)^n$ átalakítás után látszik, hogy $a_n = \frac{(-2)^n}{n!}$ és $x_0 = 3$.

Ezúttal alkalmazzuk a hányadostesztet:

$$r = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{(-2)^n}{n!}}{\frac{(-2)^{n+1}}{(n+1)!}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(-2)^n(n+1)n!}{(-2)(-2)^n n!}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{n+1}{-2}\right| = \infty$$

Példa

4. példa Vizsgáljuk meg a $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(6-2x)^n}{n!}$ sor konvergenciáját.

A $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(6-2x)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-2)^n}{n!}(x-3)^n$ átalakítás után látszik, hogy $a_n = \frac{(-2)^n}{n!}$ és $x_0 = 3$.

Ezúttal alkalmazzuk a hányadostesztet:

$$r = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{(-2)^n}{n!}}{\frac{(-2)^{n+1}}{(n+1)!}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(-2)^n(n+1)n!}{(-2)(-2)^n n!}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{n+1}{-2}\right| = \infty$$

Mivel a konvergenciasugár végtelen, ezért ez a hatványsor minden $x \in \mathbb{R}$ esetén konvergens.

Hatványsor deriválása és integrálása

Tétel

Az $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ *hatványsor konvergenciatartományának belsejében a tagonkénti deriválásával kapott* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n n (x - x_0)^{n-1}$ *hatványsor is konvergens ugyanazon az intervallumon és* $f'(x)$*-el egyezik meg.*

Hatványsor deriválása és integrálása

Tétel

Az $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$ *hatványsor konvergenciatartományának belsejében a tagonkénti deriválásával kapott* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n n(x - x_0)^{n-1}$ *hatványsor is konvergens ugyanazon az intervallumon és* $f'(x)$*-el egyezik meg.*

Tétel

Az $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$ *hatványsor konvergenciatartományának bármely belső* $[a, b]$ *intervallumában tagonként integrálható, azaz*

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_a^b a_n(x - x_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1}\left[(x - x_0)^{n+1}\right]_a^b.$$

Függvényből hatványsor

Kérdés: Hogyan számol a számológép (például) trigonometrikus függvényeket?

Függvényből hatványsor

Kérdés: Hogyan számol a számológép (például) trigonometrikus függvényeket?
Válasz: Nem pontosan számol, csak közelít, de hogyan csináljuk, ha csak alapműveletek vannak?

Függvényből hatványsor

Kérdés: Hogyan számol a számológép (például) trigonometrikus függvényeket?
Válasz: Nem pontosan számol, csak közelít, de hogyan csináljuk, ha csak alapműveletek vannak?
Cél: Megadott függvények felírása hatványsor alakban ($a_n =?$) úgy, hogy minden derivált megegyezzen a 0-ban.

$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots$	$f(0) = a_0$	$a_0 := f(0)$
$f'(x) = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + \dots$	$f'(0) = a_1$	$a_1 := f'(0)$
$f''(x) = 2a_2 + 6a_3x + \dots$	$f''(0) = 2a_2$	$a_2 := \frac{f''(0)}{2}$
$f'''(x) = 6a_3 + \dots$	$f'''(0) = 6a_3$	$a_3 := \frac{f'''(0)}{6}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$f^{(n)}(x) = \dots$	$f^{(n)}(0) = n!a_n$	$a_n := \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$

Maclaurin-sor, Taylor-sor

Definíció

Legyen az $f(x)$ függvény a 0 egy környezetében tetszőlegesen sokszor differenciálható, ekkor $f(x)$ Maclaurin-során a $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$ függvénysort értjük.

Maclaurin-sor, Taylor-sor

Definíció

Legyen az $f(x)$ függvény a 0 egy környezetében tetszőlegesen sokszor differenciálható, ekkor $f(x)$ Maclaurin-során a $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$ *függvénysort értjük.*

Előfordulhat, hogy a kitüntetett középpont nem a 0:

Definíció

Legyen az $f(x)$ függvény az x_0 egy környezetében tetszőlegesen sokszor differenciálható, ekkor $f(x)$ Taylor-során a $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n$ *függvénysort értjük.*

Maclaurin-sor, Taylor-sor

Definíció

Legyen az $f(x)$ függvény a 0 egy környezetében tetszőlegesen sokszor differenciálható, ekkor $f(x)$ Maclaurin-során a $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$ *függvénysort értjük.*

Előfordulhat, hogy a kitüntetett középpont nem a 0:

Definíció

Legyen az $f(x)$ függvény az x_0 egy környezetében tetszőlegesen sokszor differenciálható, ekkor $f(x)$ Taylor-során a $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n$ *függvénysort értjük.*

A Taylor-sor felírása után ellenőriznünk kell, hogy a hatványsor konvergens-e és előállítja-e a megadott függvényt.

Példa

5. példa Írjuk fel az $f(x) = e^x$ függvény Maclauren-sorát.

Példa

5. példa Írjuk fel az $f(x) = e^x$ függvény Maclauren-sorát.
Vizsgáljuk meg az első néhány deriváltat:

$$f(x) = e^x \qquad f(0) = 1$$

Példa

5. példa Írjuk fel az $f(x) = e^x$ függvény Maclauren-sorát.
Vizsgáljuk meg az első néhány deriváltat:

$$\begin{aligned} f(x) &= e^x & \qquad f(0) &= 1 \\ f'(x) &= e^x & \qquad f'(0) &= 1 \end{aligned}$$

Példa

5. példa Írjuk fel az $f(x) = e^x$ függvény Maclauren-sorát.
Vizsgáljuk meg az első néhány deriváltat:

$$\begin{array}{ll} f(x) = e^x & f(0) = 1 \\ f'(x) = e^x & f'(0) = 1 \\ f''(x) = e^x & f''(0) = 1 \\ \vdots & \vdots \end{array}$$

Példa

5. példa Írjuk fel az $f(x) = e^x$ függvény Maclauren-sorát.
Vizsgáljuk meg az első néhány deriváltat:

$$\begin{array}{ll} f(x) = e^x & f(0) = 1 \\ f'(x) = e^x & f'(0) = 1 \\ f''(x) = e^x & f''(0) = 1 \\ \vdots & \vdots \\ f^{(n)}(x) = e^x & f^{(n)}(0) = 1 \end{array}$$

Példa

5. példa Írjuk fel az $f(x) = e^x$ függvény Maclauren-sorát.
Vizsgáljuk meg az első néhány deriváltat:

$$\begin{array}{ll} f(x) = e^x & f(0) = 1 \\ f'(x) = e^x & f'(0) = 1 \\ f''(x) = e^x & f''(0) = 1 \\ \vdots & \vdots \\ f^{(n)}(x) = e^x & f^{(n)}(0) = 1 \end{array}$$

Ebből felírható, hogy a Maclauren-sor:

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \dots$$

Példa

5. példa Írjuk fel az $f(x) = e^x$ függvény Maclauren-sorát.
Vizsgáljuk meg az első néhány deriváltat:

$$\begin{array}{ll} f(x) = e^x & f(0) = 1 \\ f'(x) = e^x & f'(0) = 1 \\ f''(x) = e^x & f''(0) = 1 \\ \vdots & \vdots \\ f^{(n)}(x) = e^x & f^{(n)}(0) = 1 \end{array}$$

Ebből felírható, hogy a Maclauren-sor:

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \dots$$

Ennek a hatványsornak a konvergenciasugara végtelen, azaz minden $x \in \mathbb{R}$-re konvergens és elő is állítja a függvényt.

Példa

6. példa Írjuk fel az $f(x) = \sin x$ függvény Maclauren-sorát.

Példa

6. példa Írjuk fel az $f(x) = \sin x$ függvény Maclauren-sorát.
Vizsgáljuk meg az első néhány deriváltat:

$$f(x) = \sin x \qquad f(0) = 0$$

Példa

6. példa Írjuk fel az $f(x) = \sin x$ függvény Maclauren-sorát.
Vizsgáljuk meg az első néhány deriváltat:

$$\begin{aligned} f(x) &= \sin x & \qquad f(0) &= 0 \\ f'(x) &= \cos x & \qquad f'(0) &= 1 \end{aligned}$$

Példa

6. példa Írjuk fel az $f(x) = \sin x$ függvény Maclauren-sorát.
Vizsgáljuk meg az első néhány deriváltat:

$$\begin{array}{ll} f(x) = \sin x & f(0) = 0 \\ f'(x) = \cos x & f'(0) = 1 \\ f''(x) = -\sin x & f''(0) = 0 \end{array}$$

Példa

6. példa Írjuk fel az $f(x) = \sin x$ függvény Maclauren-sorát.
Vizsgáljuk meg az első néhány deriváltat:

$$\begin{array}{ll}
f(x) = \sin x & f(0) = 0 \\
f'(x) = \cos x & f'(0) = 1 \\
f''(x) = -\sin x & f''(0) = 0 \\
f'''(x) = -\cos x & f'''(0) = -1
\end{array}$$

Példa

6. példa Írjuk fel az $f(x) = \sin x$ függvény Maclauren-sorát.
Vizsgáljuk meg az első néhány deriváltat:

$$\begin{array}{ll}
f(x) = \sin x & f(0) = 0 \\
f'(x) = \cos x & f'(0) = 1 \\
f''(x) = -\sin x & f''(0) = 0 \\
f'''(x) = -\cos x & f'''(0) = -1 \\
f^{(4)}(x) = \sin x & f^{(4)}(0) = 0 \\
\vdots & \vdots
\end{array}$$

Példa

6. példa Írjuk fel az $f(x) = \sin x$ függvény Maclauren-sorát.
Vizsgáljuk meg az első néhány deriváltat:

$$\begin{array}{ll} f(x) = \sin x & f(0) = 0 \\ f'(x) = \cos x & f'(0) = 1 \\ f''(x) = -\sin x & f''(0) = 0 \\ f'''(x) = -\cos x & f'''(0) = -1 \\ f^{(4)}(x) = \sin x & f^{(4)}(0) = 0 \\ \vdots & \vdots \end{array}$$

Látható, hogy innentől kezdve periodikusan ismétlődnek a deriváltak és minden második 0, és ami nem 0, az ± 1 felváltva. Ebből felírható, hogy a Maclauren-sor:

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \dots$$

Példa

6. példa Írjuk fel az $f(x) = \sin x$ függvény Maclauren-sorát.
Vizsgáljuk meg az első néhány deriváltat:

$$\begin{array}{ll}
f(x) = \sin x & f(0) = 0 \\
f'(x) = \cos x & f'(0) = 1 \\
f''(x) = -\sin x & f''(0) = 0 \\
f'''(x) = -\cos x & f'''(0) = -1 \\
f^{(4)}(x) = \sin x & f^{(4)}(0) = 0 \\
\vdots & \vdots
\end{array}$$

Látható, hogy innentől kezdve periodikusan ismétlődnek a deriváltak és minden második 0, és ami nem 0, az ± 1 felváltva. Ebből felírható, hogy a Maclauren-sor:

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \dots$$

Ennek a hatványsornak a konvergenciasugara végtelen, azaz minden $x \in \mathbb{R}$-re konvergens és elő is állítja a függvényt.

Példa

7. példa Írjuk fel az $f(x) = \cos x$ függvény Maclauren-sorát.

Példa

7. példa Írjuk fel az $f(x) = \cos x$ függvény Maclauren-sorát.
Vizsgáljuk meg az első néhány deriváltat:

$$f(x) = \cos x \qquad f(0) = 1$$

Példa

7. példa Írjuk fel az $f(x) = \cos x$ függvény Maclauren-sorát.
Vizsgáljuk meg az első néhány deriváltat:

$$\begin{aligned} f(x) &= \cos x & \qquad f(0) &= 1 \\ f'(x) &= -\sin x & \qquad f'(0) &= 0 \end{aligned}$$

Példa

7. példa Írjuk fel az $f(x) = \cos x$ függvény Maclauren-sorát.
Vizsgáljuk meg az első néhány deriváltat:

$$\begin{array}{ll} f(x) = \cos x & f(0) = 1 \\ f'(x) = -\sin x & f'(0) = 0 \\ f''(x) = -\cos x & f''(0) = -1 \end{array}$$

Példa

7. példa Írjuk fel az $f(x) = \cos x$ függvény Maclauren-sorát.
Vizsgáljuk meg az első néhány deriváltat:

$$\begin{array}{ll} f(x) = \cos x & f(0) = 1 \\ f'(x) = -\sin x & f'(0) = 0 \\ f''(x) = -\cos x & f''(0) = -1 \\ f'''(x) = \sin x & f'''(0) = 0 \end{array}$$

Példa

7. példa Írjuk fel az $f(x) = \cos x$ függvény Maclauren-sorát.
Vizsgáljuk meg az első néhány deriváltat:

$$\begin{array}{ll}
f(x) = \cos x & f(0) = 1 \\
f'(x) = -\sin x & f'(0) = 0 \\
f''(x) = -\cos x & f''(0) = -1 \\
f'''(x) = \sin x & f'''(0) = 0 \\
f^{(4)}(x) = \cos x & f^{(4)}(0) = 1 \\
\vdots & \vdots
\end{array}$$

Példa

7. példa Írjuk fel az $f(x) = \cos x$ függvény Maclauren-sorát.
Vizsgáljuk meg az első néhány deriváltat:

$$\begin{array}{ll} f(x) = \cos x & f(0) = 1 \\ f'(x) = -\sin x & f'(0) = 0 \\ f''(x) = -\cos x & f''(0) = -1 \\ f'''(x) = \sin x & f'''(0) = 0 \\ f^{(4)}(x) = \cos x & f^{(4)}(0) = 1 \\ \vdots & \vdots \end{array}$$

Látható, hogy innentől kezdve periodikusan ismétlődnek a deriváltak és minden második 0, és ami nem 0, az ± 1 felváltva. Ebből felírható, hogy a Maclauren-sor:

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \dots$$

Példa

7. példa Írjuk fel az $f(x) = \cos x$ függvény Maclauren-sorát.
Vizsgáljuk meg az első néhány deriváltat:

$$\begin{array}{ll} f(x) = \cos x & f(0) = 1 \\ f'(x) = -\sin x & f'(0) = 0 \\ f''(x) = -\cos x & f''(0) = -1 \\ f'''(x) = \sin x & f'''(0) = 0 \\ f^{(4)}(x) = \cos x & f^{(4)}(0) = 1 \\ \vdots & \vdots \end{array}$$

Látható, hogy innentől kezdve periodikusan ismétlődnek a deriváltak és minden második 0, és ami nem 0, az ± 1 felváltva. Ebből felírható, hogy a Maclauren-sor:

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \ldots$$

Ennek a hatványsornak a konvergenciasugara végtelen, azaz minden $x \in \mathbb{R}$-re konvergens és elő is állítja a függvényt.

Alapfüggvények Maclauren-sora

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \ldots, \ \forall x \in \mathbb{R}$$

Alapfüggvények Maclauren-sora

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \dots, \ \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \dots, \ \forall x \in \mathbb{R}$$

Alapfüggvények Maclauren-sora

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \dots, \ \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \dots, \ \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \dots, \ \forall x \in \mathbb{R}$$

Alapfüggvények Maclauren-sora

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \dots,\ \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \dots,\ \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \dots,\ \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n,\ \forall x \in (-1, 1)$$

Taylor-és Maclauren-sorba fejtés

A megadott függvény adott pont körüli sorfejtéséhez az alábbi technikák használhatóak:

Deriválgatás: Csak az alapfüggvényekre használtuk, innentől NEM lesz rá szükség, NE HASZNÁLJUK!

Taylor-és Maclauren-sorba fejtés

A megadott függvény adott pont körüli sorfejtéséhez az alábbi technikák használhatóak:

Deriválgatás: Csak az alapfüggvényekre használtuk, innentől NEM lesz rá szükség, NE HASZNÁLJUK!

Átalakítás: Algebrai átalakításokkal, változók helyettesítésével visszavezetjük a megadott fügvényt valamilyen ismert alapfüggvényre.

Taylor-és Maclauren-sorba fejtés

A megadott függvény adott pont körüli sorfejtéséhez az alábbi technikák használhatóak:

Deriválgatás: Csak az alapfüggvényekre használtuk, innentől NEM lesz rá szükség, NE HASZNÁLJUK!

Átalakítás: Algebrai átalakításokkal, változók helyettesítésével visszavezetjük a megadott fügvényt valamilyen ismert alapfüggvényre.

Deriválás, integrálás: A megadott függvény deriváltja/integrálja valamilyen alapfüggvény, vagy arra algebrailag visszavezethető függvény, majd sorbafejtés után visszaintegráljuk/deriváljuk.

Taylor-és Maclauren-sorba fejtés

A megadott függvény adott pont körüli sorfejtéséhez az alábbi technikák használhatóak:

- Deriválgatás: Csak az alapfüggvényekre használtuk, innentől NEM lesz rá szükség, NE HASZNÁLJUK!
- Átalakítás: Algebrai átalakításokkal, változók helyettesítésével visszavezetjük a megadott fügvényt valamilyen ismert alapfüggvényre.
- Deriválás, integrálás: A megadott függvény deriváltja/integrálja valamilyen alapfüggvény, vagy arra algebrailag visszavezethető függvény, majd sorbafejtés után visszaintegráljuk/deriváljuk.

Minden sorfejtéshez hozzá tartozik a konvergenciaintervallum megállapítása is, melyet az alapfüggvény konvergenciaintervallumából vezetünk le.

Példák

8. példa Fejtsük sorba az alábbi függvényeket a 0 körül:

a) $e^{3x} =$

Példák

8. példa Fejtsük sorba az alábbi függvényeket a 0 körül:

a) $e^{3x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(3x)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{n!} x^n$, $3x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}$

b) $xe^{-2x} =$

Példák

8. példa Fejtsük sorba az alábbi függvényeket a 0 körül:

a) $e^{3x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(3x)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{n!} x^n$, $3x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}$

b) $xe^{-2x} = x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-2x)^n}{n!} = x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-2)^n}{n!} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-2)^n}{n!} x^{n+1}$, $x \in \mathbb{R}$

c) $\cos(x^2) =$

Példák

8. példa Fejtsük sorba az alábbi függvényeket a 0 körül:

a) $e^{3x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(3x)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{n!} x^n$, $3x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}$

b) $xe^{-2x} = x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-2x)^n}{n!} = x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-2)^n}{n!} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-2)^n}{n!} x^{n+1}$, $x \in \mathbb{R}$

c) $\cos(x^2) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} (x^2)^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{4n}$, $x^2 \in \mathbb{R} \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}$

d) $\frac{\sin(5x)}{x} =$

Példák

8. példa Fejtsük sorba az alábbi függvényeket a 0 körül:

a) $e^{3x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(3x)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{n!} x^n$, $3x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}$

b) $xe^{-2x} = x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-2x)^n}{n!} = x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-2)^n}{n!} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-2)^n}{n!} x^{n+1}$, $x \in \mathbb{R}$

c) $\cos(x^2) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} (x^2)^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{4n}$, $x^2 \in \mathbb{R} \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}$

d) $\frac{\sin(5x)}{x} = \frac{1}{x} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} (5x)^{2n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n\, 5^{2n+1}}{(2n+1)!} x^{2n}$, $x \in \mathbb{R}$

e) $\frac{x^2}{4+x} =$

Példák

8. példa Fejtsük sorba az alábbi függvényeket a 0 körül:

a) $e^{3x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(3x)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{n!} x^n$, $3x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}$

b) $xe^{-2x} = x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-2x)^n}{n!} = x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-2)^n}{n!} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-2)^n}{n!} x^{n+1}$, $x \in \mathbb{R}$

c) $\cos(x^2) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} (x^2)^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{4n}$, $x^2 \in \mathbb{R} \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}$

d) $\frac{\sin(5x)}{x} = \frac{1}{x} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} (5x)^{2n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \, 5^{2n+1}}{(2n+1)!} x^{2n}$, $x \in \mathbb{R}$

e) $\frac{x^2}{4+x} = \frac{x^2}{4} \frac{1}{1+\frac{x}{4}} = \frac{x^2}{4} \frac{1}{1-\left(-\frac{x}{4}\right)} = \frac{x^2}{4} \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{x}{4}\right)^n =$

$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4^{n+1}} x^{n+2}$, ha $\left|-\frac{x}{4}\right| < 1 \Leftrightarrow |x| < 4$, azaz $x \in (-4, 4)$.

Példa

9. példa Fejtsük sorba az $f(x) = \ln(1 + x)$ függvényt a 0 körül:

Példa

9. példa Fejtsük sorba az $f(x) = \ln(1+x)$ függvényt a 0 körül:
A sorfejtéshez a derivált függvényt fogjuk használni:

$$f(x) = \ln(1+x) \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{1+x}$$

$$\frac{1}{1+x} = \frac{1}{1-(-x)} = \sum_{n=0}^{\infty}(-x)^n = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n \Rightarrow$$

$$\int f'(x)dx = f(x) + c = \int \left(\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n\right) dx = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\int (-1)^n x^n dx\right) =$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1}, \text{ ha } |-x| < 1 \Leftrightarrow x \in (-1,1) \text{ és } c = -f(0) = 0$$

Igazából $x = 1$-re visszakapjuk a $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}$ sort, ami Lebiniz-sor, tehát konvergens, ezért a fenti sor konvergens, ha $x \in (-1,1]$. Ekkor $x = 1$-re:

$$\ln(1+1) = \ln(2) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$$

Példa

10. példa Fejtsük sorba az $f(x) = \arctan(x)$ függvényt a 0 körül:

Példa

10. példa Fejtsük sorba az $f(x) = \arctan(x)$ függvényt a 0 körül:
A sorfejtéshez a derivált függvényt fogjuk használni:

$$f(x) = \arctan(x) \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

$$\frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{1-(-x^2)} = \sum_{n=0}^{\infty}(-x^2)^n = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n} \Rightarrow$$

$$\int f'(x)dx = f(x) + c = \int \left(\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}\right) dx = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\int (-1)^n x^{2n} dx\right) =$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}, \text{ ha } |-x^2| < 1 \Leftrightarrow x \in (-1,1) \text{ és } c = -f(0) = 0$$

Igazából $x = 1$-re visszakapjuk a $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}$ sort, ami Leibniz-sor, tehát konvergens, ezért a fenti sor konvergens, ha $x \in (-1,1]$. Ekkor $x = 1$-re:

$$\arctan(1) = \frac{\pi}{4} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots$$

Közeltések hatványsorok segítségével

Feladat: Közelítsük meg alkalmas hatványsor segítségével az $\ln 2$-öt.

Közeltések hatványsorok segítségével

Feladat: Közelítsük meg alkalmas hatványsor segítségével az $\ln 2$-öt.
Ehhez az $f(x) = \ln(1+x)$ függvény $x_0 = 0$ körüli sorfejtését használjuk az $x = 1$ helyen:

Közeltések hatványsorok segítségével

Feladat: Közelítsük meg alkalmas hatványsor segítségével az $\ln 2$-öt. Ehhez az $f(x) = \ln(1+x)$ függvény $x_0 = 0$ körüli sorfejtését használjuk az $x = 1$ helyen:

$$\ln(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} x^{n+1} \Rightarrow \ln(1+1) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}$$

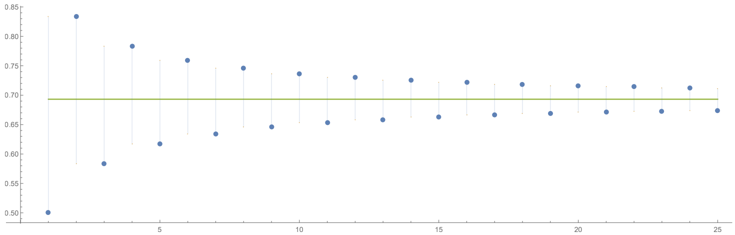
Ennek a sorfejtésnek a konvergenciaintervallumában benne van az 1.

Közeltések hatványsorok segítségével

Feladat: Közelítsük meg alkalmas hatványsor segítségével az $\ln 2$-öt. Ehhez az $f(x) = \ln(1+x)$ függvény $x_0 = 0$ körüli sorfejtését használjuk az $x = 1$ helyen:

$$\ln(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} x^{n+1} \Rightarrow \ln(1+1) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}$$

Ennek a sorfejtésnek a konvergenciaintervallumában benne van az 1.



Közelítés Leibniz-sorokra

Tétel

Ha $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = A$ *és* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *Leibniz-sor, akkor* $\left|\sum_{n=0}^{N} a_n - A\right| < |a_{N+1}|$.

Közelítés Leibniz-sorokra

Tétel

Ha $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = A$ *és* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *Leibniz-sor, akkor* $\left|\sum_{n=0}^{N} a_n - A\right| < |a_{N+1}|$.

Tehát a közelítés hibáját mindig az összegezendő sorozat következő elemével lehet felülről becsülni.

Tehát az $\ln 2$ esetében a hiba: $\epsilon = \left|\sum_{n=0}^{N} \frac{(-1)^n}{n+1} - \ln 2\right| < \left|\frac{(-1)^{N+1}}{N+2}\right| = \frac{1}{N+2}$,

ami egy elég lassú konvergencia, de a sor konvergenciaintervallumának legszélén vagyunk, ezért ez nem is olyan meglepő.

Közelítés Leibniz-sorokra

Tétel

Ha $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = A$ *és* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *Leibniz-sor, akkor* $\left|\sum_{n=0}^{N} a_n - A\right| < |a_{N+1}|$.

Tehát a közelítés hibáját mindig az összegezendő sorozat következő elemével lehet felülről becsülni.

Tehát az $\ln 2$ esetében a hiba: $\epsilon = \left|\sum_{n=0}^{N} \frac{(-1)^n}{n+1} - \ln 2\right| < \left|\frac{(-1)^{N+1}}{N+2}\right| = \frac{1}{N+2}$,

ami egy elég lassú konvergencia, de a sor konvergenciaintervallumának legszélén vagyunk, ezért ez nem is olyan meglepő.

Kérdés: Hány tagig kell elmennünk, hogy az $\ln 2$ értékét két tizedesjegy pontossággal megközelítsük?

Közelítés Leibniz-sorokra

Tétel

Ha $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = A$ *és* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *Leibniz-sor, akkor* $\left|\sum_{n=0}^{N} a_n - A\right| < |a_{N+1}|$.

Tehát a közelítés hibáját mindig az összegezendő sorozat következő elemével lehet felülről becsülni.

Tehát az $\ln 2$ esetében a hiba: $\epsilon = \left|\sum_{n=0}^{N} \frac{(-1)^n}{n+1} - \ln 2\right| < \left|\frac{(-1)^{N+1}}{N+2}\right| = \frac{1}{N+2}$,

ami egy elég lassú konvergencia, de a sor konvergenciaintervallumának legszélén vagyunk, ezért ez nem is olyan meglepő.

Kérdés: Hány tagig kell elmennünk, hogy az $\ln 2$ értékét két tizedesjegy pontossággal megközelítsük?

Válasz: Ha a valódi hiba (ϵ) felső becslése $\left(\frac{1}{N+2}\right)$ is eleget tesz a fenti feltételnek, akkor a valódi hiba is. A két tizedesjegy pontosság azt jelenti, hogy $\epsilon < 10^{-2}$, amiből $\frac{1}{N+2} < 10^{-2} \Leftrightarrow N + 2 > 10 \Leftrightarrow N > 98$.

Taylor-tétel

Kérdés: Mi a helyzet, ha nem tudunk Leibniz-sorra hivatkozni egy adott fügvény adott értékének közelítésénél?

Taylor-tétel

Kérdés: Mi a helyzet, ha nem tudunk Leibniz-sorra hivatkozni egy adott fügvény adott értékének közelítésénél?

Definíció

Legyen az $f(x)$ függvény az x_0 egy környezetében legalább N-szer differenciálható, ekkor $f(x)$ N-edfokú Taylor-polinomján a

$$T_{f,x_0}^{N}(x) = \sum_{n=0}^{N} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$ *polinomot értjük.*

Taylor-tétel

Kérdés: Mi a helyzet, ha nem tudunk Leibniz-sorra hivatkozni egy adott fügvény adott értékének közelítésénél?

Definíció

Legyen az $f(x)$ függvény az x_0 egy környezetében legalább N-szer differenciálható, ekkor $f(x)$ N-edfokú Taylor-polinomján a

$$T_{f,x_0}^N(x) = \sum_{n=0}^{N} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$ *polinomot értjük.*

Tétel

Legyen az $f(x)$ függvény az x_0 egy környezetében legalább $N+1$-szer differenciálható, ekkor

$$f(x) = \sum_{n=0}^{N} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + \frac{f^{(n+1)}(t)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1} = T_{f,x_0}^N(x) + L_{f,x_0}^N(t),$$

ahol $t \in (x_0, x)$ és $L_{f,x_0}^N(t)$ az úgynevezett Lagrange-féle maradéktag.

Közelítés Taylor-polinommal

Az előző tétel értelmében tehát egy adott szám közelítéséhez használhatjuk a Taylor-polinomot és a hiba felülről becsülhető a Lagrange-féle maradéktaggal.

Közelítés Taylor-polinommal

Az előző tétel értelmében tehát egy adott szám közelítéséhez használhatjuk a Taylor-polinomot és a hiba felülről becsülhető a Lagrange-féle maradéktaggal.

11. példa Közelítsük e értékét 3 tizedesjegy pontossággal. ($e \approx 2.71828$)

Közelítés Taylor-polinommal

Az előző tétel értelmében tehát egy adott szám közelítéséhez használhatjuk a Taylor-polinomot és a hiba felülről becsülhető a Lagrange-féle maradéktaggal.

11. példa Közelítsük e értékét 3 tizedesjegy pontossággal. $(e \approx 2.71828)$

Használjuk az $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ 0-körüli Taylor sorból az első N tagot és helyettesítsük be az x helyére az 1-et, ekkor $e \approx \sum_{n=0}^{N} \frac{1}{n!}$ és a hiba

$\epsilon = \left| e - T^N_{e^x,0}(1) \right| = \left| L^N_{e^x,0}(t) \right|$, ahol $t \in (0,1)$. Becsüljük a hibát:

$$\left| L^N_{e^x,0}(t) \right| = \left| \frac{(e^x)^{(N)}(t)}{(N+1)!}(1-0)^{N+1} \right| = \frac{e^t}{(N+1)!} < \frac{e}{(N+1)!} < \frac{4}{(N+1)!} < 10^{-3}$$

ha $4000 < (N+1)!$, ami már $N = 6$-ra igaz ($7! = 5040$).

Tehát $e \approx 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \frac{1}{120} + \frac{1}{720} = \frac{1957}{720} = 2,71805$