Improprius integrál

Matematika A2x műszaki menedzser

2020 ősz

Emlékeztető

Definíció (Riemann-integrál)

Az $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ *függvény* *Riemann szerint integrálható* *az* $[a, b]$*-on, ha minden olyan felosztássorozatra, melynek finomsága 0-hoz tart, az alsó-és felső integrál közelítőösszegek határértéke létezik, véges és egyenlő.*

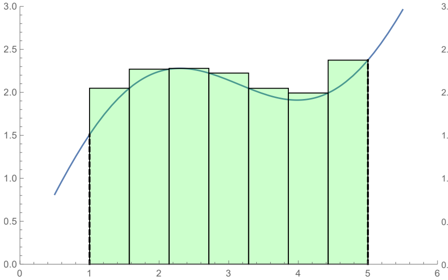
Jelölés: $\int_a^b f(x)\,dx$

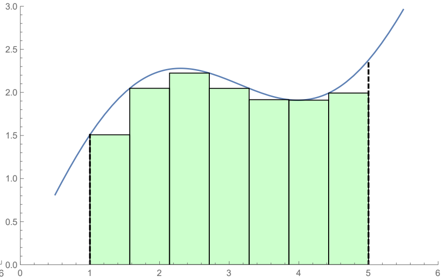
Emlékeztető

Definíció (Riemann-integrál)

Az $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ függvény Riemann szerint integrálható *az $[a, b]$-on, ha minden olyan felosztássorozatra, melynek finomsága 0-hoz tart, az alsó-és felső integrál közelítőösszegek határértéke létezik, véges és egyenlő.*

Jelölés: $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$



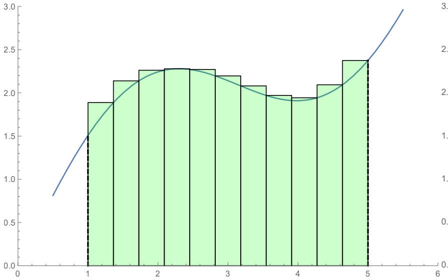


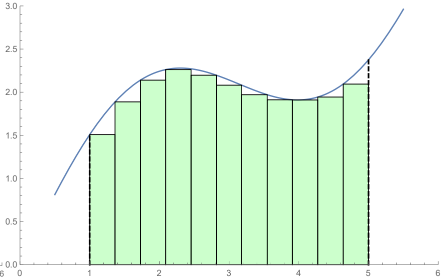
Emlékeztető

Definíció (Riemann-integrál)

Az $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ függvény Riemann szerint integrálható az $[a, b]$-on, ha minden olyan felosztássorozatra, melynek finomsága 0-hoz tart, az alsó-és felső integrál közelítőösszegek határértéke létezik, véges és egyenlő.

Jelölés: $\int_a^b f(x)\,dx$



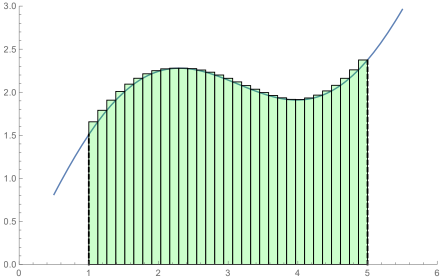


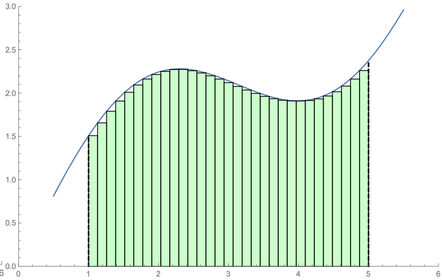
Emlékeztető

Definíció (Riemann-integrál)

Az $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ függvény Riemann szerint integrálható az $[a, b]$-on, ha minden olyan felosztássorozatra, melynek finomsága 0-hoz tart, az alsó-és felső integrál közelítőösszegek határértéke létezik, véges és egyenlő.

Jelölés: $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$





Interálhatóság

Tétel

Az f függvény pontosan akkor integrálható az $[a, b]$ zárt és korlátos intervallumon, ha korlátos és "majdnem mindenütt" folytonos (csak megszámlálhatóan sok pontban van neki szakadása).

Interálhatóság

Tétel

Az f függvény pontosan akkor integrálható az $[a, b]$ zárt és korlátos intervallumon, ha korlátos és "majdnem mindenütt" folytonos (csak megszámlálhatóan sok pontban van neki szakadása).

Kérdés: Mi van akkor, ha a függvény nem teljesíti a fenti feltételek valamelyikét?

Interálhatóság

Tétel

Az f függvény pontosan akkor integrálható az $[a, b]$ zárt és korlátos intervallumon, ha korlátos és "majdnem mindenütt" folytonos (csak megszámlálhatóan sok pontban van neki szakadása).

Kérdés: Mi van akkor, ha a függvény nem teljesíti a fenti feltételek valamelyikét?

1. típus: Nem korlátos intervallumon integrálunk

Interálhatóság

Tétel

Az f függvény pontosan akkor integrálható az $[a, b]$ zárt és korlátos intervallumon, ha korlátos és "majdnem mindenütt" folytonos (csak megszámlálhatóan sok pontban van neki szakadása).

Kérdés: Mi van akkor, ha a függvény nem teljesíti a fenti feltételek valamelyikét?

1. típus: Nem korlátos intervallumon integrálunk
2. típus: Nem korlátos függvényt integrálunk

Interálhatóság

Tétel

Az f függvény pontosan akkor integrálható az $[a, b]$ zárt és korlátos intervallumon, ha korlátos és "majdnem mindenütt" folytonos (csak megszámlálhatóan sok pontban van neki szakadása).

Kérdés: Mi van akkor, ha a függvény nem teljesíti a fenti feltételek valamelyikét?

1. típus: Nem korlátos intervallumon integrálunk
2. típus: Nem korlátos függvényt integrálunk

A fenti típusokat összefoglaló nevén improrius integráloknak nevezzük.

1. típusú improprius integrál – nem korlátos intervallum

Kérdés: Mikor nem véges az integrálás intervalluma?

1. típusú improprius integrál – nem korlátos intervallum

Kérdés: Mikor nem véges az integrálás intervalluma?

(a) Ha a felső határ végtelen $\int_a^\infty f(x)\,dx$

1. típusú improprius integrál – nem korlátos intervallum

Kérdés: Mikor nem véges az integrálás intervalluma?

(a) Ha a felső határ végtelen $\int_a^{\infty} f(x)\,dx$

(b) Ha az alsó határ végtelen $\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx$

1. típusú improprius integrál – nem korlátos intervallum

Kérdés: Mikor nem véges az integrálás intervalluma?

(a) Ha a felső határ végtelen $\int_a^\infty f(x)\,dx$

(b) Ha az alsó határ végtelen $\int_{-\infty}^b f(x)\,dx$

(c) Ha mindkét határ végtelen $\int_{-\infty}^\infty f(x)\,dx$

1. típusú improprius integrál – nem korlátos intervallum

Kérdés: Mikor nem véges az integrálás intervalluma?

(a) Ha a felső határ végtelen $\int_a^{\infty} f(x)\,dx$

(b) Ha az alsó határ végtelen $\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx$

(c) Ha mindkét határ végtelen $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$

Kérdés: Hogyan lehet visszavezetni a már ismert valódi integrálra az 1. típusú imprópriusz integrált?

1. típusú improprius integrál – nem korlátos intervallum

Kérdés: Mikor nem véges az integrálás intervalluma?

(a) Ha a felső határ végtelen $\int_a^{\infty} f(x)\,dx$

(b) Ha az alsó határ végtelen $\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx$

(c) Ha mindkét határ végtelen $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$

Kérdés: Hogyan lehet visszavezetni a már ismert valódi integrálra az 1. típusú imprόprius integrált?

(a) $\int_a^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{b\to\infty} \int_a^{b} f(x)\,dx$

1. típusú improprius integrál – nem korlátos intervallum

Kérdés: Mikor nem véges az integrálás intervalluma?

(a) Ha a felső határ végtelen $\int_a^{\infty} f(x)\,dx$

(b) Ha az alsó határ végtelen $\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx$

(c) Ha mindkét határ végtelen $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$

Kérdés: Hogyan lehet visszavezetni a már ismert valódi integrálra az 1. típusú imprópriús integrált?

(a) $\int_a^{\infty} f(x)\,dx = \lim\limits_{b\to\infty} \int_a^{b} f(x)\,dx$

(b) $\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx = \lim\limits_{a\to-\infty} \int_a^{b} f(x)\,dx$

1. típusú improprius integrál – nem korlátos intervallum

Kérdés: Mikor nem véges az integrálás intervalluma?

(a) Ha a felső határ végtelen $\int_a^{\infty} f(x)\,dx$

(b) Ha az alsó határ végtelen $\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx$

(c) Ha mindkét határ végtelen $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$

Kérdés: Hogyan lehet visszavezetni a már ismert valódi integrálra az 1. típusú impróprius integrált?

(a) $\int_a^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{b\to\infty} \int_a^{b} f(x)\,dx$

(b) $\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx = \lim_{a\to-\infty} \int_a^{b} f(x)\,dx$

(c) $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)\,dx + \int_c^{\infty} f(x)\,dx$

1. típusú improprius integrál – nem korlátos intervallum

Definíció

Legyen f *integrálható minden* $N > a$ *esetén az* $[a, N]$*-n. Ha a* $\lim\limits_{N\to\infty} \int_a^N f(x)\,dx$ *határérték létezik és véges, akkor az* f *függvény impropius integrálja létezik, és* $\int_a^\infty f(x)\,dx = \lim\limits_{N\to\infty} \int_a^N f(x)\,dx$.

1. típusú improprius integrál – nem korlátos intervallum

Definíció

Legyen f integrálható minden $N > a$ esetén az $[a, N]$-n. Ha a $\lim_{N\to\infty} \int_a^N f(x)\,dx$ határérték létezik és véges, akkor az f függvény impropius integrálja létezik, és $\int_a^\infty f(x)\,dx = \lim_{N\to\infty} \int_a^N f(x)\,dx.$

Definíció

Legyen f integrálható minden $N < b$ esetén az $[N, b]$-n. Ha a $\lim_{N\to-\infty} \int_N^b f(x)\,dx$ határérték létezik és véges, akkor az f függvény impropius integrálja létezik, és $\int_{-\infty}^b f(x)\,dx = \lim_{N\to-\infty} \int_N^b f(x)\,dx.$

Példa

1. példa Számítsuk ki az alábbi integrál értékét, ha létezik: $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2}\,dx$

Példa

1. példa Számítsuk ki az alábbi integrál értékét, ha létezik: $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,dx$

A definíció szerint:

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{N\to\infty} \int_1^N x^{-2}\,dx =$$

Példa

1. példa Számítsuk ki az alábbi integrál értékét, ha létezik: $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,dx$

A definíció szerint:

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{N\to\infty} \int_1^N x^{-2}\,dx = \lim_{N\to\infty} \left[\frac{x^{-1}}{-1}\right]_1^N =$$

Példa

1. példa Számítsuk ki az alábbi integrál értékét, ha létezik: $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,dx$

A definíció szerint:

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{N\to\infty}\int_1^N x^{-2}\,dx = \lim_{N\to\infty}\left[\frac{x^{-1}}{-1}\right]_1^N = \lim_{N\to\infty} 1-\frac{1}{N} = 1$$

Példa

1. példa Számítsuk ki az alábbi integrál értékét, ha létezik: $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2}\, dx$

A definíció szerint:

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2}\, dx = \lim_{N\to\infty} \int_1^{N} x^{-2}\, dx = \lim_{N\to\infty} \left[\frac{x^{-1}}{-1}\right]_1^N = \lim_{N\to\infty} 1 - \frac{1}{N} = 1$$

Tehát a fenti improprius integrál létezik és véges: $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2}\, dx = 1$

Példa

1. példa Számítsuk ki az alábbi integrál értékét, ha létezik: $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,dx$

A definíció szerint:

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{N\to\infty}\int_1^N x^{-2}\,dx = \lim_{N\to\infty}\left[\frac{x^{-1}}{-1}\right]_1^N = \lim_{N\to\infty} 1 - \frac{1}{N} = 1$$

Tehát a fenti improprius integrál létezik és véges: $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,dx = 1$

2. példa Számítsuk ki az alábbi integrál értékét, ha létezik: $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x}\,dx$

Példa

1. példa Számítsuk ki az alábbi integrál értékét, ha létezik: $\int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,dx$

A definíció szerint:

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{N\to\infty}\int_1^N x^{-2}\,dx = \lim_{N\to\infty}\left[\frac{x^{-1}}{-1}\right]_1^N = \lim_{N\to\infty} 1-\frac{1}{N} = 1$$

Tehát a fenti improprius integrál létezik és véges: $\int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,dx = 1$

2. példa Számítsuk ki az alábbi integrál értékét, ha létezik: $\int_1^\infty \frac{1}{x}\,dx$

A definíció szerint:

$$\int_1^\infty \frac{1}{x}\,dx = \lim_{N\to\infty}\int_1^N \frac{1}{x}\,dx =$$

Példa

1. példa Számítsuk ki az alábbi integrál értékét, ha létezik: $\int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,dx$

A definíció szerint:

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{N\to\infty} \int_1^N x^{-2}\,dx = \lim_{N\to\infty} \left[\frac{x^{-1}}{-1}\right]_1^N = \lim_{N\to\infty} 1 - \frac{1}{N} = 1$$

Tehát a fenti improprius integrál létezik és véges: $\int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,dx = 1$

2. példa Számítsuk ki az alábbi integrál értékét, ha létezik: $\int_1^\infty \frac{1}{x}\,dx$

A definíció szerint:

$$\int_1^\infty \frac{1}{x}\,dx = \lim_{N\to\infty} \int_1^N \frac{1}{x}\,dx = \lim_{N\to\infty} [\ln x]_1^N =$$

Példa

1. példa Számítsuk ki az alábbi integrál értékét, ha létezik: $\int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,dx$

A definíció szerint:

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{N\to\infty}\int_1^N x^{-2}\,dx = \lim_{N\to\infty}\left[\frac{x^{-1}}{-1}\right]_1^N = \lim_{N\to\infty} 1 - \frac{1}{N} = 1$$

Tehát a fenti improprius integrál létezik és véges: $\int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,dx = 1$

2. példa Számítsuk ki az alábbi integrál értékét, ha létezik: $\int_1^\infty \frac{1}{x}\,dx$

A definíció szerint:

$$\int_1^\infty \frac{1}{x}\,dx = \lim_{N\to\infty}\int_1^N \frac{1}{x}\,dx = \lim_{N\to\infty}[\ln x]_1^N = \lim_{N\to\infty}\ln N - 0 = \infty$$

Példa

1. példa Számítsuk ki az alábbi integrál értékét, ha létezik: $\int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,dx$

A definíció szerint:

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{N\to\infty}\int_1^N x^{-2}\,dx = \lim_{N\to\infty}\left[\frac{x^{-1}}{-1}\right]_1^N = \lim_{N\to\infty} 1-\frac{1}{N} = 1$$

Tehát a fenti improprius integrál létezik és véges: $\int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,dx = 1$

2. példa Számítsuk ki az alábbi integrál értékét, ha létezik: $\int_1^\infty \frac{1}{x}\,dx$

A definíció szerint:

$$\int_1^\infty \frac{1}{x}\,dx = \lim_{N\to\infty}\int_1^N \frac{1}{x}\,dx = \lim_{N\to\infty}[\ln x]_1^N = \lim_{N\to\infty}\ln N - 0 = \infty$$

Tehát a fenti improprius integrál nem létezik.

Példa

3. példa Számítsuk ki az alábbi integrál értékét, ha létezik: $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{1}{x^p}\, dx$

Példa

3. példa Számítsuk ki az alábbi integrál értékét, ha létezik: $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{1}{x^p}\,dx$

A definíció szerint:

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^p}\,dx = \lim_{N\to\infty} \int_1^{N} x^{-p}\,dx =$$

Példa

3. példa Számítsuk ki az alábbi integrál értékét, ha létezik: $\int_1^\infty \frac{1}{x^p}\,dx$

A definíció szerint:

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^p}\,dx = \lim_{N\to\infty}\int_1^N x^{-p}\,dx = \lim_{N\to\infty}\left[\frac{x^{1-p}}{1-p}\right]_1^N,$$

ha $p \neq 1$, de abban az esetben már láttuk, hogy nem létezik az integrál.

$$\lim_{N\to\infty}\left[\frac{x^{1-p}}{1-p}\right]_1^N =$$

Példa

3. példa Számítsuk ki az alábbi integrál értékét, ha létezik: $\int_1^\infty \frac{1}{x^p}\,dx$

A definíció szerint:

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^p}\,dx = \lim_{N\to\infty}\int_1^N x^{-p}\,dx = \lim_{N\to\infty}\left[\frac{x^{1-p}}{1-p}\right]_1^N,$$

ha $p \neq 1$, de abban az esetben már láttuk, hogy nem létezik az integrál.

$$\lim_{N\to\infty}\left[\frac{x^{1-p}}{1-p}\right]_1^N = \lim_{N\to\infty}\frac{N^{1-p}}{1-p} - \frac{1}{1-p}$$

Példa

3. példa Számítsuk ki az alábbi integrál értékét, ha létezik: $\int_1^\infty \frac{1}{x^p}\,dx$

A definíció szerint:

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^p}\,dx = \lim_{N\to\infty} \int_1^N x^{-p}\,dx = \lim_{N\to\infty} \left[\frac{x^{1-p}}{1-p}\right]_1^N,$$

ha $p \neq 1$, de abban az esetben már láttuk, hogy nem létezik az integrál.

$$\lim_{N\to\infty} \left[\frac{x^{1-p}}{1-p}\right]_1^N = \lim_{N\to\infty} \frac{N^{1-p}}{1-p} - \frac{1}{1-p}$$

A fenti határérték csak akkor lesz véges, ha $1-p \le 0 \Leftrightarrow 1 \le p$, de $p \neq 1$, tehát fenti improprius integrál létezik és véges, akkor és csak akkor, ha $1 < p$ és $\int_1^\infty \frac{1}{x^p}\,dx = \frac{1}{p-1}$

Példa

4. példa Számítsuk ki az alábbi integrál értékét, ha létezik: $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} e^{2x}\,dx$

Példa

4. példa Számítsuk ki az alábbi integrál értékét, ha létezik: $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} e^{2x}\,dx$

$$\int_{-\infty}^{0} e^{2x}\,dx = \lim_{N\to-\infty} \int_{N}^{0} e^{2x}\,dx =$$

Példa

4. példa Számítsuk ki az alábbi integrál értékét, ha létezik: $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} e^{2x}\,dx$

$$\int_{-\infty}^{0} e^{2x}\,dx = \lim_{N\to-\infty} \int_{N}^{0} e^{2x}\,dx = \lim_{N\to-\infty} \left[\frac{e^{2x}}{2}\right]_{N}^{0} =$$

Példa

4. példa Számítsuk ki az alábbi integrál értékét, ha létezik: $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} e^{2x}\,dx$

$$\int_{-\infty}^{0} e^{2x}\,dx = \lim_{N\to-\infty}\int_{N}^{0} e^{2x}\,dx = \lim_{N\to-\infty}\left[\frac{e^{2x}}{2}\right]_{N}^{0} = \lim_{N\to-\infty}\frac{1}{2}-\frac{e^{2N}}{2} = \frac{1}{2},$$

tehát a fenti improprius integrál létezik és véges: $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} e^{2x}\,dx = \frac{1}{2}$

Példa

4. példa Számítsuk ki az alábbi integrál értékét, ha létezik: $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} e^{2x}\,dx$

$$\int_{-\infty}^{0} e^{2x}\,dx = \lim_{N\to-\infty}\int_{N}^{0} e^{2x}\,dx = \lim_{N\to-\infty}\left[\frac{e^{2x}}{2}\right]_N^0 = \lim_{N\to-\infty}\frac{1}{2}-\frac{e^{2N}}{2} = \frac{1}{2},$$

tehát a fenti improprius integrál létezik és véges: $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} e^{2x}\,dx = \frac{1}{2}$

5. példa Számítsuk ki az alábbi integrál értékét, ha létezik: $\displaystyle\int_{0}^{\infty} xe^{-x}\,dx$

Példa

4. példa Számítsuk ki az alábbi integrál értékét, ha létezik: $\int_{-\infty}^{0} e^{2x}\,dx$

$$\int_{-\infty}^{0} e^{2x}\,dx = \lim_{N\to-\infty}\int_{N}^{0} e^{2x}\,dx = \lim_{N\to-\infty}\left[\frac{e^{2x}}{2}\right]_{N}^{0} = \lim_{N\to-\infty}\frac{1}{2}-\frac{e^{2N}}{2} = \frac{1}{2},$$

tehát a fenti improprius integrál létezik és véges: $\int_{-\infty}^{0} e^{2x}\,dx = \frac{1}{2}$

5. példa Számítsuk ki az alábbi integrál értékét, ha létezik: $\int_{0}^{\infty} xe^{-x}\,dx$

$$\int_{0}^{\infty} xe^{-x}\,dx = \lim_{N\to\infty}\int_{0}^{N} xe^{-x}\,dx =$$

Példa

4. példa Számítsuk ki az alábbi integrál értékét, ha létezik: $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} e^{2x}\, dx$

$$\int_{-\infty}^{0} e^{2x}\, dx = \lim_{N\to-\infty} \int_{N}^{0} e^{2x}\, dx = \lim_{N\to-\infty} \left[\frac{e^{2x}}{2}\right]_{N}^{0} = \lim_{N\to-\infty} \frac{1}{2} - \frac{e^{2N}}{2} = \frac{1}{2},$$

tehát a fenti improprius integrál létezik és véges: $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} e^{2x}\, dx = \frac{1}{2}$

5. példa Számítsuk ki az alábbi integrál értékét, ha létezik: $\displaystyle\int_{0}^{\infty} xe^{-x}\, dx$

$$\int_{0}^{\infty} xe^{-x}\, dx = \lim_{N\to\infty} \int_{0}^{N} xe^{-x}\, dx = \lim_{N\to\infty} \left[-xe^{-x}\right]_{0}^{N} + \int_{0}^{N} e^{-x}\, dx =$$

Példa

4. példa Számítsuk ki az alábbi integrál értékét, ha létezik: $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} e^{2x}\,dx$

$$\int_{-\infty}^{0} e^{2x}\,dx = \lim_{N\to-\infty}\int_{N}^{0} e^{2x}\,dx = \lim_{N\to-\infty}\left[\frac{e^{2x}}{2}\right]_{N}^{0} = \lim_{N\to-\infty}\frac{1}{2}-\frac{e^{2N}}{2} = \frac{1}{2},$$

tehát a fenti improprius integrál létezik és véges: $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} e^{2x}\,dx = \frac{1}{2}$

5. példa Számítsuk ki az alábbi integrál értékét, ha létezik: $\displaystyle\int_{0}^{\infty} xe^{-x}\,dx$

$$\int_{0}^{\infty} xe^{-x}\,dx = \lim_{N\to\infty}\int_{0}^{N} xe^{-x}\,dx = \lim_{N\to\infty}\left[-xe^{-x}\right]_{0}^{N} + \int_{0}^{N} e^{-x}\,dx =$$

$$= \lim_{N\to\infty}\left[-e^{-x}\right]_{0}^{N} - \frac{N}{e^{N}} =$$

Példa

4. példa Számítsuk ki az alábbi integrál értékét, ha létezik: $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} e^{2x}\,dx$

$$\int_{-\infty}^{0} e^{2x}\,dx = \lim_{N\to-\infty}\int_{N}^{0} e^{2x}\,dx = \lim_{N\to-\infty}\left[\frac{e^{2x}}{2}\right]_{N}^{0} = \lim_{N\to-\infty}\frac{1}{2}-\frac{e^{2N}}{2} = \frac{1}{2},$$

tehát a fenti improprius integrál létezik és véges: $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} e^{2x}\,dx = \frac{1}{2}$

5. példa Számítsuk ki az alábbi integrál értékét, ha létezik: $\displaystyle\int_{0}^{\infty} xe^{-x}\,dx$

$$\int_{0}^{\infty} xe^{-x}\,dx = \lim_{N\to\infty}\int_{0}^{N} xe^{-x}\,dx = \lim_{N\to\infty}\left[-xe^{-x}\right]_{0}^{N} + \int_{0}^{N} e^{-x}\,dx =$$

$$= \lim_{N\to\infty}\left[-e^{-x}\right]_{0}^{N} - \frac{N}{e^{N}} = \lim_{N\to\infty} 1 - \frac{N+1}{e^{N}} = 1 - \lim_{N\to\infty}\frac{N+1}{e^{N}} \overset{L'H}{=} 1 - \lim_{N\to\infty}\frac{1}{e^{N}},$$

tehát a fenti improprius integrál létezik és véges: $\displaystyle\int_{0}^{\infty} xe^{-x}\,dx = 1$

Példa

6. példa Számítsuk ki az alábbi integrál értékét, ha létezik: $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\, dx$

Példa

6. példa Számítsuk ki az alábbi integrál értékét, ha létezik: $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\, dx$

Szétvágjuk az intervallumot tetszőlegesen:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\, dx = \int_{-\infty}^{0} \frac{1}{1+x^2}\, dx + \int_{0}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\, dx = A + B$$

Példa

6. példa Számítsuk ki az alábbi integrál értékét, ha létezik: $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx$

Szétvágjuk az intervallumot tetszőlegesen:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx = \int_{-\infty}^{0} \frac{1}{1+x^2}\,dx + \int_{0}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx = A + B$$

$$A = \int_{-\infty}^{0} \frac{1}{1+x^2}\,dx = \lim_{N\to-\infty} \int_{N}^{0} \frac{1}{1+x^2}\,dx =$$

Példa

6. példa Számítsuk ki az alábbi integrál értékét, ha létezik: $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx$

Szétvágjuk az intervallumot tetszőlegesen:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx = \int_{-\infty}^{0} \frac{1}{1+x^2}\,dx + \int_{0}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx = A + B$$

$$A = \int_{-\infty}^{0} \frac{1}{1+x^2}\,dx = \lim_{N\to-\infty} \int_{N}^{0} \frac{1}{1+x^2}\,dx = \lim_{N\to-\infty} [\arctan(x)]_N^0 =$$

$$= \lim_{N\to-\infty} \arctan 0 - \arctan N =$$

Példa

6. példa Számítsuk ki az alábbi integrál értékét, ha létezik: $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx$

Szétvágjuk az intervallumot tetszőlegesen:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx = \int_{-\infty}^{0} \frac{1}{1+x^2}\,dx + \int_{0}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx = A + B$$

$$A = \int_{-\infty}^{0} \frac{1}{1+x^2}\,dx = \lim_{N\to-\infty} \int_{N}^{0} \frac{1}{1+x^2}\,dx = \lim_{N\to-\infty} [\arctan(x)]_N^0 =$$

$$= \lim_{N\to-\infty} \arctan 0 - \arctan N = \frac{\pi}{2}$$

$$B = \int_{0}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx = \lim_{N\to\infty} \int_{0}^{N} \frac{1}{1+x^2}\,dx =$$

Példa

6\. példa Számítsuk ki az alábbi integrál értékét, ha létezik: $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx$

Szétvágjuk az intervallumot tetszőlegesen:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx = \int_{-\infty}^{0} \frac{1}{1+x^2}\,dx + \int_{0}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx = A + B$$

$$A = \int_{-\infty}^{0} \frac{1}{1+x^2}\,dx = \lim_{N\to-\infty} \int_{N}^{0} \frac{1}{1+x^2}\,dx = \lim_{N\to-\infty} [\arctan(x)]_N^0 =$$

$$= \lim_{N\to-\infty} \arctan 0 - \arctan N = \frac{\pi}{2}$$

$$B = \int_{0}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx = \lim_{N\to\infty} \int_{0}^{N} \frac{1}{1+x^2}\,dx = \lim_{N\to\infty} [\arctan(x)]_0^N =$$

$$= \lim_{N\to\infty} \arctan N - \arctan 0 =$$

Példa

6. példa Számítsuk ki az alábbi integrál értékét, ha létezik: $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx$

Szétvágjuk az intervallumot tetszőlegesen:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx = \int_{-\infty}^{0} \frac{1}{1+x^2}\,dx + \int_{0}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx = A + B$$

$$A = \int_{-\infty}^{0} \frac{1}{1+x^2}\,dx = \lim_{N\to-\infty} \int_{N}^{0} \frac{1}{1+x^2}\,dx = \lim_{N\to-\infty} [\arctan(x)]_N^0 =$$

$$= \lim_{N\to-\infty} \arctan 0 - \arctan N = \frac{\pi}{2}$$

$$B = \int_{0}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx = \lim_{N\to\infty} \int_{0}^{N} \frac{1}{1+x^2}\,dx = \lim_{N\to\infty} [\arctan(x)]_0^N =$$

$$= \lim_{N\to\infty} \arctan N - \arctan 0 = \frac{\pi}{2}$$

Példa

6. példa Számítsuk ki az alábbi integrál értékét, ha létezik: $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\, dx$

Szétvágjuk az intervallumot tetszőlegesen:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\, dx = \int_{-\infty}^{0} \frac{1}{1+x^2}\, dx + \int_{0}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\, dx = A + B = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi$$

$$A = \int_{-\infty}^{0} \frac{1}{1+x^2}\, dx = \lim_{N\to-\infty} \int_{N}^{0} \frac{1}{1+x^2}\, dx = \lim_{N\to-\infty} [\arctan(x)]_N^0 =$$

$$= \lim_{N\to-\infty} \arctan 0 - \arctan N = \frac{\pi}{2}$$

$$B = \int_{0}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\, dx = \lim_{N\to\infty} \int_{0}^{N} \frac{1}{1+x^2}\, dx = \lim_{N\to\infty} [\arctan(x)]_0^N =$$

$$= \lim_{N\to\infty} \arctan N - \arctan 0 = \frac{\pi}{2}$$

2. típusú improprius integrál – nem korlátos függvény

Definíció

Legyen f integrálható minden $[a+\epsilon, b]$-n és nem korlátos $[a, b]$-n. Ha a $\lim\limits_{\epsilon\to 0+} \int_{a+\epsilon}^{b} f(x)\,dx$ határérték létezik és véges, akkor az f függvény impropius integrálja létezik, és $\int_a^b f(x)\,dx = \lim\limits_{\epsilon\to 0+} \int_{a+\epsilon}^{b} f(x)\,dx$.

2. típusú improprius integrál – nem korlátos függvény

Definíció

Legyen f integrálható minden $[a+\epsilon, b]$*-n és nem korlátos* $[a, b]$*-n. Ha a* $\lim\limits_{\epsilon \to 0+} \int_{a+\epsilon}^{b} f(x)\,dx$ *határérték létezik és véges, akkor az f függvény impropius integrálja létezik, és* $\int_a^b f(x)\,dx = \lim\limits_{\epsilon \to 0+} \int_{a+\epsilon}^{b} f(x)\,dx.$

Definíció

Legyen f integrálható minden $[a, b-\epsilon]$*-n és nem korlátos* $[a, b]$*-n. Ha a* $\lim\limits_{\epsilon \to 0+} \int_{a}^{b-\epsilon} f(x)\,dx$ *határérték létezik és véges, akkor az f függvény impropius integrálja létezik, és* $\int_a^b f(x)\,dx = \lim\limits_{\epsilon \to 0+} \int_{a}^{b-\epsilon} f(x)\,dx.$

Példa

7. példa Számítsuk ki az alábbi integrál értékét, ha létezik: $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\, dx$

Példa

7. példa Számítsuk ki az alábbi integrál értékét, ha létezik: $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\, dx$

A definíció szerint:

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\, dx = \lim_{\epsilon \to 0+} \int_\epsilon^1 x^{-\frac{1}{2}}\, dx =$$

Példa

7. példa Számítsuk ki az alábbi integrál értékét, ha létezik: $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$

A definíció szerint:

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = \lim_{\epsilon\to 0+} \int_\epsilon^1 x^{-\frac{1}{2}}\,dx = \lim_{\epsilon\to 0+} \left[\frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}\right]_\epsilon^1 =$$

Példa

7. példa Számítsuk ki az alábbi integrál értékét, ha létezik: $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\, dx$

A definíció szerint:

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\, dx = \lim_{\epsilon \to 0+} \int_\epsilon^1 x^{-\frac{1}{2}}\, dx = \lim_{\epsilon \to 0+} \left[\frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} \right]_\epsilon^1 = \lim_{\epsilon \to 0+} 2\sqrt{1} - 2\sqrt{\epsilon} = 2$$

Példa

7. példa Számítsuk ki az alábbi integrál értékét, ha létezik: $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$

A definíció szerint:

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = \lim_{\epsilon\to 0+} \int_\epsilon^1 x^{-\frac{1}{2}}\,dx = \lim_{\epsilon\to 0+} \left[\frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}\right]_\epsilon^1 = \lim_{\epsilon\to 0+} 2\sqrt{1} - 2\sqrt{\epsilon} = 2$$

Tehát a fenti improprius integrál létezik és véges: $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = 2$

Példa

7. példa Számítsuk ki az alábbi integrál értékét, ha létezik: $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$

A definíció szerint:

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = \lim_{\epsilon\to 0+} \int_\epsilon^1 x^{-\frac{1}{2}}\,dx = \lim_{\epsilon\to 0+} \left[\frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}\right]_\epsilon^1 = \lim_{\epsilon\to 0+} 2\sqrt{1} - 2\sqrt{\epsilon} = 2$$

Tehát a fenti impropriusz integrál létezik és véges: $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = 2$

8. példa Számítsuk ki az alábbi integrál értékét, ha létezik: $\int_0^1 \frac{1}{x}\,dx$

Példa

7. példa Számítsuk ki az alábbi integrál értékét, ha létezik: $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\, dx$

A definíció szerint:

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\, dx = \lim_{\epsilon \to 0+} \int_\epsilon^1 x^{-\frac{1}{2}}\, dx = \lim_{\epsilon \to 0+} \left[\frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} \right]_\epsilon^1 = \lim_{\epsilon \to 0+} 2\sqrt{1} - 2\sqrt{\epsilon} = 2$$

Tehát a fenti improprius integrál létezik és véges: $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\, dx = 2$

8. példa Számítsuk ki az alábbi integrál értékét, ha létezik: $\int_0^1 \frac{1}{x}\, dx$

A definíció szerint:

$$\int_0^1 \frac{1}{x}\, dx = \lim_{\epsilon \to 0+} \int_\epsilon^1 \frac{1}{x}\, dx =$$

Példa

7. példa Számítsuk ki az alábbi integrál értékét, ha létezik: $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$

A definíció szerint:

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = \lim_{\epsilon\to 0+} \int_\epsilon^1 x^{-\frac{1}{2}}\,dx = \lim_{\epsilon\to 0+} \left[\frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}\right]_\epsilon^1 = \lim_{\epsilon\to 0+} 2\sqrt{1} - 2\sqrt{\epsilon} = 2$$

Tehát a fenti improprius integrál létezik és véges: $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = 2$

8. példa Számítsuk ki az alábbi integrál értékét, ha létezik: $\int_0^1 \frac{1}{x}\,dx$

A definíció szerint:

$$\int_0^1 \frac{1}{x}\,dx = \lim_{\epsilon\to 0+} \int_\epsilon^1 \frac{1}{x}\,dx = \lim_{\epsilon\to 0+} [\ln x]_\epsilon^1 =$$

Példa

7. példa Számítsuk ki az alábbi integrál értékét, ha létezik: $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\, dx$

A definíció szerint:

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\, dx = \lim_{\epsilon \to 0+} \int_\epsilon^1 x^{-\frac{1}{2}}\, dx = \lim_{\epsilon \to 0+} \left[\frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} \right]_\epsilon^1 = \lim_{\epsilon \to 0+} 2\sqrt{1} - 2\sqrt{\epsilon} = 2$$

Tehát a fenti improprius integrál létezik és véges: $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\, dx = 2$

8. példa Számítsuk ki az alábbi integrál értékét, ha létezik: $\int_0^1 \frac{1}{x}\, dx$

A definíció szerint:

$$\int_0^1 \frac{1}{x}\, dx = \lim_{\epsilon \to 0+} \int_\epsilon^1 \frac{1}{x}\, dx = \lim_{\epsilon \to 0+} [\ln x]_\epsilon^1 = \lim_{\epsilon \to 0+} 0 - \ln \epsilon = \infty$$

Példa

7. példa Számítsuk ki az alábbi integrál értékét, ha létezik: $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$

A definíció szerint:

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = \lim_{\epsilon\to 0+}\int_\epsilon^1 x^{-\frac{1}{2}}\,dx = \lim_{\epsilon\to 0+}\left[\frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}\right]_\epsilon^1 = \lim_{\epsilon\to 0+} 2\sqrt{1}-2\sqrt{\epsilon} = 2$$

Tehát a fenti improprius integrál létezik és véges: $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = 2$

8. példa Számítsuk ki az alábbi integrál értékét, ha létezik: $\int_0^1 \frac{1}{x}\,dx$

A definíció szerint:

$$\int_0^1 \frac{1}{x}\,dx = \lim_{\epsilon\to 0+}\int_\epsilon^1 \frac{1}{x}\,dx = \lim_{\epsilon\to 0+}\left[\ln x\right]_\epsilon^1 = \lim_{\epsilon\to 0+} 0-\ln\epsilon = \infty$$

Tehát a fenti improprius integrál nem létezik.

Példa

9. példa Számítsuk ki az alábbi integrál értékét, ha létezik: $\int_0^1 \frac{1}{x^p}\, dx$

Példa

9. példa Számítsuk ki az alábbi integrál értékét, ha létezik: $\int_0^1 \frac{1}{x^p}\,dx$

A definíció szerint:

$$\int_0^1 \frac{1}{x^p}\,dx = \lim_{\epsilon \to 0+} \int_\epsilon^1 x^{-p}\,dx =$$

Példa

9. példa Számítsuk ki az alábbi integrál értékét, ha létezik: $\int_0^1 \frac{1}{x^p}\,dx$

A definíció szerint:

$$\int_0^1 \frac{1}{x^p}\,dx = \lim_{\epsilon \to 0+} \int_\epsilon^1 x^{-p}\,dx = \lim_{\epsilon \to 0+} \left[\frac{x^{1-p}}{1-p}\right]_\epsilon^1,$$

ha $p \neq 1$, de abban az esetben már láttuk, hogy nem létezik az integrál.

$$\lim_{\epsilon \to 0+} \left[\frac{x^{1-p}}{1-p}\right]_\epsilon^1 =$$

Példa

9. példa Számítsuk ki az alábbi integrál értékét, ha létezik: $\int_0^1 \frac{1}{x^p}\,dx$

A definíció szerint:

$$\int_0^1 \frac{1}{x^p}\,dx = \lim_{\epsilon\to 0+} \int_\epsilon^1 x^{-p}\,dx = \lim_{\epsilon\to 0+} \left[\frac{x^{1-p}}{1-p}\right]_\epsilon^1,$$

ha $p \neq 1$, de abban az esetben már láttuk, hogy nem létezik az integrál.

$$\lim_{\epsilon\to 0+} \left[\frac{x^{1-p}}{1-p}\right]_\epsilon^1 = \lim_{\epsilon\to 0+} \frac{1}{1-p} - \frac{\epsilon^{1-p}}{1-p}$$

Példa

9. példa Számítsuk ki az alábbi integrál értékét, ha létezik: $\int_0^1 \frac{1}{x^p}\,dx$

A definíció szerint:

$$\int_0^1 \frac{1}{x^p}\,dx = \lim_{\epsilon\to 0+} \int_\epsilon^1 x^{-p}\,dx = \lim_{\epsilon\to 0+} \left[\frac{x^{1-p}}{1-p}\right]_\epsilon^1,$$

ha $p \neq 1$, de abban az esetben már láttuk, hogy nem létezik az integrál.

$$\lim_{\epsilon\to 0+} \left[\frac{x^{1-p}}{1-p}\right]_\epsilon^1 = \lim_{\epsilon\to 0+} \frac{1}{1-p} - \frac{\epsilon^{1-p}}{1-p}$$

A fenti határérték csak akkor lesz véges, ha $1-p \geq 0 \Leftrightarrow 1 \geq p$, de $p \neq 1$, tehát fenti improprius integrál létezik és véges, akkor és csak akkor, ha $1 > p$ és $\int_0^1 \frac{1}{x^p}\,dx = \frac{1}{1-p}$

Példa

10. példa Számítsuk ki az alábbi integrál értékét, ha létezik: $\int_0^1 \frac{1}{1-x}\,dx$

Példa

10. példa Számítsuk ki az alábbi integrál értékét, ha létezik: $\int_0^1 \frac{1}{1-x}\,dx$

A törtfüggvény a felső határon nem korlátos, tehát:

$$\int_0^1 \frac{1}{1-x}\,dx = \lim_{\epsilon \to 0+} \int_0^{1-\epsilon} \frac{1}{1-x}\,dx =$$

Példa

10. példa Számítsuk ki az alábbi integrál értékét, ha létezik: $\int_0^1 \frac{1}{1-x}\,dx$

A törtfüggvény a felső határon nem korlátos, tehát:

$$\int_0^1 \frac{1}{1-x}\,dx = \lim_{\epsilon\to 0+} \int_0^{1-\epsilon} \frac{1}{1-x}\,dx = \lim_{\epsilon\to 0+} \left[-\ln(1-x)\right]_0^{1-\epsilon} =$$

Példa

10. példa Számítsuk ki az alábbi integrál értékét, ha létezik: $\int_0^1 \frac{1}{1-x}\,dx$

A törtfüggvény a felső határon nem korlátos, tehát:

$$\int_0^1 \frac{1}{1-x}\,dx = \lim_{\epsilon\to 0+} \int_0^{1-\epsilon} \frac{1}{1-x}\,dx = \lim_{\epsilon\to 0+} \left[-\ln(1-x)\right]_0^{1-\epsilon} =$$

$= \lim_{\epsilon\to 0+} -\ln\epsilon + 0 = \infty$, tehát ez az integrál nem létezik.

Példa

10. példa Számítsuk ki az alábbi integrál értékét, ha létezik: $\int_0^1 \frac{1}{1-x}\,dx$

A törtfüggvény a felső határon nem korlátos, tehát:

$$\int_0^1 \frac{1}{1-x}\,dx = \lim_{\epsilon\to 0+} \int_0^{1-\epsilon} \frac{1}{1-x}\,dx = \lim_{\epsilon\to 0+} \left[-\ln(1-x)\right]_0^{1-\epsilon} =$$

$= \lim_{\epsilon\to 0+} -\ln\epsilon + 0 = \infty$, tehát ez az integrál nem létezik.

11. példa

Számítsuk ki az alábbi integrál értékét, ha létezik: $\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$

Példa

10. példa Számítsuk ki az alábbi integrál értékét, ha létezik: $\int_0^1 \frac{1}{1-x}\,dx$

A törtfüggvény a felső határon nem korlátos, tehát:

$$\int_0^1 \frac{1}{1-x}\,dx = \lim_{\epsilon\to 0+} \int_0^{1-\epsilon} \frac{1}{1-x}\,dx = \lim_{\epsilon\to 0+} \left[-\ln(1-x)\right]_0^{1-\epsilon} =$$

$= \lim_{\epsilon\to 0+} -\ln\epsilon + 0 = \infty$, tehát ez az integrál nem létezik.

11. példa

Számítsuk ki az alábbi integrál értékét, ha létezik: $\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$

Az integrál egyik határán sem korlátos a függvény, tehát:

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \int_{-1}^0 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx + \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$$

Példa

$$\int_{-1}^{0} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \lim_{\epsilon\to 0+} \int_{\epsilon-1}^{0} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} =$$

Példa

$$\int_{-1}^{0} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \lim_{\epsilon\to 0+} \int_{\epsilon-1}^{0} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{\epsilon\to 0+} \left[\arcsin x\right]_{\epsilon-1}^{0} =$$

Példa

$$\int_{-1}^{0} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \lim_{\epsilon\to 0+} \int_{\epsilon-1}^{0} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{\epsilon\to 0+} [\arcsin x]_{\epsilon-1}^{0} =$$

$$\lim_{\epsilon\to 0+} \arcsin 0 - \arcsin(\epsilon - 1) = \frac{\pi}{2}$$

Példa

$$\int_{-1}^{0} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \lim_{\epsilon\to 0+} \int_{\epsilon-1}^{0} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{\epsilon\to 0+} [\arcsin x]_{\epsilon-1}^{0} =$$

$$\lim_{\epsilon\to 0+} \arcsin 0 - \arcsin(\epsilon - 1) = \frac{\pi}{2}$$

$$\int_{0}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \lim_{\epsilon\to 0+} \int_{0}^{1-\epsilon} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} =$$

Példa

$$\int_{-1}^{0} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \lim_{\epsilon\to 0+} \int_{\epsilon-1}^{0} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{\epsilon\to 0+} [\arcsin x]_{\epsilon-1}^{0} =$$

$$\lim_{\epsilon\to 0+} \arcsin 0 - \arcsin(\epsilon - 1) = \frac{\pi}{2}$$

$$\int_{0}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \lim_{\epsilon\to 0+} \int_{0}^{1-\epsilon} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{\epsilon\to 0+} [\arcsin x]_{0}^{1-\epsilon} =$$

Példa

$$\int_{-1}^{0} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \lim_{\epsilon\to 0+} \int_{\epsilon-1}^{0} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{\epsilon\to 0+} [\arcsin x]_{\epsilon-1}^{0} =$$

$$\lim_{\epsilon\to 0+} \arcsin 0 - \arcsin(\epsilon - 1) = \frac{\pi}{2}$$

$$\int_{0}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \lim_{\epsilon\to 0+} \int_{0}^{1-\epsilon} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{\epsilon\to 0+} [\arcsin x]_{0}^{1-\epsilon} =$$

$$\lim_{\epsilon\to 0+} \arcsin(1-\epsilon) - \arcsin 0 = \frac{\pi}{2}$$

Példa

$$\int_{-1}^{0} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \lim_{\epsilon\to 0+} \int_{\epsilon-1}^{0} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{\epsilon\to 0+} [\arcsin x]_{\epsilon-1}^{0} =$$

$$\lim_{\epsilon\to 0+} \arcsin 0 - \arcsin(\epsilon-1) = \frac{\pi}{2}$$

$$\int_{0}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \lim_{\epsilon\to 0+} \int_{0}^{1-\epsilon} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{\epsilon\to 0+} [\arcsin x]_{0}^{1-\epsilon} =$$

$$\lim_{\epsilon\to 0+} \arcsin(1-\epsilon) - \arcsin 0 = \frac{\pi}{2}$$

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi$$

Ellenpélda

Végül megnézzük azt is, hogy mit NEM szabad!

12. példa Számítsuk ki az alábbi integrál értékét, ha létezik: $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \tan x \, dx$

Ellenpélda

Végül megnézzük azt is, hogy mit NEM szabad!

12. példa Számítsuk ki az alábbi integrál értékét, ha létezik: $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \tan x \, dx$

Itt is mindkét határon nemkorlátos a függvény, tehát ketté kell vágnunk:

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \tan x \, dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} \frac{\sin x}{\cos x} \, dx + \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{\cos x} \, dx = A + B$$

Ellenpélda

Végül megnézzük azt is, hogy mit NEM szabad!

12. példa Számítsuk ki az alábbi integrál értékét, ha létezik: $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \tan x \, dx$

Itt is mindkét határon nemkorlátos a függvény, tehát ketté kell vágnunk:

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \tan x \, dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} \frac{\sin x}{\cos x} \, dx + \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{\cos x} \, dx = A + B$$

$$A = \lim_{\epsilon \to 0+} \int_{\epsilon - \frac{\pi}{2}}^{0} \frac{\sin x}{\cos x} \, dx =$$

Ellenpélda

Végül megnézzük azt is, hogy mit NEM szabad!

12. példa Számítsuk ki az alábbi integrál értékét, ha létezik: $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \tan x \, dx$

Itt is mindkét határon nemkorlátos a függvény, tehát ketté kell vágnunk:

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \tan x \, dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} \frac{\sin x}{\cos x} \, dx + \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{\cos x} \, dx = A + B$$

$$A = \lim_{\epsilon \to 0+} \int_{\epsilon - \frac{\pi}{2}}^{0} \frac{\sin x}{\cos x} \, dx = \lim_{\epsilon \to 0} \left[-\ln |\cos x| \right]_{\epsilon - \frac{\pi}{2}}^{0} = \lim_{\epsilon \to 0+} \ln \cos 0 - \ln \cos(\epsilon - \frac{\pi}{2}),$$

Ellenpélda

Végül megnézzük azt is, hogy mit NEM szabad!

12. példa Számítsuk ki az alábbi integrál értékét, ha létezik: $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \tan x \, dx$

Itt is mindkét határon nemkorlátos a függvény, tehát ketté kell vágnunk:

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \tan x \, dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} \frac{\sin x}{\cos x} \, dx + \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{\cos x} \, dx = A + B$$

$$A = \lim_{\epsilon \to 0+} \int_{\epsilon - \frac{\pi}{2}}^{0} \frac{\sin x}{\cos x} \, dx = \lim_{\epsilon \to 0} \left[- \ln |\cos x| \right]_{\epsilon - \frac{\pi}{2}}^{0} = \lim_{\epsilon \to 0+} \ln \cos 0 - \ln \cos(\epsilon - \frac{\pi}{2}),$$

tehát az összeg egyik tagja nem létezik, így az egész integrál sem létezik.

Ellenpélda

Végül megnézzük azt is, hogy mit NEM szabad!

12. példa Számítsuk ki az alábbi integrál értékét, ha létezik: $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \tan x \, dx$

Itt is mindkét határon nemkorlátos a függvény, tehát ketté kell vágnunk:

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \tan x \, dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} \frac{\sin x}{\cos x} \, dx + \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{\cos x} \, dx = A + B$$

$$A = \lim_{\epsilon \to 0+} \int_{\epsilon - \frac{\pi}{2}}^{0} \frac{\sin x}{\cos x} \, dx = \lim_{\epsilon \to 0} \left[-\ln |\cos x| \right]_{\epsilon - \frac{\pi}{2}}^{0} = \lim_{\epsilon \to 0+} \ln \cos 0 - \ln \cos(\epsilon - \frac{\pi}{2}),$$

tehát az összeg egyik tagja nem létezik, így az egész integrál sem létezik.
DE HA így írnánk fel:

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \tan x \, dx = \lim_{\epsilon \to 0+} \int_{\epsilon - \frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2} - \epsilon} \tan x \, dx,$$

akkor egy páratlan függvényt integrálunk egy szimmetrikus intervallumon, ami 0. Ezt tehát így NEM LEHET!.