Komplex számok

Matematika A2x

2020 ősz

Bevezetés

"A karakterisztikus egyenlet a valósak között csak elsőfokúak és negatív diszkriminánsú másodfokúak szorzatára bomlik."

Persze ez minden valós együtthatós polinomra igaz, de nem lehet valahogy mégis gyököket és így sajátértékeket kapni? Mert bizony vannak olyan transzformációk, ahol így egyáltalán nem kapunk sajátértéket, sajátvektort. Gondoljunk mondjuk a síkbeli, origó középpontú $+90°$-os forgatás mátrixára:

$$F^{90} = \begin{bmatrix} \cos 90° & -\sin 90° \\ \sin 90° & \cos 90° \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Ha ehhez keressük meg a karakterisztikus egyenletet (kivonjuk a főátlóban lévő elemekből λ-t és vesszük a determinánst), akkor azt kapjuk, hogy ez $\lambda^2 + 1 = 0$ lesz. Olyan valós λ szám pedig nincs, aminek a négyzete -1 lenne.

Permanencia elv

- Természetes számok $\mathbb{N} = \{0, 1, 2 \dots\}$
  A természetes számok halmaza zárt az összeadásra és szorzásra nézve, de a kivonás művelete kivezet belőle $\{+, \cdot\}$

Permanencia elv

- Természetes számok $\mathbb{N} = \{0, 1, 2 \ldots\}$
  A természetes számok halmaza zárt az összeadásra és szorzásra nézve, de a kivonás művelete kivezet belőle $\{+, \cdot\}$
- Egész számok $\mathbb{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2 \ldots\}$
  Az egész számok halmaza zárt az összeadásra, szorzásra és a kivonásra nézve, de az osztás művelete kivezet belőle $\{+, -, \cdot\}$

Permanencia elv

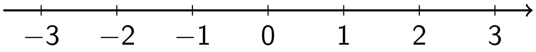
- Természetes számok $\mathbb{N} = \{0, 1, 2 \dots\}$
  A természetes számok halmaza zárt az összeadásra és szorzásra nézve, de a kivonás művelete kivezet belőle $\{+, \cdot\}$
- Egész számok $\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2 \dots\}$
  Az egész számok halmaza zárt az összeadásra, szorzásra és a kivonásra nézve, de az osztás művelete kivezet belőle $\{+, -, \cdot\}$
- Racionális számok $\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} \middle| p \in \mathbb{Z} \wedge q \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \right\}$
  A racionális számok halmaza zárt az összeadásra, szorzásra, kivonásra és osztásra nézve, de a gyökvonás művelete kivezet belőle $\{+, -, \cdot, \div\}$

Permanencia elv

- Természetes számok $\mathbb{N} = \{0, 1, 2 \dots\}$
  A természetes számok halmaza zárt az összeadásra és szorzásra nézve, de a kivonás művelete kivezet belőle $\{+, \cdot\}$
- Egész számok $\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2 \dots\}$
  Az egész számok halmaza zárt az összeadásra, szorzásra és a kivonásra nézve, de az osztás művelete kivezet belőle $\{+, -, \cdot\}$
- Racionális számok $\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} \middle| p \in \mathbb{Z} \wedge q \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \right\}$
  A racionális számok halmaza zárt az összeadásra, szorzásra, kivonásra és osztásra nézve, de a gyökvonás művelete kivezet belőle $\{+, -, \cdot, \div\}$
- Valós számok (definiálása axiómákkal)
  A valós számok halmaza zárt az összeadásra, szorzásra, kivonásra, osztásra és nemnegatív számokra a gyökvonásra nézve is, de negatív számokból vont gyök művelete kivezet belőle $\{+, -, \cdot, \div, \sqrt{0+}\}$

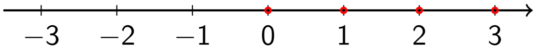
Számhalmazok ábrázolása

Ábrázoljuk a számhalmazokat a valós számegyenesen:



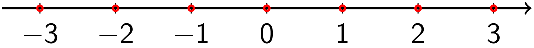
Számhalmazok ábrázolása

Ábrázoljuk a számhalmazokat a valós számegyenesen: $\mathbb{N}$



Számhalmazok ábrázolása

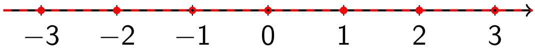
Ábrázoljuk a számhalmazokat a valós számegyenesen: $\mathbb{Z}$



Számhalmazok ábrázolása

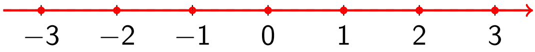
Ábrázoljuk a számhalmazokat a valós számegyenesen: $\mathbb{Q}$

A racionális számok "sűrűn" helyezkednek el a számegyenesen, azaz minden két pont között van egy további pont.



Számhalmazok ábrázolása

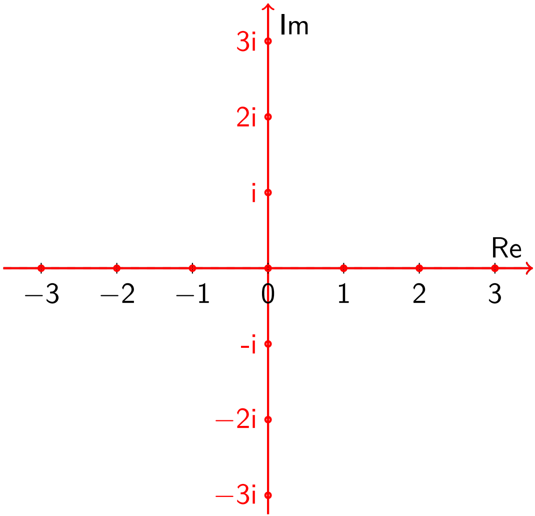
Ábrázoljuk a számhalmazokat a valós számegyenesen: $\mathbb{R}$



A racionális számok "sűrűn" helyezkednek el a számegyenesen, azaz minden két pont között van egy további pont. A valós számok lefedik a teljes számegyenest. Így ez már tovább nem bővíthető.

Számhalmazok ábrázolása

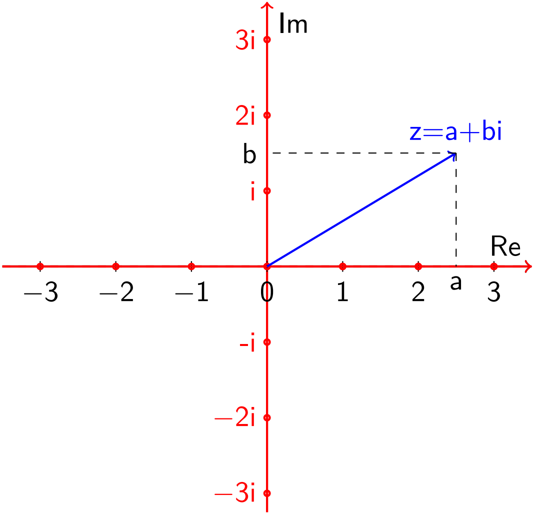
Ábrázoljuk a számhalmazokat a valós számegyenesen: $\mathbb{C}$



A racionális számok "sűrűn" helyezkednek el a számegyenesen, azaz minden két pont között van egy további pont. A valós számok lefedik a teljes számegyenest. Így ez már tovább nem bővíthető. Ahhoz, hogy a negatív számoknak is legyen gyöke, új irányba kell bővítenünk, tehát kell egy másik tengely és azon egy egység. Ez legyen az i, melyet komplex egységnek nevezünk és $i^2 = -1$.

Számhalmazok ábrázolása

Ábrázoljuk a számhalmazokat a valós számegyenesen: $\mathbb{C}$



A racionális számok "sűrűn" helyezkednek el a számegyenesen, azaz minden két pont között van egy további pont. A valós számok lefedik a teljes számegyenest. Így ez már tovább nem bővíthető. Ahhoz, hogy a negatív számoknak is legyen gyöke, új irányba kell bővítenünk, tehát kell egy másik tengely és azon egy egység. Ez legyen az i, melyet komplex egységnek nevezünk és $i^2 = -1$.

Komplex számok definíciója

Definíció

Komplex számnak nevezzük a $z = a + bi$ *alakú kifejezéseket, ahol a és b valós számok.* $\mathbb{C} = \{a + bi | a, b \in \mathbb{R}\}$ *A* $z = a + bi$ *alakot a komplex szám algebrai alakjának nevezzük.*

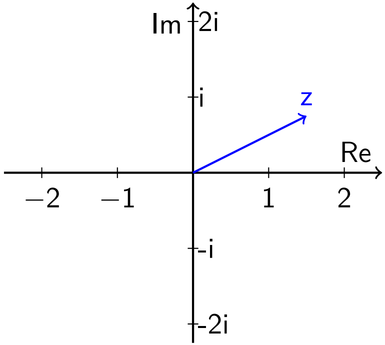
Komplex számok definíciója

Definíció

Komplex számnak nevezzük a $z = a + bi$ alakú kifejezéseket, ahol a és b valós számok. $\mathbb{C} = \{a + bi | a, b \in \mathbb{R}\}$ *A $z = a + bi$ alakot a komplex szám algebrai alakjának nevezzük.*

Definíció

Ha $z = a + bi \in \mathbb{C}$ akkor z



Komplex számok definíciója

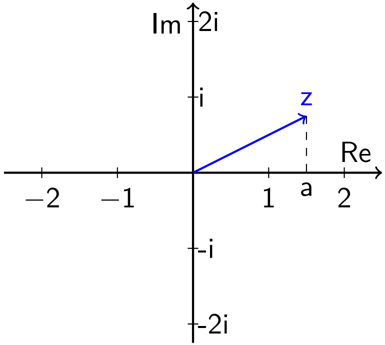
Definíció

Komplex számnak nevezzük a $z = a + bi$ alakú kifejezéseket, ahol a és b valós számok. $\mathbb{C} = \{a + bi | a, b \in \mathbb{R}\}$ *A $z = a + bi$ alakot a komplex szám algebrai alakjának nevezzük.*

Definíció

Ha $z = a + bi \in \mathbb{C}$ akkor z

- *valós része $Re(z) = \Re(z) = a$,*



Komplex számok definíciója

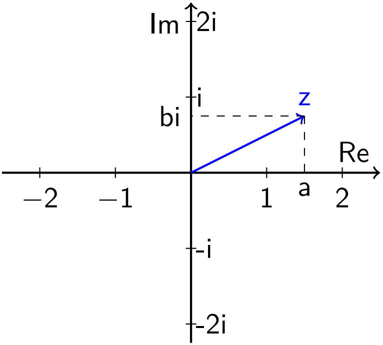
Definíció

Komplex számnak nevezzük a $z = a + bi$ *alakú kifejezéseket, ahol* a *és* b *valós számok.* $\mathbb{C} = \{a + bi | a, b \in \mathbb{R}\}$ *A* $z = a + bi$ *alakot a komplex szám algebrai alakjának nevezzük.*

Definíció

Ha $z = a + bi \in \mathbb{C}$ *akkor* z

- *valós része* $Re(z) = \Re(z) = a$,
- *képzetes része* $Im(z) = \Im(z) = b$,



Komplex számok definíciója

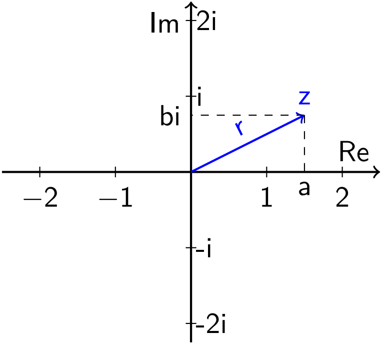
Definíció

Komplex számnak nevezzük a $z = a + bi$ alakú kifejezéseket, ahol a és b valós számok. $\mathbb{C} = \{a + bi | a, b \in \mathbb{R}\}$ *A $z = a + bi$ alakot a komplex szám algebrai alakjának nevezzük.*

Definíció

Ha $z = a + bi \in \mathbb{C}$ akkor z

- *valós része $Re(z) = \Re(z) = a$,*
- *képzetes része $Im(z) = \Im(z) = b$,*
- *hossza $|z| = r = \sqrt{a^2 + b^2}$,*



Komplex számok definíciója

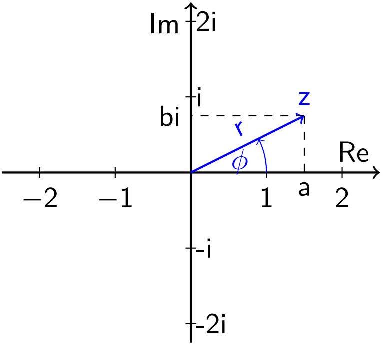
Definíció

Komplex számnak nevezzük a $z = a + bi$ alakú kifejezéseket, ahol a és b valós számok. $\mathbb{C} = \{a + bi | a, b \in \mathbb{R}\}$ *A $z = a + bi$ alakot a komplex szám algebrai alakjának nevezzük.*

Definíció

Ha $z = a + bi \in \mathbb{C}$ akkor z

- *valós része* $Re(z) = \Re(z) = a$,
- *képzetes része* $Im(z) = \Im(z) = b$,
- *hossza* $|z| = r = \sqrt{a^2 + b^2}$,
- *argumentuma* $\arg z = \phi$, *a valós tengely pozitív felétől mért szög,*



Komplex számok definíciója

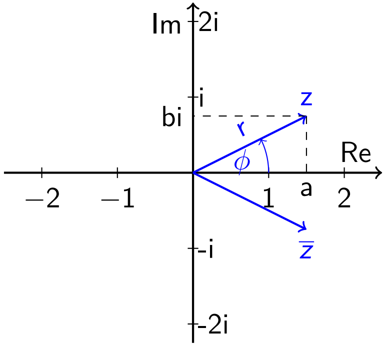
Definíció

Komplex számnak nevezzük a $z = a + bi$ alakú kifejezéseket, ahol a és b valós számok. $\mathbb{C} = \{a + bi | a, b \in \mathbb{R}\}$ *A $z = a + bi$ alakot a komplex szám algebrai alakjának nevezzük.*

Definíció

Ha $z = a + bi \in \mathbb{C}$ akkor z

- *valós része* $Re(z) = \Re(z) = a$,
- *képzetes része* $Im(z) = \Im(z) = b$,
- *hossza* $|z| = r = \sqrt{a^2 + b^2}$,
- *argumentuma* $\arg z = \phi$, *a valós tengely pozitív felétől mért szög,*
- *konjugáltja* $\overline{z} = a - bi$.



Műveletek komplex számokkal – algebrai alak

Definíció

Legyen adott $z_1 = a_1 + b_1 i$ *és* $z_2 = a_2 + b_2 i$ *komplex számok. Ekkor a valós számokon értelmezett alapműveleteket a következő módon terjesztjük ki a komplex számokra:*

$+ :\ z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i$

$- :\ z_1 - z_2 = (a_1 - a_2) + (b_1 - b_2)i$

$\times :\ z_1 \cdot z_2 = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + a_2 b_1)i$

$$\div :\ \frac{z_1}{z_2} = \left(\frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2}\right) + \left(\frac{a_2 b_1 - a_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2}\right) i$$

Műveletek komplex számokkal – algebrai alak

Definíció

Legyen adott $z_1 = a_1 + b_1 i$ és $z_2 = a_2 + b_2 i$ komplex számok. Ekkor a valós számokon értelmezett alapműveleteket a következő módon terjesztjük ki a komplex számokra:

$+ :\ z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i$

$- :\ z_1 - z_2 = (a_1 - a_2) + (b_1 - b_2)i$

$\times :\ z_1 \cdot z_2 = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + a_2 b_1)i$

$$\div :\ \frac{z_1}{z_2} = \left(\frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2}\right) + \left(\frac{a_2 b_1 - a_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2}\right) i$$

Később szükség lesz a következő speciális esetre:

$z_1 \cdot \bar{z}_1 = (a_1 a_1 - b_1(-b_1)) + (a_1(-b_1) + a_1 b_1)i = a_1^2 + b_1^2 = |z_1|^2$

Tehát ha egy komplex számot a konjugáltjával szorzunk, akkor a hossznégyzetét kapjuk, ami valós!

Műveletek komplex számokkal – magyarázat

- Az összeadás és a kivonás egyszerű, mert valósat a valóssal, képzeteset a képzetessel adunk össze, vagy vonunk ki.

Műveletek komplex számokkal – magyarázat

- $\pm$ Az összeadás és a kivonás egyszerű, mert valósat a valóssal, képzeteset a képzetessel adunk össze, vagy vonunk ki.
- $\times$ A szorzásnál csak mindenkit mindenkivel összeszorzunk és használjuk az $i^2 = -1$ összefüggést.

$$z_1 \cdot z_2 = (a_1 + b_1 i)(a_2 + b_2 i) = a_1 a_2 + a_1 b_2 i + a_2 b_1 i + b_1 b_2 i^2 =$$
$$= (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + a_2 b_1) i$$

Műveletek komplex számokkal – magyarázat

$\pm$ Az összeadás és a kivonás egyszerű, mert valósat a valóssal, képzeteset a képzetessel adunk össze, vagy vonunk ki.

$\times$ A szorzásnál csak mindenkit mindenkivel összeszorzunk és használjuk az $i^2 = -1$ összefüggést.

$$z_1 \cdot z_2 = (a_1 + b_1 i)(a_2 + b_2 i) = a_1 a_2 + a_1 b_2 i + a_2 b_1 i + b_1 b_2 i^2 = \\ = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + a_2 b_1) i$$

$\div$ A hányados a legtrükkösebb, mert nem tudjuk, hogyan osszunk komplex számmal. Azt viszont tudjuk, valóssal hogyan kell osztani. Ezért keresünk egy olyan (komplex) számot, amivel bővítve a törtet, a nevezőnek nem lesz képzetes része. Mint láttuk, a konjugált ilyen:

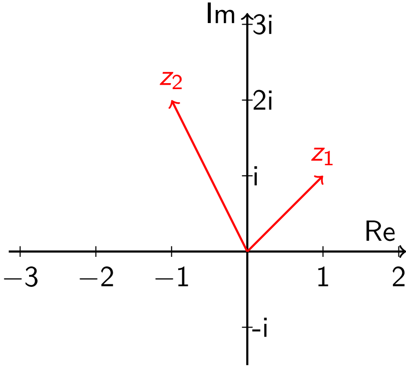
$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \overline{z}_2}{z_2 \overline{z}_2} = \frac{(a_1 + b_1 i)(a_2 - b_2 i)}{(a_2 + b_2 i)(a_2 - b_2 i)} = \frac{a_1 a_2 - a_1 b_2 i + a_2 b_1 i - b_1 b_2 i^2}{a_2^2 - (b_2 i)^2} = \\ = \frac{(a_1 a_2 + b_1 b_2) + (a_2 b_1 - a_1 b_2) i}{a_2^2 + b_2^2} = \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} + \frac{a_2 b_1 - a_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} i$$

Példa

1. példa Legyen $z_1 = 1 + i$ és $z_2 = -1 + 2i$. Adjuk meg a $\mathrm{Re}(z_1)$, $\mathrm{Im}(z_2)$, $|z_2|$ és $\arg(z_1)$ kifejezések értéket, továbbá adjuk meg a $z_1 + z_2$, $z_1 - z_2$, $z_1 \cdot z_2$, $\frac{z_1}{z_2}$ és $\overline{z}_2$ komplex számok algebrai alakját és ábrázoljuk őket a komplex számsíkon.

Példa

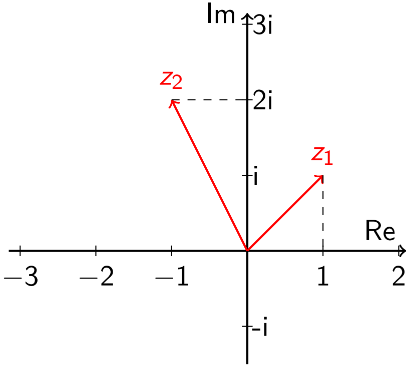
1. példa Legyen $z_1 = 1 + i$ és $z_2 = -1 + 2i$. Adjuk meg a $\mathrm{Re}(z_1)$, $\mathrm{Im}(z_2)$, $|z_2|$ és $\arg(z_1)$ kifejezések értéket, továbbá adjuk meg a $z_1 + z_2$, $z_1 - z_2$, $z_1 \cdot z_2$, $\frac{z_1}{z_2}$ és $\overline{z}_2$ komplex számok algebrai alakját és ábrázoljuk őket a komplex számsíkon.



Példa

1. példa Legyen $z_1 = 1 + i$ és $z_2 = -1 + 2i$. Adjuk meg a $\mathrm{Re}(z_1)$, $\mathrm{Im}(z_2)$, $|z_2|$ és $\arg(z_1)$ kifejezések értéket, továbbá adjuk meg a $z_1 + z_2$, $z_1 - z_2$, $z_1 \cdot z_2$, $\frac{z_1}{z_2}$ és $\overline{z}_2$ komplex számok algebrai alakját és ábrázoljuk őket a komplex számsíkon.

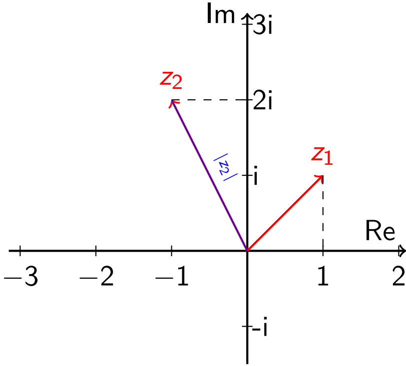
- $\mathrm{Re}(z_1) = 1$, $\mathrm{Im}(z_2) = 2$ (nem $2i$!)



Példa

1. példa Legyen $z_1 = 1 + i$ és $z_2 = -1 + 2i$. Adjuk meg a $\mathrm{Re}(z_1)$, $\mathrm{Im}(z_2)$, $|z_2|$ és $\arg(z_1)$ kifejezések értéket, továbbá adjuk meg a $z_1 + z_2$, $z_1 - z_2$, $z_1 \cdot z_2$, $\frac{z_1}{z_2}$ és $\overline{z}_2$ komplex számok algebrai alakját és ábrázoljuk őket a komplex számsíkon.

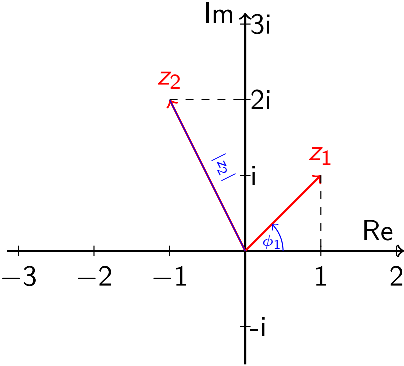
- $\mathrm{Re}(z_1) = 1$, $\mathrm{Im}(z_2) = 2$ (nem $2i$!)
- $|z_2| = \sqrt{(-1)^2 + 2^2} = \sqrt{1+4} = \sqrt{5}$



Példa

1. példa Legyen $z_1 = 1 + i$ és $z_2 = -1 + 2i$. Adjuk meg a $\mathrm{Re}(z_1)$, $\mathrm{Im}(z_2)$, $|z_2|$ és $\arg(z_1)$ kifejezések értéket, továbbá adjuk meg a $z_1 + z_2$, $z_1 - z_2$, $z_1 \cdot z_2$, $\frac{z_1}{z_2}$ és $\overline{z}_2$ komplex számok algebrai alakját és ábrázoljuk őket a komplex számsíkon.

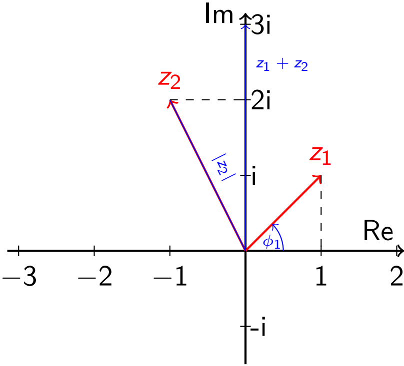
- $\mathrm{Re}(z_1) = 1$, $\mathrm{Im}(z_2) = 2$ (nem $2i$!)
- $|z_2| = \sqrt{(-1)^2 + 2^2} = \sqrt{1+4} = \sqrt{5}$
- $\arg(z_1) = \phi_1 = 45^\circ$ (vagy $= \frac{\pi}{4}$)



Példa

1. példa Legyen $z_1 = 1 + i$ és $z_2 = -1 + 2i$. Adjuk meg a $\mathrm{Re}(z_1)$, $\mathrm{Im}(z_2)$, $|z_2|$ és $\arg(z_1)$ kifejezések értéket, továbbá adjuk meg a $z_1 + z_2$, $z_1 - z_2$, $z_1 \cdot z_2$, $\frac{z_1}{z_2}$ és $\overline{z}_2$ komplex számok algebrai alakját és ábrázoljuk őket a komplex számsíkon.

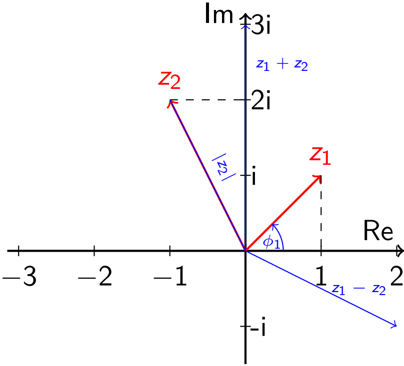
- $\mathrm{Re}(z_1) = 1$, $\mathrm{Im}(z_2) = 2$ (nem $2i$!)
- $|z_2| = \sqrt{(-1)^2 + 2^2} = \sqrt{1+4} = \sqrt{5}$
- $\arg(z_1) = \phi_1 = 45^\circ$ (vagy $= \frac{\pi}{4}$)
- $z_1 + z_2 = (1 + (-1)) + (1 + 2)i = 3i$



Példa

1. példa Legyen $z_1 = 1 + i$ és $z_2 = -1 + 2i$. Adjuk meg a $\mathrm{Re}(z_1)$, $\mathrm{Im}(z_2)$, $|z_2|$ és $\arg(z_1)$ kifejezések értéket, továbbá adjuk meg a $z_1 + z_2$, $z_1 - z_2$, $z_1 \cdot z_2$, $\frac{z_1}{z_2}$ és $\overline{z}_2$ komplex számok algebrai alakját és ábrázoljuk őket a komplex számsíkon.

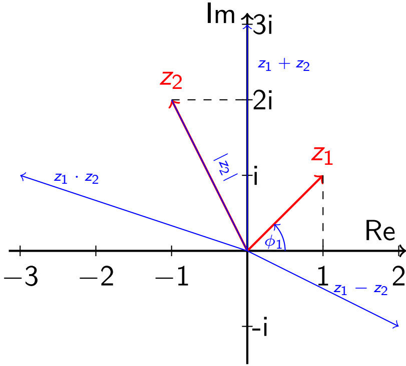
- $\mathrm{Re}(z_1) = 1$, $\mathrm{Im}(z_2) = 2$ (nem $2i$!)
- $|z_2| = \sqrt{(-1)^2 + 2^2} = \sqrt{1+4} = \sqrt{5}$
- $\arg(z_1) = \phi_1 = 45°$ (vagy $= \frac{\pi}{4}$)
- $z_1 + z_2 = (1 + (-1)) + (1 + 2)i = 3i$
- $z_1 - z_2 = (1 - (-1)) + (1 - 2)i = 2 - i$



Példa

1. példa Legyen $z_1 = 1 + i$ és $z_2 = -1 + 2i$. Adjuk meg a $\mathrm{Re}(z_1)$, $\mathrm{Im}(z_2)$, $|z_2|$ és $\arg(z_1)$ kifejezések értéket, továbbá adjuk meg a $z_1 + z_2$, $z_1 - z_2$, $z_1 \cdot z_2$, $\frac{z_1}{z_2}$ és $\overline{z}_2$ komplex számok algebrai alakját és ábrázoljuk őket a komplex számsíkon.

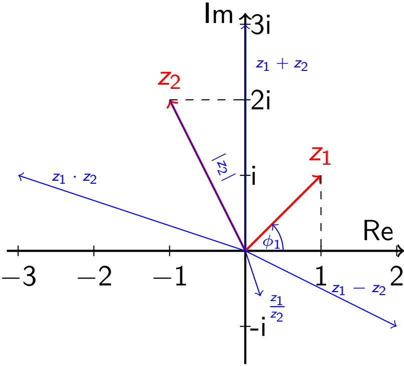
- $\mathrm{Re}(z_1) = 1$, $\mathrm{Im}(z_2) = 2$ (nem $2i$!)
- $|z_2| = \sqrt{(-1)^2 + 2^2} = \sqrt{1+4} = \sqrt{5}$
- $\arg(z_1) = \phi_1 = 45^\circ$ (vagy $=\frac{\pi}{4}$)
- $z_1 + z_2 = (1 + (-1)) + (1 + 2)i = 3i$
- $z_1 - z_2 = (1 - (-1)) + (1 - 2)i = 2 - i$
- $z_1 \cdot z_2 = -1 - 2 + (-1 + 2)i = -3 + i$



Példa

1. példa Legyen $z_1 = 1 + i$ és $z_2 = -1 + 2i$. Adjuk meg a $\mathrm{Re}(z_1)$, $\mathrm{Im}(z_2)$, $|z_2|$ és $\arg(z_1)$ kifejezések értéket, továbbá adjuk meg a $z_1 + z_2$, $z_1 - z_2$, $z_1 \cdot z_2$, $\frac{z_1}{z_2}$ és $\overline{z}_2$ komplex számok algebrai alakját és ábrázoljuk őket a komplex számsíkon.

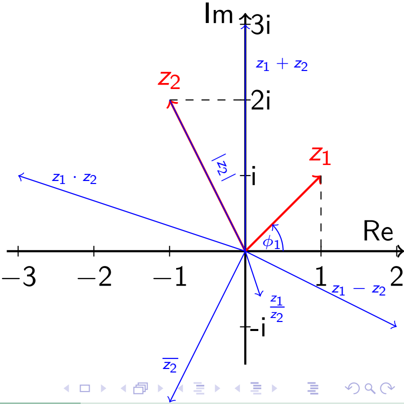
- $\mathrm{Re}(z_1) = 1$, $\mathrm{Im}(z_2) = 2$ (nem $2i$!)
- $|z_2| = \sqrt{(-1)^2 + 2^2} = \sqrt{1+4} = \sqrt{5}$
- $\arg(z_1) = \phi_1 = 45^\circ$ (vagy $= \frac{\pi}{4}$)
- $z_1 + z_2 = (1 + (-1)) + (1 + 2)i = 3i$
- $z_1 - z_2 = (1 - (-1)) + (1 - 2)i = 2 - i$
- $z_1 \cdot z_2 = -1 - 2 + (-1 + 2)i = -3 + i$
- $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{-1+2}{5} + \dfrac{-1-2}{5}i = \dfrac{1}{5} - \dfrac{3}{5}i$



Példa

1. példa Legyen $z_1 = 1 + i$ és $z_2 = -1 + 2i$. Adjuk meg a $\mathrm{Re}(z_1)$, $\mathrm{Im}(z_2)$, $|z_2|$ és $\arg(z_1)$ kifejezések értéket, továbbá adjuk meg a $z_1 + z_2$, $z_1 - z_2$, $z_1 \cdot z_2$, $\frac{z_1}{z_2}$ és $\overline{z}_2$ komplex számok algebrai alakját és ábrázoljuk őket a komplex számsíkon.

- $\mathrm{Re}(z_1) = 1$, $\mathrm{Im}(z_2) = 2$ (nem $2i$!)
- $|z_2| = \sqrt{(-1)^2 + 2^2} = \sqrt{1+4} = \sqrt{5}$
- $\arg(z_1) = \phi_1 = 45^\circ$ (vagy $=\frac{\pi}{4}$)
- $z_1 + z_2 = (1 + (-1)) + (1 + 2)i = 3i$
- $z_1 - z_2 = (1 - (-1)) + (1 - 2)i = 2 - i$
- $z_1 \cdot z_2 = -1 - 2 + (-1 + 2)i = -3 + i$
- $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{-1+2}{5} + \dfrac{-1-2}{5} i = \dfrac{1}{5} - \dfrac{3}{5} i$
- $\overline{z}_2 = -1 - 2i$



Hatványozás, gyökvonás

Azt láttuk, hogy a négy alapművelet elvégezhető algebrai alakban. Mivel a szorzás megy, ezért a hatványozás is működik:

$$z^n = (a+bi)^n = (a+bi)(a+bi)\dots(a+bi) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k i^k$$

Az utolsó összefüggés az úgynevezett Binomiális tétel. A szumma minden páros indexű tagjában az i páros hatványa szerepel, ami ± 1 lesz és minden páratlan indexű tagjában páratlan hatványon, ami $\pm i$ lesz. Így szét lehet válogatni a valós és a képzetes részeket. Ez, ha n nem túl nagy, akkor szépen működik, de ha n nagy, akkor lassú és fáradtságos, nem az igazi.

Hatványozás, gyökvonás

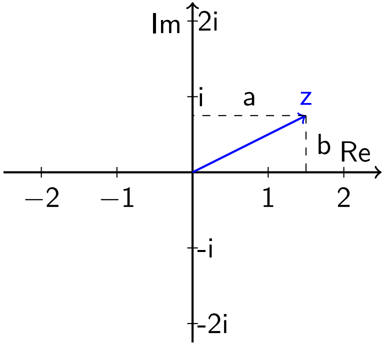
Azt láttuk, hogy a négy alapművelet elvégezhető algebrai alakban. Mivel a szorzás megy, ezért a hatványozás is működik:

$$z^n = (a+bi)^n = (a+bi)(a+bi)\dots(a+bi) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k i^k$$

Az utolsó összefüggés az úgynevezett Binomiális tétel. A szumma minden páros indexű tagjában az i páros hatványa szerepel, ami ± 1 lesz és minden páratlan indexű tagjában páratlan hatványon, ami $\pm i$ lesz. Így szét lehet válogatni a valós és a képzetes részeket. Ez, ha n nem túl nagy, akkor szépen működik, de ha n nagy, akkor lassú és fáradtságos, nem az igazi. Mi a helyzet a gyökvonással, hiszen a komplex számok bevezetésével az volt a cél, hogy minden számnak legyen akárhányadik gyöke. Hogyan keressük meg például a $\sqrt{2+2i}$ kifejezés értékét? Algebrai alakban sajnos nincs rá jó módszer.

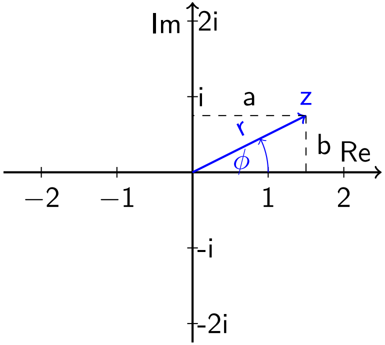
Trigonometrikus alak

A síkon nem csak a Descartes derékszögű koordinátarendszert ismerjük.



Trigonometrikus alak

A síkon nem csak a Descartes derékszögű koordinátarendszert ismerjük.
Használhatjuk a polár-koordinátarendszert is, ahol egy pontot az origótól mért távolságával (r) és az x tengely pozitív felével bezárt szögével (ϕ) koordinátázunk.

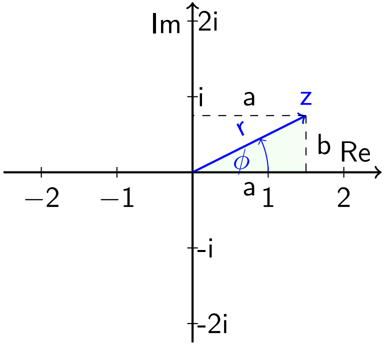


Trigonometrikus alak

A síkon nem csak a Descartes derékszögű koordinátarendszert ismerjük.
Használhatjuk a polár-koordinátarendszert is, ahol egy pontot az origótól mért távolságával (r) és az x tengely pozitív felével bezárt szögével (ϕ) koordinátázunk.
A háromszög trigonometriájának alapján:

$\cos\phi = \dfrac{a}{r} \Rightarrow a = r\cos\phi$

$\sin\phi = \dfrac{b}{r} \Rightarrow b = r\sin\phi$



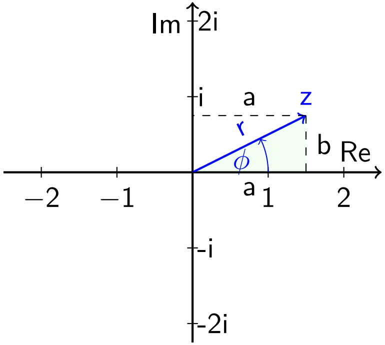
Ekkor $z = a + bi = r\cos\phi + (r\sin\phi)i = r(\cos\phi + i\sin\phi)$

Trigonometrikus alak

A síkon nem csak a Descartes derékszögű koordinátarendszert ismerjük.
Használhatjuk a polár-koordinátarendszert is, ahol egy pontot az origótól mért távolságával (r) és az x tengely pozitív felével bezárt szögével (ϕ) koordinátázunk.
A háromszög trigonometriájának alapján:

$\cos\phi = \frac{a}{r} \Rightarrow a = r\cos\phi$

$\sin\phi = \frac{b}{r} \Rightarrow b = r\sin\phi$



Ekkor $z = a + bi = r\cos\phi + (r\sin\phi)i = r(\cos\phi + i\sin\phi)$

Definíció

Egy $z \in \mathbb{C}$ szám trigonometrikus alakja $z = r(\cos\phi + i\sin\phi)$, ahol $r = |z|$ a z komplex szám hossza, $\phi = \arg z$ pedig az argumentuma.

Műveletek komplex számokkal – trigonometrikus alak

Legyen $z_1 = r_1(\cos\phi_1 + i\sin\phi_1)$ és $z_2 = r_2(\cos\phi_2 + i\sin\phi_2)$:

Műveletek komplex számokkal – trigonometrikus alak

Legyen $z_1 = r_1(\cos\phi_1 + i\sin\phi_1)$ és $z_2 = r_2(\cos\phi_2 + i\sin\phi_2)$:

$\pm$: Sajnos az összeadásra és a kivonásra elég bonyolult a formulánk, erre használjuk inkább az algebrai alakot.

Műveletek komplex számokkal – trigonometrikus alak

Legyen $z_1 = r_1(\cos\phi_1 + i\sin\phi_1)$ és $z_2 = r_2(\cos\phi_2 + i\sin\phi_2)$:

$\pm$: Sajnos az összeadásra és a kivonásra elég bonyolult a formulánk, erre használjuk inkább az algebrai alakot.

$\times$: $z_1 \cdot z_2 = r_1(\cos\phi_1 + i\sin\phi_1) \cdot r_2(\cos\phi_2 + i\sin\phi_2) =$
$r_1 r_2 \left[(\cos\phi_1 \cos\phi_2 - \sin\phi_1 \sin\phi_2) + i(\cos\phi_1 \sin\phi_2 + \cos\phi_2 \sin\phi_1)\right] =$

Műveletek komplex számokkal – trigonometrikus alak

Legyen $z_1 = r_1(\cos\phi_1 + i\sin\phi_1)$ és $z_2 = r_2(\cos\phi_2 + i\sin\phi_2)$:

- $\pm$: Sajnos az összeadásra és a kivonásra elég bonyolult a formulánk, erre használjuk inkább az algebrai alakot.
- $\times$: $z_1 \cdot z_2 = r_1(\cos\phi_1 + i\sin\phi_1) \cdot r_2(\cos\phi_2 + i\sin\phi_2) =$ $r_1 r_2 \left[(\cos\phi_1\cos\phi_2 - \sin\phi_1\sin\phi_2) + i(\cos\phi_1\sin\phi_2 + \cos\phi_2\sin\phi_1)\right] =$ $r_1 r_2(\cos(\phi_1+\phi_2) + i\sin(\phi_1+\phi_2))$, ahol az utolsó egyenlőséghez felhasználtuk a trigonometrikus függvényekre vonatkozó addíciós formulákat.

Műveletek komplex számokkal – trigonometrikus alak

Legyen $z_1 = r_1(\cos\phi_1 + i\sin\phi_1)$ és $z_2 = r_2(\cos\phi_2 + i\sin\phi_2)$:

- $\pm$: Sajnos az összeadásra és a kivonásra elég bonyolult a formulánk, erre használjuk inkább az algebrai alakot.
- $\times$: $z_1 \cdot z_2 = r_1(\cos\phi_1 + i\sin\phi_1) \cdot r_2(\cos\phi_2 + i\sin\phi_2) =$ $r_1 r_2\left[(\cos\phi_1\cos\phi_2 - \sin\phi_1\sin\phi_2) + i(\cos\phi_1\sin\phi_2 + \cos\phi_2\sin\phi_1)\right] =$ $r_1 r_2(\cos(\phi_1+\phi_2) + i\sin(\phi_1+\phi_2))$, ahol az utolsó egyenlőséghez felhasználtuk a trigonometrikus függvényekre vonatkozó addíciós formulákat. Tehét két trigonometrikus alakban lévő komplex számot úgy szorzunk össze, hogy hosszakat összeszorozzuk, az argumentumokat pedig összeadjuk!

Műveletek komplex számokkal – trigonometrikus alak

Legyen $z_1 = r_1(\cos\phi_1 + i\sin\phi_1)$ és $z_2 = r_2(\cos\phi_2 + i\sin\phi_2)$:

$\pm$: Sajnos az összeadásra és a kivonásra elég bonyolult a formulánk, erre használjuk inkább az algebrai alakot.

$\times$: $z_1 \cdot z_2 = r_1(\cos\phi_1 + i\sin\phi_1)\cdot r_2(\cos\phi_2 + i\sin\phi_2) =$ $r_1 r_2\left[(\cos\phi_1\cos\phi_2 - \sin\phi_1\sin\phi_2) + i(\cos\phi_1\sin\phi_2 + \cos\phi_2\sin\phi_1)\right] =$ $r_1 r_2(\cos(\phi_1+\phi_2) + i\sin(\phi_1+\phi_2))$, ahol az utolsó egyenlőséghez felhasználtuk a trigonometrikus függvényekre vonatkozó addíciós formulákat. Tehát két trigonometrikus alakban lévő komplex számot úgy szorzunk össze, hogy hosszakat összeszorozzuk, az argumentumokat pedig összeadjuk!

$(\ )^n$: A fentiek segítségével kapunk egy gyorsabb formulát a hatványozásra:

$$z^n = \underbrace{z\cdot z\ldots z}_{n} = \underbrace{r\cdot\ldots\cdot r}_{n}\left(\cos(\underbrace{\phi+\cdots+\phi}_{n}) + i\sin(\underbrace{\phi+\cdots+\phi}_{n})\right) =$$
$$= r^n\left(\cos(n\cdot\phi) + i\sin(n\cdot\phi)\right)$$

Műveletek komplex számokkal – trigonometrikus alak

$\div$: Felhasználjuk az ismereteinket a hatványozásról:

$$\frac{z_1}{z_2} = z_1 \cdot z_2^{-1} =$$

Műveletek komplex számokkal – trigonometrikus alak

$\div$: Felhasználjuk az ismereteinket a hatványozásról:

$$\frac{z_1}{z_2} = z_1 \cdot z_2^{-1} = r_1(\cos\phi_1 + i\sin\phi_1) \cdot r_2^{-1}(\cos((-1)\phi_2) + i\sin((-1)\phi_2)) =$$

Műveletek komplex számokkal – trigonometrikus alak

$\div$: Felhasználjuk az ismereteinket a hatványozásról:

$$\frac{z_1}{z_2} = z_1 \cdot z_2^{-1} = r_1(\cos\phi_1 + i\sin\phi_1) \cdot r_2^{-1}(\cos((-1)\phi_2) + i\sin((-1)\phi_2)) =$$

$$= \frac{r_1}{r_2}(\cos(\phi_1 - \phi_2) + i\sin(\phi_1 - \phi_2))$$

Tehét két trigonometrikus alakban lévő komplex számot úgy osztunk el egymással, hogy hosszakat elosztjuk, az argumentumokat pedig kivonjuk!

Műveletek komplex számokkal – trigonometrikus alak

$\div$: Felhasználjuk az ismereteinket a hatványozásról:

$$\frac{z_1}{z_2} = z_1 \cdot z_2^{-1} = r_1(\cos\phi_1 + i\sin\phi_1) \cdot r_2^{-1}(\cos((-1)\phi_2) + i\sin((-1)\phi_2)) =$$

$$= \frac{r_1}{r_2}(\cos(\phi_1 - \phi_2) + i\sin(\phi_1 - \phi_2))$$

Tehát két trigonometrikus alakban lévő komplex számot úgy osztunk el egymással, hogy hosszakat elosztjuk, az argumentumokat pedig kivonjuk!

$\sqrt{}$: A gyökvonásnál keressünk olyan komplex számokat, melyeknek n-edi hatványuk a megadott $z = r(\cos\phi + i\sin\phi)$. Ha mondjuk $v \in \mathbb{C}$ ilyen, akkor $|v|$ olyan, hogy $|v|^n = r$ és $\arg v$ olyan, hogy $n \cdot \arg v = \phi + k \cdot 360°$:

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\phi + k \cdot 360°}{n} + i\sin\frac{\phi + k \cdot 360°}{n}\right), \text{ ahol } k = 0, 1, \ldots, n-1$$

Műveletek komplex számokkal – trigonometrikus alak

$\div$: Felhasználjuk az ismereteinket a hatványozásról:

$$\frac{z_1}{z_2} = z_1 \cdot z_2^{-1} = r_1(\cos\phi_1 + i\sin\phi_1) \cdot r_2^{-1}(\cos((-1)\phi_2) + i\sin((-1)\phi_2)) =$$

$$= \frac{r_1}{r_2}(\cos(\phi_1 - \phi_2) + i\sin(\phi_1 - \phi_2))$$

Tehát két trigonometrikus alakban lévő komplex számot úgy osztunk el egymással, hogy hosszakat elosztjuk, az argumentumokat pedig kivonjuk!

$\sqrt{}$: A gyökvonásnál keressünk olyan komplex számokat, melyeknek n-edi hatványuk a megadott $z = r(\cos\phi + i\sin\phi)$. Ha mondjuk $v \in \mathbb{C}$ ilyen, akkor $|v|$ olyan, hogy $|v|^n = r$ és $\arg v$ olyan, hogy $n \cdot \arg v = \phi + k \cdot 360°$:

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\phi + k\cdot 360°}{n} + i\sin\frac{\phi + k\cdot 360°}{n}\right), \text{ ahol } k = 0, 1, \ldots, n-1$$

Tehát egy n-edik gyökvonásnál n db különböző megoldást kapunk!

Algebrai alak $\longleftrightarrow$ Trigonometrikus alak

Hogyan tudunk a komplex szám kétféle alakja között váltani?

- Trigonometrikus $\Rightarrow$ Algebrai $z = r(\cos\phi + i\sin\phi)$, $a, b = ?$

Algebrai alak $\longleftrightarrow$ Trigonometrikus alak

Hogyan tudunk a komplex szám kétféle alakja között váltani?

- Trigonometrikus $\Rightarrow$ Algebrai $z = r(\cos\phi + i\sin\phi)$, $a, b =?$
  Ekkor egyszerű a dolgunk: $a = r\cos\phi$, $b = r\sin\phi$.

Algebrai alak $\longleftrightarrow$ Trigonometrikus alak

Hogyan tudunk a komplex szám kétféle alakja között váltani?

- Trigonometrikus $\Rightarrow$ Algebrai $z = r(\cos\phi + i\sin\phi)$, $a, b =?$
  Ekkor egyszerű a dolgunk: $a = r\cos\phi$, $b = r\sin\phi$.
- Algebrai $\Rightarrow$ Trigonometrikus $z = a + bi$, $r, \phi =?$

Algebrai alak $\longleftrightarrow$ Trigonometrikus alak

Hogyan tudunk a komplex szám kétféle alakja között váltani?

- Trigonometrikus $\Rightarrow$ Algebrai $z = r(\cos\phi + i\sin\phi)$, $a, b =?$
  Ekkor egyszerű a dolgunk: $a = r\cos\phi$, $b = r\sin\phi$.
- Algebrai $\Rightarrow$ Trigonometrikus $z = a + bi$, $r, \phi =?$
  Az r a szám hossza, tehát $r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Algebrai alak $\longleftrightarrow$ Trigonometrikus alak

Hogyan tudunk a komplex szám kétféle alakja között váltani?

- Trigonometrikus $\Rightarrow$ Algebrai $z = r(\cos\phi + i\sin\phi)$, $a, b =?$
  Ekkor egyszerű a dolgunk: $a = r\cos\phi$, $b = r\sin\phi$.
- Algebrai $\Rightarrow$ Trigonometrikus $z = a + bi$, $r, \phi =?$
  Az r a szám hossza, tehát $r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$.
  A ϕ megállapításánál ismét használnunk kell a trigonometriát:

$$\frac{b}{a} = \frac{r\sin\phi}{r\cos\phi} = \tan\phi \Rightarrow \phi = \arctan\left(\frac{b}{a}\right) (+\pi \text{ ha } a < 0)$$

A $+\pi$-re azért van szükség, mert az $\arg z \in [0, 2\pi[$, de a tangens függvény π periodikus, így például a $-z = -a - bi$ komplex számra $\frac{-b}{-a} = \frac{b}{a}$ adódik. Arra is figyeljünk, hogy az arcustangens függvény értékkészlete $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$. Segítség lehet a szám kb ábrázolása és abból, hogy melyik síknegyedbe esik, következtethetünk az argumentumára.

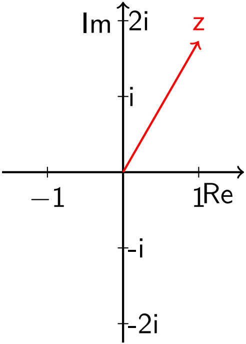
Példa

1. Példa Számítsuk ki a $z = 1 + \sqrt{3}i$ tizedik hatványát és negyedik gyökét.

Példa

1. Példa Számítsuk ki a $z = 1 + \sqrt{3}i$ tizedik hatványát és negyedik gyökét.

Érdemes ábrázolni z-t a komplex számsíkon:

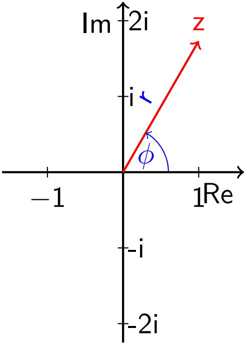


Példa

1. Példa Számítsuk ki a $z = 1 + \sqrt{3}i$ tizedik hatványát és negyedik gyökét.

Érdemes ábrázolni z-t a komplex számsíkon:

- Térjünk át trigonometrikus alakra:
  $r = \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{1+3} = \sqrt{4} = 2$
  $\phi = \arctan\left(\frac{\sqrt{3}}{1}\right) = \frac{\pi}{3}$ vagy $\phi = 60^\circ$
  $z = 2(\cos 60^\circ + i \sin 60^\circ)$

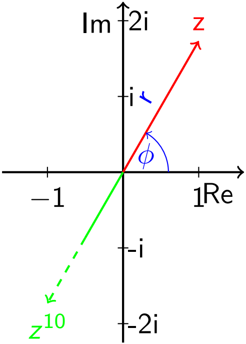


Példa

1. Példa Számítsuk ki a $z = 1 + \sqrt{3}i$ tizedik hatványát és negyedik gyökét.

Érdemes ábrázolni z-t a komplex számsíkon:

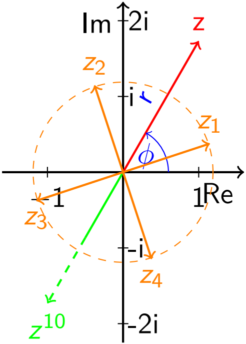
- Térjünk át trigonometrikus alakra:
  $r = \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{1+3} = \sqrt{4} = 2$
  $\phi = \arctan\left(\frac{\sqrt{3}}{1}\right) = \frac{\pi}{3}$ vagy $\phi = 60^\circ$
  $z = 2(\cos 60^\circ + i \sin 60^\circ)$
- $z^{10} = 2^{10}(\cos(600^\circ + i \sin 600^\circ) =$
  $= 1024(\cos 240^\circ + i \sin 240^\circ)$



Példa

1. Példa Számítsuk ki a $z = 1 + \sqrt{3}i$ tizedik hatványát és negyedik gyökét.

Érdemes ábrázolni z-t a komplex számsíkon:



- Térjünk át trigonometrikus alakra:
  $r = \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{1+3} = \sqrt{4} = 2$
  $\phi = \arctan\left(\frac{\sqrt{3}}{1}\right) = \frac{\pi}{3}$ vagy $\phi = 60^\circ$
  $z = 2(\cos 60^\circ + i \sin 60^\circ)$
- $z^{10} = 2^{10}(\cos(600^\circ + i \sin 600^\circ) =$
  $= 1024(\cos 240^\circ + i \sin 240^\circ)$
- $\sqrt[4]{z} = \sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{60^\circ + k\cdot 360^\circ}{4} + i \sin\frac{60^\circ + k\cdot 360^\circ}{4}\right) =$
  $= \sqrt[4]{2}\left(\cos(15^\circ + k\cdot 90^\circ) + i \sin(15^\circ + k\cdot 90^\circ)\right)$, ahol $k = 0, 1, 2, 3$.
  $z_1 = \sqrt[4]{2}(\cos 15^\circ + i \sin 15^\circ)$, $z_2 = \sqrt[4]{2}(\cos 105^\circ + i \sin 105^\circ)$,
  $z_3 = \sqrt[4]{2}(\cos 195^\circ + i \sin 195^\circ)$, $z_4 = \sqrt[4]{2}(\cos 285^\circ + i \sin 285^\circ)$

Megjegyzések

- Mint az előző példából is látszik, a gyökvonás során kapott megoldások egy origó középpontú körön helyezkednek el. Ezen felül a megoldások mindig egy szabályos n-szög csúcsaiba mutatnak.

Megjegyzések

- Mint az előző példából is látszik, a gyökvonás során kapott megoldások egy origó középpontú körön helyezkednek el. Ezen felül a megoldások mindig egy szabályos n-szög csúcsaiba mutatnak.
- Az argumentum meghatározására szolgáló képlet $a = 0$ esetén nem használható (0-val osztunk), de ilyenkor könnyű a dolgunk, mert ϕ 90° vagy 270°, attól függően, hogy $b > 0$ vagy $b < 0$.

Megjegyzések

- Mint az előző példából is látszik, a gyökvonás során kapott megoldások egy origó középpontű körön helyezkednek el. Ezen felül a megoldások mindig egy szabályos n-szög csúcsaiba mutatnak.
- Az argumentum meghatározására szolgáló képlet $a = 0$ esetén nem használható (0-val osztunk), de ilyenkor könnyű a dolgunk, mert ϕ 90° vagy 270°, attól függően, hogy $b > 0$ vagy $b < 0$.
- Az előbbi logika mentén valós számok ($b = 0$) trigonometrikus alakjában ϕ 0° vagy 180°, attól függően, hogy $a > 0$ vagy $a < 0$.

Megjegyzések

- Mint az előző példából is látszik, a gyökvonás során kapott megoldások egy origó középpontú körön helyezkednek el. Ezen felül a megoldások mindig egy szabályos n-szög csúcsaiba mutatnak.
- Az argumentum meghatározására szolgáló képlet $a = 0$ esetén nem használható (0-val osztunk), de ilyenkor könnyű a dolgunk, mert ϕ 90° vagy 270°, attól függően, hogy $b > 0$ vagy $b < 0$.
- Az előbbi logika mentén valós számok ($b = 0$) trigonometrikus alakjában ϕ 0° vagy 180°, attól függően, hogy $a > 0$ vagy $a < 0$.
- Feladaton belül ne váltogassuk a $^\circ$-ot és a radiánt, ha az egyikkel kezdtük el, akkor maradjunk is annál (javaslom a $^\circ$-ot).

Megjegyzések

- Mint az előző példából is látszik, a gyökvonás során kapott megoldások egy origó középpontú körön helyezkednek el. Ezen felül a megoldások mindig egy szabályos n-szög csúcsaiba mutatnak.
- Az argumentum meghatározására szolgáló képlet $a = 0$ esetén nem használható (0-val osztunk), de ilyenkor könnyű a dolgunk, mert ϕ 90° vagy 270°, attól függően, hogy $b > 0$ vagy $b < 0$.
- Az előbbi logika mentén valós számok $(b = 0)$ trigonometrikus alakjában ϕ 0° vagy 180°, attól függően, hogy $a > 0$ vagy $a < 0$.
- Feladaton belül ne váltogassuk a $^\circ$-ot és a radiánt, ha az egyikkel kezdtük el, akkor maradjunk is annál (javaslom a $^\circ$-ot).
- Érdemes az alapvető 30°,45°,60°,... szögek sinus és cosinus értékeit memorizálni, hasznos lehet. Például úgy is lehet áttérni trigonometrikus alakra, hogy az algebrai alakból kiemeljük z hosszát és ami marad, az $\cos\phi + i\sin\phi$ lesz. Ebből ϕ kitalálható.
  Pl.: $z = 1 + \sqrt{3}i \Rightarrow |z| = 2 \Rightarrow z = 2(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}) = 2(\cos 60^\circ + i\sin 60^\circ)$

Az algebra alaptétele

Tétel (Algebra alaptétele 1.)

Minden nem 0-adfokú polinomnak van gyöke a komplex számok halmazán.

Az algebra alaptétele

Tétel (Algebra alaptétele 1.)

Minden nem 0-adfokú polinomnak van gyöke a komplex számok halmazán.

Ez alapján egy n-edfokú $p(z)$ polinomnak van komplex gyök z_1 és a Bézout-tétel alapján kiemelhető belőle egy $(z - z_1)$. Ami marad, az z egy $(n-1)$-edfokú polinomja. Ezt ismételve kapjuk, hogy a gyöktényezős felbontása n db elsőfokú tagból áll. Itt persze lehetnek többszörös gyökök is és ezek alapján átfogalmazhatjuk az algebra alaptételét:

Az algebra alaptétele

Tétel (Algebra alaptétele 1.)

Minden nem 0-adfokú polinomnak van gyöke a komplex számok halmazán.

Ez alapján egy n-edfokú $p(z)$ polinomnak van komplex gyök z_1 és a Bézout-tétel alapján kiemelhető belőle egy $(z - z_1)$. Ami marad, az z egy $(n-1)$-edfokú polinomja. Ezt ismételve kapjuk, hogy a gyöktényezős felbontása n db elsőfokú tagból áll. Itt persze lehetnek többszörös gyökök is és ezek alapján átfogalmazhatjuk az algebra alaptételét:

Tétel (Algebra alaptétele 2.)

Minden $p(z)$ n-edfokú polinomnak multiplicitással számolva n db gyöke van a komplex számok halmazán és

$$p(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0 = a_n (z - z_1)(z - z_2) \ldots (z - z_n)$$

Példa

Az algebra alaptételét nem bizonyítjuk, de érdemes megfontolni, hogy a valós számok halmazán minden polinom felbomlik elsőfokúak és negatív diszkriminánsú másodfokúak szorzatára. A komplexek körében pedig már a negatív diszkriminánsú másodfokúak is tovább bomlanak, mert már tudunk negatív számokból is gyököt vonni.

Példa

Az algebra alaptételét nem bizonyítjuk, de érdemes megfontolni, hogy a valós számok halmazán minden polinom felbomlik elsőfokúak és negatív diszkriminánsú másodfokúak szorzatára. A komplexek körében pedig már a negatív diszkriminánsú másodfokúak is tovább bomlanak, mert már tudunk negatív számokból is gyököt vonni.

1. példa Adjuk meg a $p(z) = z^3 - 7z^2 + 19z - 13$ polinom gyökeit és a gyöktényezős felbontást.

Példa

Az algebra alaptételét nem bizonyítjuk, de érdemes megfontolni, hogy a valós számok halmazán minden polinom felbomlik elsőfokúak és negatív diszkriminánsú másodfokúak szorzatára. A komplexek körében pedig már a negatív diszkriminánsú másodfokúak is tovább bomlanak, mert már tudunk negatív számokból is gyököt vonni.

1. példa Adjuk meg a $p(z) = z^3 - 7z^2 + 19z - 13$ polinom gyökeit és a gyöktényezős felbontást.
A konstans tag osztóival próbálkozunk

Példa

Az algebra alaptételét nem bizonyítjuk, de érdemes megfontolni, hogy a valós számok halmazán minden polinom felbomlik elsőfokúak és negatív diszkriminánsú másodfokúak szorzatára. A komplexek körében pedig már a negatív diszkriminánsú másodfokúak is tovább bomlanak, mert már tudunk negatív számokból is gyököt vonni.

1. példa Adjuk meg a $p(z) = z^3 - 7z^2 + 19z - 13$ polinom gyökeit és a gyöktényezős felbontást.
A konstans tag osztóival próbálkozunk $(\pm 1, \pm 13)$, és kiderül, hogy az 1 jó, így $z_1{=}1$, kiemelve $(z - 1)$-et

Példa

Az algebra alaptételét nem bizonyítjuk, de érdemes megfontolni, hogy a valós számok halmazán minden polinom felbomlik elsőfokúak és negatív diszkriminánsú másodfokúak szorzatára. A komplexek körében pedig már a negatív diszkriminánsú másodfokúak is tovább bomlanak, mert már tudunk negatív számokból is gyököt vonni.

1. példa Adjuk meg a $p(z) = z^3 - 7z^2 + 19z - 13$ polinom gyökeit és a gyöktényezős felbontást.
A konstans tag osztóival próbálkozunk $(\pm 1, \pm 13)$, és kiderül, hogy az 1 jó, így $z_1{=}1$, kiemelve $(z-1)$-et $z^3 - 7z^2 + 19z - 13 = (z-1)(z^2 - 6z + 13)$
A másik két gyök meghatározásához

Példa

Az algebra alaptételét nem bizonyítjuk, de érdemes megfontolni, hogy a valós számok halmazán minden polinom felbomlik elsőfokúak és negatív diszkriminánsú másodfokúak szorzatára. A komplexek körében pedig már a negatív diszkriminánsú másodfokúak is tovább bomlanak, mert már tudunk negatív számokból is gyököt vonni.

1. példa Adjuk meg a $p(z) = z^3 - 7z^2 + 19z - 13$ polinom gyökeit és a gyöktényezős felbontást.
A konstans tag osztóival próbálkozunk $(\pm 1, \pm 13)$, és kiderül, hogy az 1 jó, így $z_1{=}1$, kiemelve $(z-1)$-et $z^3 - 7z^2 + 19z - 13 = (z-1)(z^2 - 6z + 13)$
A másik két gyök meghatározásához a megoldóképletet használjuk:

$$z_{2,3} =$$

Példa

Az algebra alaptételét nem bizonyítjuk, de érdemes megfontolni, hogy a valós számok halmazán minden polinom felbomlik elsőfokúak és negatív diszkriminánsú másodfokúak szorzatára. A komplexek körében pedig már a negatív diszkriminánsú másodfokúak is tovább bomlanak, mert már tudunk negatív számokból is gyököt vonni.

1. példa Adjuk meg a $p(z) = z^3 - 7z^2 + 19z - 13$ polinom gyökeit és a gyöktényezős felbontást.
A konstans tag osztóival próbálkozunk $(\pm 1, \pm 13)$, és kiderül, hogy az 1 jó, így z_1=1, kiemelve $(z-1)$-et $z^3 - 7z^2 + 19z - 13 = (z-1)(z^2 - 6z + 13)$
A másik két gyök meghatározásához a megoldóképletet használjuk:

$$z_{2,3} = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 4 \cdot 13}}{2} =$$

Példa

Az algebra alaptételét nem bizonyítjuk, de érdemes megfontolni, hogy a valós számok halmazán minden polinom felbomlik elsőfokúak és negatív diszkriminánsú másodfokúak szorzatára. A komplexek körében pedig már a negatív diszkriminánsú másodfokúak is tovább bomlanak, mert már tudunk negatív számokból is gyököt vonni.

1. példa Adjuk meg a $p(z) = z^3 - 7z^2 + 19z - 13$ polinom gyökeit és a gyöktényezős felbontást.
A konstans tag osztóival próbálkozunk $(\pm 1, \pm 13)$, és kiderül, hogy az 1 jó, így $z_1{=}1$, kiemelve $(z-1)$-et $z^3 - 7z^2 + 19z - 13 = (z-1)(z^2 - 6z + 13)$
A másik két gyök meghatározásáhoza megoldóképletet használjuk:

$$z_{2,3} = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 4 \cdot 13}}{2} = \frac{6 \pm \sqrt{-16}}{2} = 3 \pm 2\sqrt{-1} =$$

Példa

Az algebra alaptételét nem bizonyítjuk, de érdemes megfontolni, hogy a valós számok halmazán minden polinom felbomlik elsőfokúak és negatív diszkriminánsú másodfokúak szorzatára. A komplexek körében pedig már a negatív diszkriminánsú másodfokúak is tovább bomlanak, mert már tudunk negatív számokból is gyököt vonni.

1. példa Adjuk meg a $p(z) = z^3 - 7z^2 + 19z - 13$ polinom gyökeit és a gyöktényezős felbontást.
A konstans tag osztóival próbálkozunk $(\pm 1, \pm 13)$, és kiderül, hogy az 1 jó, így z_1=1, kiemelve $(z-1)$-et $z^3 - 7z^2 + 19z - 13 = (z-1)(z^2 - 6z + 13)$
A másik két gyök meghatározásáhoza megoldóképletet használjuk:

$$z_{2,3} = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 4 \cdot 13}}{2} = \frac{6 \pm \sqrt{-16}}{2} = 3 \pm 2\sqrt{-1} = 3 \pm 2i$$

Tehát $z_2 = 3 - 2i$, $z_3 = 3 + 2i$ és $p(z) = (z-1)(z-3+2i)(z-3-2i)$.