Lineáris algebra

Matematika A2x

2020 ősz

Vektortér

Definíció

Az elemek egy $\mathcal{A}$ halmazát $\mathbb{R}$ feletti vektortérnek, vagy lineáris térnek nevezzük, ha az elemek között értelmezve van egy összeadás $(+)$ művelet és az $\mathbb{R}$ és $\mathcal{A}$ elemei között egy szorzás $(\cdot)$ művelet az alábbi feltételekkel:

- *zárt(+,·):* $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathcal{A} \Rightarrow \mathbf{a} + \mathbf{b} \in \mathcal{A}$

Vektortér

Definíció

Az elemek egy $\mathcal{A}$ halmazát $\mathbb{R}$ feletti vektortérnek, vagy lineáris térnek nevezzük, ha az elemek között értelmezve van egy összeadás $(+)$ művelet és az $\mathbb{R}$ és $\mathcal{A}$ elemei között egy szorzás $(\cdot)$ művelet az alábbi feltételekkel:

- *zárt(+,·):* $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathcal{A} \Rightarrow \mathbf{a} + \mathbf{b} \in \mathcal{A}$ *és* $\mathbf{a} \in \mathcal{A}; \lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow \lambda \cdot \mathbf{a} \in \mathcal{A}$

Vektortér

Definíció

Az elemek egy $\mathcal{A}$ halmazát $\mathbb{R}$ feletti vektortérnek, vagy lineáris térnek nevezzük, ha az elemek között értelmezve van egy összeadás $(+)$ *művelet és az $\mathbb{R}$ és $\mathcal{A}$ elemei között egy szorzás* $(\cdot)$ *művelet az alábbi feltételekkel:*

- *zárt(+,·):* $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathcal{A} \Rightarrow \mathbf{a} + \mathbf{b} \in \mathcal{A}$ *és* $\mathbf{a} \in \mathcal{A}; \lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow \lambda \cdot \mathbf{a} \in \mathcal{A}$
- *kommutatív(+):* $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a}$

Vektortér

Definíció

Az elemek egy $\mathcal{A}$ halmazát $\mathbb{R}$ feletti vektortérnek, vagy lineáris térnek nevezzük, ha az elemek között értelmezve van egy összeadás $(+)$ művelet és az $\mathbb{R}$ és $\mathcal{A}$ elemei között egy szorzás $(\cdot)$ művelet az alábbi feltételekkel:

- *zárt(+,·):* $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathcal{A} \Rightarrow \mathbf{a} + \mathbf{b} \in \mathcal{A}$ *és* $\mathbf{a} \in \mathcal{A}; \lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow \lambda \cdot \mathbf{a} \in \mathcal{A}$
- *kommutatív(+):* $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a}$
- *asszociatív(+):* $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c} = \mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c})$

Vektortér

Definíció

Az elemek egy $\mathcal{A}$ halmazát $\mathbb{R}$ feletti vektortérnek, vagy lineáris térnek nevezzük, ha az elemek között értelmezve van egy összeadás $(+)$ művelet és az $\mathbb{R}$ és $\mathcal{A}$ elemei között egy szorzás $(\cdot)$ művelet az alábbi feltételekkel:

- *zárt(+,·):* $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathcal{A} \Rightarrow \mathbf{a} + \mathbf{b} \in \mathcal{A}$ *és* $\mathbf{a} \in \mathcal{A}; \lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow \lambda \cdot \mathbf{a} \in \mathcal{A}$
- *kommutatív(+):* $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a}$
- *asszociatív(+):* $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c} = \mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c})$
- *nullvektor:* $\exists \mathbf{0} \in \mathcal{A} \, \forall \mathbf{a} \in \mathcal{A} : \mathbf{a} + \mathbf{0} = \mathbf{a}$

Vektortér

Definíció

Az elemek egy $\mathcal{A}$ halmazát $\mathbb{R}$ feletti vektortérnek, vagy lineáris térnek nevezzük, ha az elemek között értelmezve van egy összeadás $(+)$ művelet és az $\mathbb{R}$ és $\mathcal{A}$ elemei között egy szorzás $(\cdot)$ művelet az alábbi feltételekkel:

- *zárt(+,·):* $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathcal{A} \Rightarrow \mathbf{a} + \mathbf{b} \in \mathcal{A}$ *és* $\mathbf{a} \in \mathcal{A}; \lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow \lambda \cdot \mathbf{a} \in \mathcal{A}$
- *kommutatív(+):* $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a}$
- *asszociatív(+):* $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c} = \mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c})$
- *nullvektor:* $\exists \mathbf{0} \in \mathcal{A}\, \forall \mathbf{a} \in \mathcal{A} : \mathbf{a} + \mathbf{0} = \mathbf{a}$
- *ellentett vektor:* $\forall \mathbf{a} \in \mathcal{A}\, \exists(-\mathbf{a}) \in \mathcal{A} : \mathbf{a} + (-\mathbf{a}) = \mathbf{0}$

Vektortér

Definíció

Az elemek egy $\mathcal{A}$ halmazát $\mathbb{R}$ feletti vektortérnek, vagy lineáris térnek nevezzük, ha az elemek között értelmezve van egy összeadás $(+)$ művelet és az $\mathbb{R}$ és $\mathcal{A}$ elemei között egy szorzás $(\cdot)$ művelet az alábbi feltételekkel:

- *zárt(+,·):* $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathcal{A} \Rightarrow \mathbf{a} + \mathbf{b} \in \mathcal{A}$ *és* $\mathbf{a} \in \mathcal{A}; \lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow \lambda \cdot \mathbf{a} \in \mathcal{A}$
- *kommutatív(+):* $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a}$
- *asszociatív(+):* $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c} = \mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c})$
- *nullvektor:* $\exists \mathbf{0} \in \mathcal{A} \, \forall \mathbf{a} \in \mathcal{A} : \mathbf{a} + \mathbf{0} = \mathbf{a}$
- *ellentett vektor:* $\forall \mathbf{a} \in \mathcal{A} \, \exists (-\mathbf{a}) \in \mathcal{A} : \mathbf{a} + (-\mathbf{a}) = \mathbf{0}$
- *disztributiv:* $\lambda, \mu \in \mathbb{R}; \mathbf{a} \in \mathcal{A} \Rightarrow (\lambda + \mu) \cdot \mathbf{a} = \lambda \cdot \mathbf{a} + \mu \cdot \mathbf{a}$

Vektortér

Definíció

Az elemek egy $\mathcal{A}$ halmazát $\mathbb{R}$ feletti vektortérnek, vagy lineáris térnek nevezzük, ha az elemek között értelmezve van egy összeadás $(+)$ művelet és az $\mathbb{R}$ és $\mathcal{A}$ elemei között egy szorzás $(\cdot)$ művelet az alábbi feltételekkel:

- *zárt(+,·):* $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathcal{A} \Rightarrow \mathbf{a} + \mathbf{b} \in \mathcal{A}$ *és* $\mathbf{a} \in \mathcal{A}; \lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow \lambda \cdot \mathbf{a} \in \mathcal{A}$
- *kommutatív(+):* $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a}$
- *asszociatív(+):* $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c} = \mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c})$
- *nullvektor:* $\exists \mathbf{0} \in \mathcal{A} \, \forall \mathbf{a} \in \mathcal{A} : \mathbf{a} + \mathbf{0} = \mathbf{a}$
- *ellentett vektor:* $\forall \mathbf{a} \in \mathcal{A} \, \exists (-\mathbf{a}) \in \mathcal{A} : \mathbf{a} + (-\mathbf{a}) = \mathbf{0}$
- *disztributiv:* $\lambda, \mu \in \mathbb{R}; \mathbf{a} \in \mathcal{A} \Rightarrow (\lambda + \mu) \cdot \mathbf{a} = \lambda \cdot \mathbf{a} + \mu \cdot \mathbf{a}$
- *disztributiv:* $\lambda \in \mathbb{R}; \mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathcal{A} \Rightarrow \lambda \cdot (\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \lambda \cdot \mathbf{a} + \lambda \cdot \mathbf{b}$

Vektortér

Definíció

Az elemek egy $\mathcal{A}$ halmazát $\mathbb{R}$ feletti vektortérnek, vagy lineáris térnek nevezzük, ha az elemek között értelmezve van egy összeadás $(+)$ művelet és az $\mathbb{R}$ és $\mathcal{A}$ elemei között egy szorzás $(\cdot)$ művelet az alábbi feltételekkel:

- *zárt(+,·):* $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathcal{A} \Rightarrow \mathbf{a} + \mathbf{b} \in \mathcal{A}$ *és* $\mathbf{a} \in \mathcal{A}; \lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow \lambda \cdot \mathbf{a} \in \mathcal{A}$
- *kommutatív(+):* $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a}$
- *asszociatív(+):* $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c} = \mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c})$
- *nullvektor:* $\exists \mathbf{0} \in \mathcal{A} \, \forall \mathbf{a} \in \mathcal{A} : \mathbf{a} + \mathbf{0} = \mathbf{a}$
- *ellentett vektor:* $\forall \mathbf{a} \in \mathcal{A} \, \exists (-\mathbf{a}) \in \mathcal{A} : \mathbf{a} + (-\mathbf{a}) = \mathbf{0}$
- *disztributiv:* $\lambda, \mu \in \mathbb{R}; \mathbf{a} \in \mathcal{A} \Rightarrow (\lambda + \mu) \cdot \mathbf{a} = \lambda \cdot \mathbf{a} + \mu \cdot \mathbf{a}$
- *disztributiv:* $\lambda \in \mathbb{R}; \mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathcal{A} \Rightarrow \lambda \cdot (\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \lambda \cdot \mathbf{a} + \lambda \cdot \mathbf{b}$
- *asszociativ(·):* $\lambda, \mu \in \mathbb{R}; \mathbf{a} \in \mathcal{A} \Rightarrow (\lambda\mu) \cdot \mathbf{a} = \lambda(\mu \cdot \mathbf{a})$

Vektortér

Definíció

Az elemek egy $\mathcal{A}$ halmazát $\mathbb{R}$ feletti vektortérnek, vagy lineáris térnek nevezzük, ha az elemek között értelmezve van egy összeadás $(+)$ művelet és az $\mathbb{R}$ és $\mathcal{A}$ elemei között egy szorzás $(\cdot)$ művelet az alábbi feltételekkel:

- *zárt(+,·):* $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathcal{A} \Rightarrow \mathbf{a} + \mathbf{b} \in \mathcal{A}$ *és* $\mathbf{a} \in \mathcal{A}; \lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow \lambda \cdot \mathbf{a} \in \mathcal{A}$
- *kommutatív(+):* $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a}$
- *asszociatív(+):* $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c} = \mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c})$
- *nullvektor:* $\exists \mathbf{0} \in \mathcal{A}\, \forall \mathbf{a} \in \mathcal{A} : \mathbf{a} + \mathbf{0} = \mathbf{a}$
- *ellentett vektor:* $\forall \mathbf{a} \in \mathcal{A}\, \exists (-\mathbf{a}) \in \mathcal{A} : \mathbf{a} + (-\mathbf{a}) = \mathbf{0}$
- *disztributiv:* $\lambda, \mu \in \mathbb{R}; \mathbf{a} \in \mathcal{A} \Rightarrow (\lambda + \mu) \cdot \mathbf{a} = \lambda \cdot \mathbf{a} + \mu \cdot \mathbf{a}$
- *disztributiv:* $\lambda \in \mathbb{R}; \mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathcal{A} \Rightarrow \lambda \cdot (\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \lambda \cdot \mathbf{a} + \lambda \cdot \mathbf{b}$
- *asszociativ(·):* $\lambda, \mu \in \mathbb{R}; \mathbf{a} \in \mathcal{A} \Rightarrow (\lambda\mu) \cdot \mathbf{a} = \lambda(\mu \cdot \mathbf{a})$
- $\mathbf{a} \in \mathcal{A} : 1 \cdot \mathbf{a} = \mathbf{a}$

Példák vektorterekre

1. Vektorok 1-2-3(-n) dimenzióban a vektorműveleteknél definiált összeadás és számmal való szorzás műveletével ($\mathbb{R}^n$)

Példák vektorterekre

1. Vektorok 1-2-3(-n) dimenzióban a vektorműveleteknél definiált összeadás és számmal való szorzás műveletével ($\mathbb{R}^n$)
2. Ugyanolyan alakú mátrixok (lásd később!) ($\mathbb{R}^{n\times m}$)

Példák vektorterekre

1. Vektorok 1-2-3(-n) dimenzióban a vektorműveleteknél definiált összeadás és számmal való szorzás műveletével ($\mathbb{R}^n$)
2. Ugyanolyan alakú mátrixok (lásd később!) ($\mathbb{R}^{n\times m}$)
3. Legfeljebb n-edfokú polinomok tere ($\mathbb{P}^n$)

Példák vektorterekre

1. Vektorok 1-2-3(-n) dimenzióban a vektorműveleteknél definiált összeadás és számmal való szorzás műveletével ($\mathbb{R}^n$)
2. Ugyanolyan alakú mátrixok (lásd később!) ($\mathbb{R}^{n\times m}$)
3. Legfeljebb n-edfokú polinomok tere ($\mathbb{P}^n$)
4. Adott $[a, b] \in \mathbb{R}$ intervallumon folytonos függvények

Példák vektorterekre

1. Vektorok 1-2-3(-n) dimenzióban a vektorműveleteknél definiált összeadás és számmal való szorzás műveletével ($\mathbb{R}^n$)
2. Ugyanolyan alakú mátrixok (lásd később!) ($\mathbb{R}^{n \times m}$)
3. Legfeljebb n-edfokú polinomok tere ($\mathbb{P}^n$)
4. Adott $[a, b] \in \mathbb{R}$ intervallumon folytonos függvények
5. Az $\mathbb{N} \mapsto \mathbb{R}$ függvények, azaz a sorozatok ($\mathbb{R}^\infty$)

Példák vektorterekre

1. Vektorok 1-2-3(-n) dimenzióban a vektorműveleteknél definiált összeadás és számmal való szorzás műveletével ($\mathbb{R}^n$)
2. Ugyanolyan alakú mátrixok (lásd később!) ($\mathbb{R}^{n\times m}$)
3. Legfeljebb n-edfokú polinomok tere ($\mathbb{P}^n$)
4. Adott $[a, b] \in \mathbb{R}$ intervallumon folytonos függvények
5. Az $\mathbb{N} \mapsto \mathbb{R}$ függvények, azaz a sorozatok ($\mathbb{R}^\infty$)

Tehát a vektortér egy sokkal tágabb fogalom, nem csak a vektorokra igazak ezek a tulajdonságok. Így minden, amit a vektorterekről meg tudunk állapítani, az az összes ilyen területen alkalmazható.

Példák vektorterekre

1. Vektorok 1-2-3(-n) dimenzióban a vektorműveleteknél definiált összeadás és számmal való szorzás műveletével ($\mathbb{R}^n$)
2. Ugyanolyan alakú mátrixok (lásd később!) ($\mathbb{R}^{n\times m}$)
3. Legfeljebb n-edfokú polinomok tere ($\mathbb{P}^n$)
4. Adott $[a, b] \in \mathbb{R}$ intervallumon folytonos függvények
5. Az $\mathbb{N} \mapsto \mathbb{R}$ függvények, azaz a sorozatok ($\mathbb{R}^\infty$)

Tehát a vektortér egy sokkal tágabb fogalom, nem csak a vektorokra igazak ezek a tulajdonságok. Így minden, amit a vektorterekről meg tudunk állapítani, az az összes ilyen területen alkalmazható.
Megjegyzés: Egy vektortérben a nullelem és az ellentett elem egyértelmű és $\lambda \cdot \mathbf{a} = \mathbf{0} \Leftrightarrow \lambda = 0$ vagy $\mathbf{a} = \mathbf{0}$

Kombináció, függetlenség, összefüggőség

Definíció

Az $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n \in \mathcal{A}$ *vektorok és* $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ *valós számok lineáris kombinációján a* $\lambda_1 \cdot \mathbf{a}_1 + \lambda_2 \cdot \mathbf{a}_2 + \cdots + \lambda_n \cdot \mathbf{a}_n$ *összeget értjük.*

Kombináció, függetlenség, összefüggőség

Definíció

Az $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n \in \mathcal{A}$ *vektorok és* $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ *valós számok lineáris kombinációján a* $\lambda_1 \cdot \mathbf{a}_1 + \lambda_2 \cdot \mathbf{a}_2 + \cdots + \lambda_n \cdot \mathbf{a}_n$ *összeget értjük.*

Definíció

Az $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n \in \mathcal{A}$ *vektorokat lineárisan függetlennek nevezzük, ha a* $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ *valós számokkal vett lineáris kombinációjuk pontosan akkor 0, ha* $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = 0$. *Azaz csak triviális megoldása van a* $\lambda_1 \cdot \mathbf{a}_1 + \lambda_2 \cdot \mathbf{a}_2 + \cdots + \lambda_n \cdot \mathbf{a}_n = \mathbf{0}$ *vektoregyenletnek.*

Kombináció, függetlenség, összefüggőség

Definíció

Az $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n \in \mathcal{A}$ vektorok és $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ valós számok lineáris kombinációján a $\lambda_1 \cdot \mathbf{a}_1 + \lambda_2 \cdot \mathbf{a}_2 + \cdots + \lambda_n \cdot \mathbf{a}_n$ összeget értjük.

Definíció

Az $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n \in \mathcal{A}$ vektorokat lineárisan függetlennek nevezzük, ha a $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ valós számokkal vett lineáris kombinációjuk pontosan akkor 0, ha $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = 0$. Azaz csak triviális megoldása van a $\lambda_1 \cdot \mathbf{a}_1 + \lambda_2 \cdot \mathbf{a}_2 + \cdots + \lambda_n \cdot \mathbf{a}_n = \mathbf{0}$ vektoregyenletnek.

Definíció

Az $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n \in \mathcal{A}$ vektorokat lineárisan (össze)függőnek nevezzük, ha nem függetlenek, azaz a $\lambda_1 \cdot \mathbf{a}_1 + \lambda_2 \cdot \mathbf{a}_2 + \cdots + \lambda_n \cdot \mathbf{a}_n = \mathbf{0}$ egyenletnek létezik nemtriviális megoldása (nem minden $\lambda_i = 0$).

Példák

1. Tekintsük az $\mathbb{R}^2$ vektortér két elemét, az $\mathbf{a}_1(1,0)$ és $\mathbf{a}_2(0,1)$ vektorokat. Ez a két vektor lineárisan független, mert a $\lambda_1\mathbf{a}_1 + \lambda_2\mathbf{a}_2 = \lambda_1(1,0) + \lambda_2(0,1) = (\lambda_1, \lambda_2) = (0,0)$, ami csak úgy teljesülhet, ha $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$.

Példák

1. Tekintsük az $\mathbb{R}^2$ vektortér két elemét, az $\mathbf{a}_1(1,0)$ és $\mathbf{a}_2(0,1)$ vektorokat. Ez a két vektor lineárisan független, mert a $\lambda_1\mathbf{a}_1 + \lambda_2\mathbf{a}_2 = \lambda_1(1,0) + \lambda_2(0,1) = (\lambda_1, \lambda_2) = (0,0)$, ami csak úgy teljesülhet, ha $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$.
2. Tekintsük az $\mathbb{R}^2$ vektortér három elemét, az $\mathbf{a}_1(1,0)$, az $\mathbf{a}_2(0,1)$ és az $\mathbf{a}_3(3,-2)$ vektorokat. Ezek lineárisan összefüggők, mert $3\cdot(1,0) - 2\cdot(0,1) - 1\cdot(3,-2) = (0,0)$, azaz találtunk egy olyan kombinációt, melyben nem minden együttható 0 és előállítja a $\mathbf{0}-$t.

Példák

1. Tekintsük az $\mathbb{R}^2$ vektortér két elemét, az $\mathbf{a}_1(1,0)$ és $\mathbf{a}_2(0,1)$ vektorokat. Ez a két vektor lineárisan független, mert a $\lambda_1\mathbf{a}_1 + \lambda_2\mathbf{a}_2 = \lambda_1(1,0) + \lambda_2(0,1) = (\lambda_1, \lambda_2) = (0,0)$, ami csak úgy teljesülhet, ha $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$.
2. Tekintsük az $\mathbb{R}^2$ vektortér három elemét, az $\mathbf{a}_1(1,0)$, az $\mathbf{a}_2(0,1)$ és az $\mathbf{a}_3(3,-2)$ vektorokat. Ezek lineárisan összefüggők, mert $3 \cdot (1,0) - 2 \cdot (0,1) - 1 \cdot (3,-2) = (0,0)$, azaz találtunk egy olyan kombinációt, melyben nem minden együttható 0 és előállítja a $\mathbf{0}-$t.
3. Tekintsük a $\mathbb{P}^1$ vektortérben az $3x$ és a $2x-1$ vektorokat. Ez a két vektor lineárisan független, mert bármely kombinációban a konstans tag csak úgy lesz 0, ha $2x-1$-ből 0 db van és így $3x$-ből is 0 db kell, hogy az x-es tag is 0 legyen.

Példák

1. Tekintsük az $\mathbb{R}^2$ vektortér két elemét, az $\mathbf{a}_1(1,0)$ és $\mathbf{a}_2(0,1)$ vektorokat. Ez a két vektor lineárisan független, mert a $\lambda_1\mathbf{a}_1 + \lambda_2\mathbf{a}_2 = \lambda_1(1,0) + \lambda_2(0,1) = (\lambda_1, \lambda_2) = (0,0)$, ami csak úgy teljesülhet, ha $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$.
2. Tekintsük az $\mathbb{R}^2$ vektortér három elemét, az $\mathbf{a}_1(1,0)$, az $\mathbf{a}_2(0,1)$ és az $\mathbf{a}_3(3,-2)$ vektorokat. Ezek lineárisan összefüggők, mert $3\cdot(1,0) - 2\cdot(0,1) - 1\cdot(3,-2) = (0,0)$, azaz találtunk egy olyan kombinációt, melyben nem minden együttható 0 és előállítja a $\mathbf{0}$−t.
3. Tekintsük a $\mathbb{P}^1$ vektortérben az $3x$ és a $2x-1$ vektorokat. Ez a két vektor lineárisan független, mert bármely kombinációban a konstans tag csak úgy lesz 0, ha $2x-1$-ből 0 db van és így $3x$-ből is 0 db kell, hogy az x-es tag is 0 legyen.
4. Tekintsük a $\mathbb{P}^2$ vektortérben az $3x$, az x^2, az $2-x$ és a $2x-1$ vektorokat. Ez a négy vektor lineárisan összefüggő, mert $1\cdot(3x) + 0\cdot(x^2) - 1\cdot(2-x) - 2\cdot(2x-1) = 0x + 0$.

Dimenzió, bázis

Definíció

Az $\mathcal{A}$ vektorteret n dimenziósnak nevezzük, ha létezik n darab lineárisan független vektor, de bármely $n+1$ vektorból álló halmaz már lineárisan összefüggő.

Dimenzió, bázis

Definíció

Az $\mathcal{A}$ vektorteret n dimenziósnak nevezzük, ha létezik n darab lineárisan független vektor, de bármely $n+1$ vektorból álló halmaz már lineárisan összefüggő. Ha a vektortérben bármennyi lineárisan függetken elemet találunk, akkor végtelen dimenziós a vektortér.

Dimenzió, bázis

Definíció

Az $\mathcal{A}$ vektorteret n dimenziósnak nevezzük, ha létezik n darab lineárisan független vektor, de bármely $n+1$ vektorból álló halmaz már lineárisan összefüggő. Ha a vektortérben bármennyi lineárisan függetken elemet találunk, akkor végtelen dimenziós a vektortér.

Definíció

Az n dimenziós vektortér bármely n db lineárisan független vektorát a vektortér bázisának nevezzük.

Dimenzió, bázis

Definíció

Az $\mathcal{A}$ vektorteret n dimenziósnak nevezzük, ha létezik n darab lineárisan független vektor, de bármely $n+1$ vektorból álló halmaz már lineárisan összefüggő. Ha a vektortérben bármennyi lineárisan függetken elemet találunk, akkor végtelen dimenziós a vektortér.

Definíció

Az n dimenziós vektortér bármely n db lineárisan független vektorát a vektortér bázisának nevezzük.

Tétel

Ha $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n\}$ az $\mathcal{A}$ vektortér egy bázisa, akkor bármely $\mathbf{v} \in \mathcal{A}$ vektor egyértelműen felírható $\mathbf{v} = \lambda_1\mathbf{a}_1 + \lambda_2\mathbf{a}_2 + \cdots + \lambda_n\mathbf{a}_n$ alakban, ahol a $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)-$et a $\mathbf{v}$ vektor $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots \mathbf{a}_n$ bázishoz tartozó koordinátáinak nevezzük.

Bizonyítás és példák

Biz.: Mivel $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n\}$ bázis, ezért maximális lineárisan független halmaz, ezért $\{\mathbf{v}, \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n\}$ már lineárisan összefüggő, ezért kifejezhető belőle $\mathbf{v}$.

Bizonyítás és példák

Biz.: Mivel $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n\}$ bázis, ezért maximális lineárisan független halmaz, ezért $\{\mathbf{v}, \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n\}$ már lineárisan összefüggő, ezért kifejezhető belőle $\mathbf{v}$.
Ha pedig kétféle előállítás lenne $\mathbf{v} = \lambda_1 \mathbf{a}_1 + \cdots + \lambda_n \mathbf{a}_n$ és $\mathbf{v} = \mu_1 \mathbf{a}_1 + \cdots + \mu_n \mathbf{a}_n$, akkor a kettőt kivonva egymásból, adódik, hogy $\mathbf{0} = (\lambda_1 - \mu_1)\mathbf{a}_1 + \cdots + (\lambda_n - \mu_n)\mathbf{v}_n$, ami ellentmondásba kerül azzal, hogy $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n\}$ bázis.

Példák:

1. $\mathbb{R}^n$ tér n dimenziós és egy bázisa, az un. természetes(standard) bázisa az $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ halmaz, ahol $\mathbf{e}_i = (0, \ldots, 0, \underbrace{1}_{i}, 0, \ldots, 0)$

Bizonyítás és példák

Biz.: Mivel $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n\}$ bázis, ezért maximális lineárisan független halmaz, ezért $\{\mathbf{v}, \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n\}$ már lineárisan összefüggő, ezért kifejezhető belőle $\mathbf{v}$.
Ha pedig kétféle előállítás lenne $\mathbf{v} = \lambda_1\mathbf{a}_1 + \cdots + \lambda_n\mathbf{a}_n$ és $\mathbf{v} = \mu_1\mathbf{a}_1 + \cdots + \mu_n\mathbf{a}_n$, akkor a kettőt kivonva egymásból, adódik, hogy $\mathbf{0} = (\lambda_1 - \mu_1)\mathbf{a}_1 + \cdots + (\lambda_n - \mu_n)\mathbf{v}_n$, ami ellentmondásba kerül azzal, hogy $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n\}$ bázis.

Példák:

1. $\mathbb{R}^n$ tér n dimenziós és egy bázisa, az un. természetes(standard) bázisa az $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ halmaz, ahol $\mathbf{e}_i = (0, \ldots, 0, \underbrace{1}_{i}, 0, \ldots, 0)$
2. $\mathbb{P}^n$ tér $n + 1$ dimenziós és egy bázisa az $\{1, x, x^2, \ldots, x^n\}$ halmaz

Bizonyítás és példák

Biz.: Mivel $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n\}$ bázis, ezért maximális lineárisan független halmaz, ezért $\{\mathbf{v}, \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n\}$ már lineárisan összefüggő, ezért kifejezhető belőle $\mathbf{v}$.
Ha pedig kétféle előállítás lenne $\mathbf{v} = \lambda_1 \mathbf{a}_1 + \cdots + \lambda_n \mathbf{a}_n$ és $\mathbf{v} = \mu_1 \mathbf{a}_1 + \cdots + \mu_n \mathbf{a}_n$, akkor a kettőt kivonva egymásból, adódik, hogy $\mathbf{0} = (\lambda_1 - \mu_1)\mathbf{a}_1 + \cdots + (\lambda_n - \mu_n)\mathbf{v}_n$, ami ellentmondásba kerül azzal, hogy $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n\}$ bázis.

Példák:

1. $\mathbb{R}^n$ tér n dimenziós és egy bázisa, az un. természetes(standard) bázisa az $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ halmaz, ahol $\mathbf{e}_i = (0, \ldots, 0, \underbrace{1}_{i}, 0, \ldots, 0)$
2. $\mathbb{P}^n$ tér $n+1$ dimenziós és egy bázisa az $\{1, x, x^2, \ldots, x^n\}$ halmaz
3. $\mathbb{R}^\infty$ tér végtelen dimenziós és egy bázisa: $(1, 0, 0, \ldots), (0, 1, 0, \ldots), \ldots$

Generátorrendszer

Definíció

Az $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n \in \mathcal{A}$ *vektorokat generátorrendszernek nevezzük, ha minden* $\mathbf{v} \in \mathcal{A}$ *vektor előáll valamilyen* $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ *számokkal vett lineáris kombinációként, azaz*
$\forall \mathbf{v} \in \mathcal{A}, \exists \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}: \ \mathbf{v} = \lambda_1 \cdot \mathbf{a}_1 + \lambda_2 \cdot \mathbf{a}_2 + \cdots + \lambda_n \cdot \mathbf{a}_n.$

Generátorrendszer

Definíció

Az $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n \in \mathcal{A}$ *vektorokat generátorrendszernek nevezzük, ha minden* $\mathbf{v} \in \mathcal{A}$ *vektor előáll valamilyen* $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ *számokkal vett lineáris kombinációként, azaz*
$\forall \mathbf{v} \in \mathcal{A}, \exists \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}: \ \mathbf{v} = \lambda_1 \cdot \mathbf{a}_1 + \lambda_2 \cdot \mathbf{a}_2 + \cdots + \lambda_n \cdot \mathbf{a}_n.$

Következmény: Minden bázis generátorrendszert alkot.

Generátorrendszer

Definíció

Az $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n \in \mathcal{A}$ *vektorokat generátorrendszernek nevezzük, ha minden* $\mathbf{v} \in \mathcal{A}$ *vektor előáll valamilyen* $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ *számokkal vett lineáris kombinációként, azaz*
$\forall \mathbf{v} \in \mathcal{A}, \exists \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}: \ \mathbf{v} = \lambda_1 \cdot \mathbf{a}_1 + \lambda_2 \cdot \mathbf{a}_2 + \cdots + \lambda_n \cdot \mathbf{a}_n.$

Következmény: Minden bázis generátorrendszert alkot.

Tétel

Egy n dimenziós vektortérben legfeljebb n db lineráis független vektor van és minden generátorrendszer legalább n vektorból áll.

Bázis egy alternatív definíciója:

Generátorrendszer

Definíció

Az $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n \in \mathcal{A}$ vektorokat generátorrendszernek nevezzük, ha minden $\mathbf{v} \in \mathcal{A}$ vektor előáll valamilyen $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ számokkal vett lineáris kombinációként, azaz
$\forall \mathbf{v} \in \mathcal{A}, \exists \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}: \ \mathbf{v} = \lambda_1 \cdot \mathbf{a}_1 + \lambda_2 \cdot \mathbf{a}_2 + \dots + \lambda_n \cdot \mathbf{a}_n.$

Következmény: Minden bázis generátorrendszert alkot.

Tétel

Egy n dimenziós vektortérben legfeljebb n db lineráis független vektor van és minden generátorrendszer legalább n vektorból áll.

Bázis egy alternatív definíciója:

Definíció

Egy vektortér lineárisan független generátorrendszereit bázisnak nevezzük.

Altér

Definíció

A $\mathcal{B}$ halmaz az $\mathcal{A}$ vektortérben egy altér, ha $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$ és $\mathcal{B}$ vektortér.

Altér

Definíció

A $\mathcal{B}$ *halmaz az* $\mathcal{A}$ *vektortérben egy altér, ha* $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$ *és* $\mathcal{B}$ *vektortér.*
$\mathcal{B}$ *valódi altér, ha altér és* $\mathcal{B} \neq \mathcal{A}$*.*

Altér

Definíció

A $\mathcal{B}$ *halmaz az* $\mathcal{A}$ *vektortérben egy altér, ha* $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$ *és* $\mathcal{B}$ *vektortér.*
$\mathcal{B}$ *valódi altér, ha altér és* $\mathcal{B} \neq \mathcal{A}$.

Tétel

A $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$ *altér, ha zárt a* $+$ *és* $\cdot$ *műveletekre nézve:*

- $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathcal{B} \Rightarrow \mathbf{a} + \mathbf{b} \in \mathcal{B}$
- $\mathbf{a} \in \mathcal{B}, \lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow \lambda \cdot \mathbf{a} \in \mathcal{B}$

Példa:

Altér

Definíció

A $\mathcal{B}$ halmaz az $\mathcal{A}$ vektortérben egy altér, ha $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$ és $\mathcal{B}$ vektortér.
$\mathcal{B}$ valódi altér, ha altér és $\mathcal{B} \neq \mathcal{A}$.

Tétel

A $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$ altér, ha zárt a $+$ és $\cdot$ műveletekre nézve:

- $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathcal{B} \Rightarrow \mathbf{a} + \mathbf{b} \in \mathcal{B}$
- $\mathbf{a} \in \mathcal{B}, \lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow \lambda \cdot \mathbf{a} \in \mathcal{B}$

Példa: Az $\mathbb{R}^3$ tér alterei:

- $\{\mathbf{0}\}$ (0 dimenziós)

Altér

Definíció

A $\mathcal{B}$ *halmaz az* $\mathcal{A}$ *vektortérben egy altér, ha* $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$ *és* $\mathcal{B}$ *vektortér.*
$\mathcal{B}$ *valódi altér, ha altér és* $\mathcal{B} \neq \mathcal{A}$.

Tétel

A $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$ *altér, ha zárt a* $+$ *és* $\cdot$ *műveletekre nézve:*

- $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathcal{B} \Rightarrow \mathbf{a} + \mathbf{b} \in \mathcal{B}$
- $\mathbf{a} \in \mathcal{B}, \lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow \lambda \cdot \mathbf{a} \in \mathcal{B}$

Példa: Az $\mathbb{R}^3$ tér alterei:

- $\{\mathbf{0}\}$ (0 dimenziós)
- bármely origón átmenő egyenes (1 dimenziós)

Altér

Definíció

A $\mathcal{B}$ halmaz az $\mathcal{A}$ vektortérben egy altér, ha $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$ és $\mathcal{B}$ vektortér.
$\mathcal{B}$ valódi altér, ha altér és $\mathcal{B} \neq \mathcal{A}$.

Tétel

A $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$ altér, ha zárt a $+$ és $\cdot$ műveletekre nézve:

- $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathcal{B} \Rightarrow \mathbf{a} + \mathbf{b} \in \mathcal{B}$
- $\mathbf{a} \in \mathcal{B}, \lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow \lambda \cdot \mathbf{a} \in \mathcal{B}$

Példa: Az $\mathbb{R}^3$ tér alterei:

- $\{\mathbf{0}\}$ (0 dimenziós)
- bármely origón átmenő egyenes (1 dimenziós)
- bármely origón átmenő sík (2 dimenziós)

Altér

Definíció

A $\mathcal{B}$ halmaz az $\mathcal{A}$ vektortérben egy altér, ha $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$ és $\mathcal{B}$ vektortér.
$\mathcal{B}$ valódi altér, ha altér és $\mathcal{B} \neq \mathcal{A}$.

Tétel

A $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$ altér, ha zárt a $+$ és $\cdot$ műveletekre nézve:

- $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathcal{B} \Rightarrow \mathbf{a} + \mathbf{b} \in \mathcal{B}$
- $\mathbf{a} \in \mathcal{B}, \lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow \lambda \cdot \mathbf{a} \in \mathcal{B}$

Példa: Az $\mathbb{R}^3$ tér alterei:

- $\{\mathbf{0}\}$ (0 dimenziós)
- bármely origón átmenő egyenes (1 dimenziós)
- bármely origón átmenő sík (2 dimenziós)
- teljes $\mathbb{R}^3$ tér (3 dimenziós), de ez nem valódi altér

Generált altér

Definíció

Az $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_k$ *vekotrok által generált altér azon* $\mathbf{v}$ *vektorokból áll, melyek előállnak az* $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_k$ *vektorok valamely* $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_k \in \mathbb{R}$ *számokkal vett lineáris kombinációként. Jelölés:* $\langle \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_k \rangle$

Generált altér

Definíció

Az $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_k$ vekotrok által generált altér azon $\mathbf{v}$ vektorokból áll, melyek előállnak az $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_k$ vektorok valamely $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_k \in \mathbb{R}$ számokkal vett lineáris kombinációként. Jelölés: $\langle \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_k \rangle$

Példa: Adjuk meg az $(1, 2, 0)$ és $(0, 0, 1)$ vektorok által generált alteret.

Generált altér

Definíció

Az $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_k$ vekotrok által generált altér azon $\mathbf{v}$ vektorokból áll, melyek előállnak az $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_k$ vektorok valamely $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_k \in \mathbb{R}$ számokkal vett lineáris kombinációként. Jelölés: $\langle \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_k \rangle$

Példa: Adjuk meg az $(1, 2, 0)$ és $(0, 0, 1)$ vektorok által generált alteret. Ebben a térben minden vektor felírható $\lambda_1(1, 2, 0) + \lambda_2(0, 0, 1) = (\lambda_1, 2\lambda_1, \lambda_2)$ alakban. Ez azt jelenti, hogy két szabadsági fokunk van, melyet célszerű az x és z koordinátáknak választani és fenáll az $y = 2x$ összefüggés. Tehát az altér egy sík, melynek egyenlete: $2x - y = 0$

Generált altér

Definíció

Az $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_k$ vekotrok által generált altér azon $\mathbf{v}$ vektorokból áll, melyek előállnak az $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_k$ vektorok valamely $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_k \in \mathbb{R}$ számokkal vett lineáris kombinációként. Jelölés: $\langle \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_k \rangle$

Példa: Adjuk meg az $(1, 2, 0)$ és $(0, 0, 1)$ vektorok által generált alteret. Ebben a térben minden vektor felírható $\lambda_1(1, 2, 0) + \lambda_2(0, 0, 1) = (\lambda_1, 2\lambda_1, \lambda_2)$ alakban. Ez azt jelenti, hogy két szabadsági fokunk van, melyet célszerű az x és z koordinátáknak választani és fenáll az $y = 2x$ összefüggés. Tehát az altér egy sík, melynek egyenlete: $2x - y = 0$

Példa: Alteret alkot-e az $(x, y, 1) \in \mathbb{R}^3$ alakú vektorok?

Generált altér

Definíció

Az $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_k$ vekotrok által generált altér azon $\mathbf{v}$ vektorokból áll, melyek előállnak az $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_k$ vektorok valamely $\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_k \in \mathbb{R}$ számokkal vett lineáris kombinációként. Jelölés: $\langle \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_k \rangle$

Példa: Adjuk meg az $(1, 2, 0)$ és $(0, 0, 1)$ vektorok által generált alteret.
Ebben a térben minden vektor felírható
$\lambda_1(1, 2, 0) + \lambda_2(0, 0, 1) = (\lambda_1, 2\lambda_1, \lambda_2)$ alakban. Ez azt jelenti, hogy két szabadsági fokunk van, melyet célszerű az x és z koordinátáknak választani és fenáll az $y = 2x$ összefüggés. Tehát az altér egy sík, melynek egyenlete: $2x - y = 0$

Példa: Alteret alkot-e az $(x, y, 1) \in \mathbb{R}^3$ alakú vektorok?
Nem, mert a számmal való szorzásra nem zárt: $2 \cdot (x, y, 1) = (2x, 2y, 2)$, ami nem része a halmaznak.