Lineáris egyenletrendszerek

Matematika A2x

2020 ősz

Példa

1. példa Oldjuk meg az alábbi egyenletrendszert:

$$\begin{aligned} x + y + 5z &= 3 \\ -x + 2y + 4z &= 6 \\ 2x + 3y + 12z &= 8 \end{aligned}$$

Példa

1. példa Oldjuk meg az alábbi egyenletrendszert:

$$\begin{aligned} x + y + 5z &= 3 \\ -x + 2y + 4z &= 6 \\ 2x + 3y + 12z &= 8 \end{aligned}$$

Naív módszer: küszöböljük ki a változókat (jól működik 2-3 változóra)
Az első egyenletből $x = 2 - y - 5z$, amit beírhatunk a többi egyenletbe:

$$\begin{aligned} x &= 3 - y - 5z \\ -(3 - y - 5z) + 2y + 4z &= 6 \\ 2(3 - y - 5z) + 3y + 12z &= 8 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} x &= 3 - y - 5z \\ 3y + 9z &= 9 \\ y + 2z &= 2 \end{aligned}$$

Példa

1. példa Oldjuk meg az alábbi egyenletrendszert:

$$\begin{aligned} x+y+5z &= 3\\ -x+2y+4z &= 6\\ 2x+3y+12z &= 8 \end{aligned}$$

Naív módszer: küszöböljük ki a változókat (jól működik 2-3 változóra)
Az első egyenletből $x = 2 - y - 5z$, amit beírhatunk a többi egyenletbe:

$$\begin{aligned} x &= 3-y-5z\\ -(3-y-5z)+2y+4z &= 6\\ 2(3-y-5z)+3y+12z &= 8 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} x &= 3-y-5z\\ 3y+9z &= 9\\ y+2z &= 2 \end{aligned}$$

A harmadik egyenletből $y = 2 - 2z$, amit beírhatunk a többi egyenletbe:

$$\begin{aligned} x &= 3-(2-2z)-5z\\ 3(2-2z)+9z &= 9\\ y &= 2-2z \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} x &= 1-3z\\ 3z &= 3\\ y &= 2-2z \end{aligned}$$

Példa

1. példa Oldjuk meg az alábbi egyenletrendszert:

$$\begin{array}{rcl} x+y+5z & = & 3 \\ -x+2y+4z & = & 6 \\ 2x+3y+12z & = & 8 \end{array}$$

Naív módszer: küszöböljük ki a változókat (jól működik 2-3 változóra)
Az első egyenletből $x = 2 - y - 5z$, amit beírhatunk a többi egyenletbe:

$$\begin{array}{rcl} x & = & 3-y-5z \\ -(3-y-5z)+2y+4z & = & 6 \\ 2(3-y-5z)+3y+12z & = & 8 \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{rcl} x & = & 3-y-5z \\ 3y+9z & = & 9 \\ y+2z & = & 2 \end{array}$$

A harmadik egyenletből $y = 2 - 2z$, amit beírhatunk a többi egyenletbe:

$$\begin{array}{rcl} x & = & 3-(2-2z)-5z \\ 3(2-2z)+9z & = & 9 \\ y & = & 2-2z \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{rcl} x & = & 1-3z \\ 3z & = & 3 \\ y & = & 2-2z \end{array}$$

A második egyenletből adódik, hogy $z = 1$, amit visszahelyettesítve kapjuk, hogy $y = 0$ és $x = -2$.

Megengedhető lépések

Második megoldás: Milyen műveleteket tehetünk meg magukkal az egyenletekkel anélkül, hogy változna azok érvnyessége?

Megengedhető lépések

Második megoldás: Milyen műveleteket tehetünk meg magukkal az egyenletekkel anélkül, hogy változna azok érvnyessége?

1. két egyenlet sorrendjének felcserélése

Megengedhető lépések

Második megoldás: Milyen műveleteket tehetünk meg magukkal az egyenletekkel anélkül, hogy változna azok érvnyessége?

1. két egyenlet sorrendjének felcserélése
2. egy egyenlet szorzása egy nem 0 valós számmal

Megengedhető lépések

Második megoldás: Milyen műveleteket tehetünk meg magukkal az egyenletekkel anélkül, hogy változna azok érvnyessége?

1. két egyenlet sorrendjének felcserélése
2. egy egyenlet szorzása egy nem 0 valós számmal
3. két egyenlet összeadása vagy egyik egyenlethez egy másik számszorosának hozzáadása

Megengedhető lépések

Második megoldás: Milyen műveleteket tehetünk meg magukkal az egyenletekkel anélkül, hogy változna azok érvnyessége?

1. két egyenlet sorrendjének felcserélése
2. egy egyenlet szorzása egy nem 0 valós számmal
3. két egyenlet összeadása vagy egyik egyenlethez egy másik számszorosának hozzáadása

Megoldás: A második egyenlethez adjuk hozzá az első egyenletet, a harmadikból pedig a kétszeresét vonjuk le:

$$\begin{array}{rcl} x+y+5z &=& 3 \\ -x+2y+4z &=& 6 \\ 2x+3y+12z &=& 8 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{rcl} x+y+5z &=& 3 \\ 3y+9z &=& 9 \\ y+2z &=& 2 \end{array}$$

Megengedhető lépések

Második megoldás: Milyen műveleteket tehetünk meg magukkal az egyenletekkel anélkül, hogy változna azok érvnyessége?

1. két egyenlet sorrendjének felcserélése
2. egy egyenlet szorzása egy nem 0 valós számmal
3. két egyenlet összeadása vagy egyik egyenlethez egy másik számszorosának hozzáadása

Megoldás: A második egyenlethez adjuk hozzá az első egyenletet, a harmadikból pedig a kétszeresét vonjuk le:

$$\begin{aligned} x+y+5z &= 3 \\ -x+2y+4z &= 6 \\ 2x+3y+12z &= 8 \end{aligned} \quad\Rightarrow\quad \begin{aligned} x+y+5z &= 3 \\ 3y+9z &= 9 \\ y+2z &= 2 \end{aligned}$$

Ezután osszuk le a második egyenletet 3-al és azt vonjuk ki az első és harmadik egyenletekből:

$$\begin{aligned} x+y+5z &= 3 \\ y+3z &= 3 \\ y+2z &= 2 \end{aligned} \quad\Rightarrow\quad \begin{aligned} x+2z &= 0 \\ y+3z &= 3 \\ -z &= -1 \end{aligned}$$

Megengedhető lépések

Második megoldás: Milyen műveleteket tehetünk meg magukkal az egyenletekkel anélkül, hogy változna azok érvnyessége?

1. két egyenlet sorrendjének felcserélése
2. egy egyenlet szorzása egy nem 0 valós számmal
3. két egyenlet összeadása vagy egyik egyenlethez egy másik számszorosának hozzáadása

Megoldás: A második egyenlethez adjuk hozzá az első egyenletet, a harmadikból pedig a kétszeresét vonjuk le:

$$\begin{array}{rcl} x+y+5z &=& 3 \\ -x+2y+4z &=& 6 \\ 2x+3y+12z &=& 8 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{rcl} x+y+5z &=& 3 \\ 3y+9z &=& 9 \\ y+2z &=& 2 \end{array}$$

Ezután osszuk le a második egyenletet 3-al és azt vonjuk ki az első és harmadik egyenletekből:

$$\begin{array}{rcl} x+y+5z &=& 3 \\ y+3z &=& 3 \\ y+2z &=& 2 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{rcl} x+2z &=& 0 \\ y+3z &=& 3 \\ -z &=& -1 \end{array}$$

Másik megoldás (folytatás)

Vegyük most a harmadik egyenlet (-1)-szeresét és ennek a kétszeresét az első, háromszorosát a második egyenletből kivonva adódik a megoldás:

$$\begin{array}{rcl} x+2z & = & 0 \\ y+3z & = & 3 \\ z & = & 1 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{rcl} x & = & -2 \\ y & = & 0 \\ z & = & 1 \end{array}$$

Másik megoldás (folytatás)

Vegyük most a harmadik egyenlet (-1)-szeresét és ennek a kétszeresét az első, háromszorosát a második egyenletből kivonva adódik a megoldás:

$$\begin{array}{rcl} x+2z &=& 0 \\ y+3z &=& 3 \\ z &=& 1 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{rcl} x &=& -2 \\ y &=& 0 \\ z &=& 1 \end{array}$$

Írjuk ezt most fel mátrixos alakban is:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 5 & 3 \\ -1 & 2 & 4 & 6 \\ 2 & 3 & 12 & 8 \end{array}\right]$$

Másik megoldás (folytatás)

Vegyük most a harmadik egyenlet (-1)-szeresét és ennek a kétszeresét az első, háromszorosát a második egyenletből kivonva adódik a megoldás:

$$\begin{array}{rcl} x+2z & = & 0 \\ y+3z & = & 3 \\ z & = & 1 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{rcl} x & = & -2 \\ y & = & 0 \\ z & = & 1 \end{array}$$

Írjuk ezt most fel mátrixos alakban is:

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 5 & 3 \\ -1 & 2 & 4 & 6 \\ 2 & 3 & 12 & 8 \end{array}\right] \quad \begin{array}{c} s_2+s_1 \\ \sim \\ s_3-2s_1 \end{array}$$

Másik megoldás (folytatás)

Vegyük most a harmadik egyenlet (-1)-szeresét és ennek a kétszeresét az első, háromszorosát a második egyenletből kivonva adódik a megoldás:

$$\begin{array}{rcl} x+2z & = & 0 \\ y+3z & = & 3 \\ z & = & 1 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{rcl} x & = & -2 \\ y & = & 0 \\ z & = & 1 \end{array}$$

Írjuk ezt most fel mátrixos alakban is:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 5 & 3 \\ -1 & 2 & 4 & 6 \\ 2 & 3 & 12 & 8 \end{array}\right] \begin{array}{c} s_2+s_1 \\ \sim \\ s_3-2s_1 \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 5 & 3 \\ 0 & 3 & 9 & 9 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \end{array}\right]$$

Másik megoldás (folytatás)

Vegyük most a harmadik egyenlet (-1)-szeresét és ennek a kétszeresét az első, háromszorosát a második egyenletből kivonva adódik a megoldás:

$$\begin{array}{rcl} x+2z & = & 0 \\ y+3z & = & 3 \\ z & = & 1 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{rcl} x & = & -2 \\ y & = & 0 \\ z & = & 1 \end{array}$$

Írjuk ezt most fel mátrixos alakban is:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 5 & 3 \\ -1 & 2 & 4 & 6 \\ 2 & 3 & 12 & 8 \end{array}\right] \begin{array}{c} s_2+s_1 \\ \sim \\ s_3-2s_1 \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 5 & 3 \\ 0 & 3 & 9 & 9 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \end{array}\right] \begin{array}{c} \frac{s_2}{3} \\ \sim \\ \end{array}$$

Másik megoldás (folytatás)

Vegyük most a harmadik egyenlet (-1)-szeresét és ennek a kétszeresét az első, háromszorosát a második egyenletből kivonva adódik a megoldás:

$$\begin{array}{rcl} x+2z & = & 0 \\ y+3z & = & 3 \\ z & = & 1 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{rcl} x & = & -2 \\ y & = & 0 \\ z & = & 1 \end{array}$$

Írjuk ezt most fel mátrixos alakban is:

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 5 & 3 \\ -1 & 2 & 4 & 6 \\ 2 & 3 & 12 & 8 \end{array}\right] \begin{array}{c} s_2+s_1 \\ \sim \\ s_3-2s_1 \end{array} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 5 & 3 \\ 0 & 3 & 9 & 9 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \end{array}\right] \overset{\frac{s_2}{3}}{\sim} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 5 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \end{array}\right]$$

Másik megoldás (folytatás)

Vegyük most a harmadik egyenlet (-1)-szeresét és ennek a kétszeresét az első, háromszorosát a második egyenletből kivonva adódik a megoldás:

$$\begin{array}{rcl} x+2z & = & 0 \\ y+3z & = & 3 \\ z & = & 1 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{rcl} x & = & -2 \\ y & = & 0 \\ z & = & 1 \end{array}$$

Írjuk ezt most fel mátrixos alakban is:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 5 & 3 \\ -1 & 2 & 4 & 6 \\ 2 & 3 & 12 & 8 \end{array}\right] \begin{array}{c} s_2+s_1 \\ \sim \\ s_3-2s_1 \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 5 & 3 \\ 0 & 3 & 9 & 9 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \end{array}\right] \overset{\frac{s_2}{3}}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 5 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \end{array}\right] \begin{array}{c} s_1-s_2 \\ \sim \\ s_3-s_2 \end{array}$$

Másik megoldás (folytatás)

Vegyük most a harmadik egyenlet (-1)-szeresét és ennek a kétszeresét az első, háromszorosát a második egyenletből kivonva adódik a megoldás:

$$\begin{array}{rcl} x+2z &=& 0 \\ y+3z &=& 3 \\ z &=& 1 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{rcl} x &=& -2 \\ y &=& 0 \\ z &=& 1 \end{array}$$

Írjuk ezt most fel mátrixos alakban is:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 5 & 3 \\ -1 & 2 & 4 & 6 \\ 2 & 3 & 12 & 8 \end{array}\right] \begin{array}{c} s_2+s_1 \\ \sim \\ s_3-2s_1 \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 5 & 3 \\ 0 & 3 & 9 & 9 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \end{array}\right] \begin{array}{c} \frac{s_2}{3} \\ \sim \\ \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 5 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \end{array}\right] \begin{array}{c} s_1-s_2 \\ \sim \\ s_3-s_2 \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{array}\right]$$

Másik megoldás (folytatás)

Vegyük most a harmadik egyenlet (-1)-szeresét és ennek a kétszeresét az első, háromszorosát a második egyenletből kivonva adódik a megoldás:

$$\begin{array}{rcl} x+2z & = & 0 \\ y+3z & = & 3 \\ z & = & 1 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{rcl} x & = & -2 \\ y & = & 0 \\ z & = & 1 \end{array}$$

Írjuk ezt most fel mátrixos alakban is:

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 5 & 3 \\ -1 & 2 & 4 & 6 \\ 2 & 3 & 12 & 8 \end{array}\right] \begin{array}{c} s_2+s_1 \\ \sim \\ s_3-2s_1 \end{array} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 5 & 3 \\ 0 & 3 & 9 & 9 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \end{array}\right] \begin{array}{c} \frac{s_2}{3} \\ \sim \\ \end{array} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 5 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \end{array}\right] \begin{array}{c} s_1-s_2 \\ \sim \\ s_3-s_2 \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{array}\right] \begin{array}{c} \frac{s_3}{(-1)} \\ \sim \\ \end{array}$$

Másik megoldás (folytatás)

Vegyük most a harmadik egyenlet (-1)-szeresét és ennek a kétszeresét az első, háromszorosát a második egyenletből kivonva adódik a megoldás:

$$\begin{array}{rcrcrcr} x+2z & = & 0 & & x & = & -2 \\ y+3z & = & 3 & \Rightarrow & y & = & 0 \\ z & = & 1 & & z & = & 1 \end{array}$$

Írjuk ezt most fel mátrixos alakban is:

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 5 & 3 \\ -1 & 2 & 4 & 6 \\ 2 & 3 & 12 & 8 \end{array}\right] \begin{array}{c} s_2+s_1 \\ \sim \\ s_3-2s_1 \end{array} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 5 & 3 \\ 0 & 3 & 9 & 9 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \end{array}\right] \overset{\frac{s_2}{3}}{\sim} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 5 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \end{array}\right] \begin{array}{c} s_1-s_2 \\ \sim \\ s_3-s_2 \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{array}\right] \overset{\frac{s_3}{(-1)}}{\sim} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

Másik megoldás (folytatás)

Vegyük most a harmadik egyenlet (-1)-szeresét és ennek a kétszeresét az első, háromszorosát a második egyenletből kivonva adódik a megoldás:

$$\begin{array}{rclcrcl} x+2z & = & 0 & & x & = & -2 \\ y+3z & = & 3 & \Rightarrow & y & = & 0 \\ z & = & 1 & & z & = & 1 \end{array}$$

Írjuk ezt most fel mátrixos alakban is:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 5 & 3 \\ -1 & 2 & 4 & 6 \\ 2 & 3 & 12 & 8 \end{array}\right] \begin{array}{c} s_2+s_1 \\ \sim \\ s_3-2s_1 \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 5 & 3 \\ 0 & 3 & 9 & 9 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \end{array}\right] \begin{array}{c} \frac{s_2}{3} \\ \sim \\ \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 5 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \end{array}\right] \begin{array}{c} s_1-s_2 \\ \sim \\ s_3-s_2 \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{array}\right] \begin{array}{c} \frac{s_3}{(-1)} \\ \sim \\ \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{c} s_1-2s_3 \\ \sim \\ s_2-3s_3 \end{array}$$

Másik megoldás (folytatás)

Vegyük most a harmadik egyenlet (-1)-szeresét és ennek a kétszeresét az első, háromszorosát a második egyenletből kivonva adódik a megoldás:

$$\begin{array}{rcl} x+2z &=& 0\\ y+3z &=& 3\\ z &=& 1 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{rcl} x &=& -2\\ y &=& 0\\ z &=& 1 \end{array}$$

Írjuk ezt most fel mátrixos alakban is:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 5 & 3\\ -1 & 2 & 4 & 6\\ 2 & 3 & 12 & 8 \end{array}\right] \begin{array}{c} s_2+s_1\\ \sim\\ s_3-2s_1 \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 5 & 3\\ 0 & 3 & 9 & 9\\ 0 & 1 & 2 & 2 \end{array}\right] \begin{array}{c} \frac{s_2}{3}\\ \sim\\ \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 5 & 3\\ 0 & 1 & 3 & 3\\ 0 & 1 & 2 & 2 \end{array}\right] \begin{array}{c} s_1-s_2\\ \sim\\ s_3-s_2 \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 0\\ 0 & 1 & 3 & 3\\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{array}\right] \begin{array}{c} \frac{s_3}{(-1)}\\ \sim\\ \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 0\\ 0 & 1 & 3 & 3\\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{c} s_1-2s_3\\ \sim\\ s_2-3s_3 \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -2\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

Másik megoldás (folytatás)

Vegyük most a harmadik egyenlet (-1)-szeresét és ennek a kétszeresét az első, háromszorosát a második egyenletből kivonva adódik a megoldás:

$$\begin{array}{rcl} x+2z &=& 0 \\ y+3z &=& 3 \\ z &=& 1 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{rcl} x &=& -2 \\ y &=& 0 \\ z &=& 1 \end{array}$$

Írjuk ezt most fel mátrixos alakban is:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 5 & 3 \\ -1 & 2 & 4 & 6 \\ 2 & 3 & 12 & 8 \end{array}\right] \begin{array}{c} s_2+s_1 \\ \sim \\ s_3-2s_1 \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 5 & 3 \\ 0 & 3 & 9 & 9 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \end{array}\right] \begin{array}{c} \frac{s_2}{3} \\ \sim \\ \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 5 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \end{array}\right] \begin{array}{c} s_1-s_2 \\ \sim \\ s_3-s_2 \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{array}\right] \begin{array}{c} \frac{s_3}{(-1)} \\ \sim \\ \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{c} s_1-2s_3 \\ \sim \\ s_2-3s_3 \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

Visszatérve az egyenletekre, ez azt jelenti, hogy $x=-2$, $y=0$ és $z=1$.

Lineáris egyenletrendszer

Definíció

Lineáris egyenletrendszeren véges sok elsőfokú egyenletet tartalmazó egyenletrendszert értünk, melyek mindegyike véges számú ismeretlent tartalmaz.

Lineáris egyenletrendszer

Definíció

Lineáris egyenletrendszeren véges sok elsőfokú egyenletet tartalmazó egyenletrendszert értünk, melyek mindegyike véges számú ismeretlent tartalmaz. Általános alak:

$$\begin{array}{rcl} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}$$

Lineáris egyenletrendszer

Definíció

Lineáris egyenletrendszeren véges sok elsőfokú egyenletet tartalmazó egyenletrendszert értünk, melyek mindegyike véges számú ismeretlent tartalmaz. Általános alak:

$$\begin{array}{rcl} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}$$

Mátrixos alak:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} \Longrightarrow A\mathbf{x} = \mathbf{b},$$

ahol $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ az együttható mátrix, $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$ az eredményvektor, $[A|b] \in \mathbb{R}^{m\times(n+1)}$ a kibővített együttható mátrix és $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ a változó.

Példa

2. példa Oldjuk meg az alábbi egyenletrendszert:

$$\begin{aligned} 2x_1 - 2x_2 + x_3 + 4x_4 &= 5 \\ x_1 + 5x_3 + 3x_2 + 7x_4 &= 7 \\ 11x_2 + 17x_4 + 14x_3 + x_1 &= 12 \end{aligned}$$

Példa

2. példa Oldjuk meg az alábbi egyenletrendszert:

$$\begin{aligned} 2x_1 - 2x_2 + x_3 + 4x_4 &= 5 \\ x_1 + 5x_3 + 3x_2 + 7x_4 &= 7 \\ 11x_2 + 17x_4 + 14x_3 + x_1 &= 12 \end{aligned}$$

Az egyenletrendszer mátrixos alakjából induljunk ki:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 2 & -2 & 1 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 5 & 7 & 7 \\ 1 & 11 & 14 & 17 & 12 \end{array}\right]$$

Példa

2. példa Oldjuk meg az alábbi egyenletrendszert:

$$\begin{aligned} 2x_1 - 2x_2 + x_3 + 4x_4 &= 5 \\ x_1 + 5x_3 + 3x_2 + 7x_4 &= 7 \\ 11x_2 + 17x_4 + 14x_3 + x_1 &= 12 \end{aligned}$$

Az egyenletrendszer mátrixos alakjából induljunk ki:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 2 & -2 & 1 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 5 & 7 & 7 \\ 1 & 11 & 14 & 17 & 12 \end{array}\right] \begin{array}{c} s_1 \leftrightarrow s_2 \\ \sim \\ \end{array}$$

Példa

2. példa Oldjuk meg az alábbi egyenletrendszert:

$$\begin{aligned} 2x_1 - 2x_2 + x_3 + 4x_4 &= 5 \\ x_1 + 5x_3 + 3x_2 + 7x_4 &= 7 \\ 11x_2 + 17x_4 + 14x_3 + x_1 &= 12 \end{aligned}$$

Az egyenletrendszer mátrixos alakjából induljunk ki:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 2 & -2 & 1 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 5 & 7 & 7 \\ 1 & 11 & 14 & 17 & 12 \end{array}\right] \overset{s_1 \leftrightarrow s_2}{\sim} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 5 & 7 & 7 \\ 2 & -2 & 1 & 4 & 5 \\ 1 & 11 & 14 & 17 & 12 \end{array}\right]$$

Példa

2. példa Oldjuk meg az alábbi egyenletrendszert:

$$\begin{aligned} 2x_1 - 2x_2 + x_3 + 4x_4 &= 5 \\ x_1 + 5x_3 + 3x_2 + 7x_4 &= 7 \\ 11x_2 + 17x_4 + 14x_3 + x_1 &= 12 \end{aligned}$$

Az egyenletrendszer mátrixos alakjából induljunk ki:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 2 & -2 & 1 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 5 & 7 & 7 \\ 1 & 11 & 14 & 17 & 12 \end{array}\right] \begin{array}{c} s_1 \leftrightarrow s_2 \\ \sim \\ \end{array} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 5 & 7 & 7 \\ 2 & -2 & 1 & 4 & 5 \\ 1 & 11 & 14 & 17 & 12 \end{array}\right] \begin{array}{c} s_2 - 2s_1 \\ \sim \\ s_3 - s_1 \end{array}$$

Példa

2. példa Oldjuk meg az alábbi egyenletrendszert:

$$\begin{aligned} 2x_1 - 2x_2 + x_3 + 4x_4 &= 5 \\ x_1 + 5x_3 + 3x_2 + 7x_4 &= 7 \\ 11x_2 + 17x_4 + 14x_3 + x_1 &= 12 \end{aligned}$$

Az egyenletrendszer mátrixos alakjából induljunk ki:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 2 & -2 & 1 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 5 & 7 & 7 \\ 1 & 11 & 14 & 17 & 12 \end{array}\right] \begin{array}{c} s_1 \leftrightarrow s_2 \\ \sim \\ \end{array} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 5 & 7 & 7 \\ 2 & -2 & 1 & 4 & 5 \\ 1 & 11 & 14 & 17 & 12 \end{array}\right] \begin{array}{c} s_2 - 2s_1 \\ \sim \\ s_3 - s_1 \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 5 & 7 & 7 \\ 0 & -8 & -9 & -10 & -9 \\ 0 & 8 & 9 & 10 & 5 \end{array}\right]$$

Példa

2. példa Oldjuk meg az alábbi egyenletrendszert:

$$\begin{aligned} 2x_1 - 2x_2 + x_3 + 4x_4 &= 5 \\ x_1 + 5x_3 + 3x_2 + 7x_4 &= 7 \\ 11x_2 + 17x_4 + 14x_3 + x_1 &= 12 \end{aligned}$$

Az egyenletrendszer mátrixos alakjából induljunk ki:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 2 & -2 & 1 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 5 & 7 & 7 \\ 1 & 11 & 14 & 17 & 12 \end{array}\right] \begin{array}{c} s_1 \leftrightarrow s_2 \\ \sim \\ \end{array} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 5 & 7 & 7 \\ 2 & -2 & 1 & 4 & 5 \\ 1 & 11 & 14 & 17 & 12 \end{array}\right] \begin{array}{c} s_2 - 2s_1 \\ \sim \\ s_3 - s_1 \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 5 & 7 & 7 \\ 0 & -8 & -9 & -10 & -9 \\ 0 & 8 & 9 & 10 & 5 \end{array}\right] \begin{array}{c} s_3 + s_2 \\ \sim \\ \end{array}$$

Példa

2. példa Oldjuk meg az alábbi egyenletrendszert:

$$\begin{aligned} 2x_1 - 2x_2 + x_3 + 4x_4 &= 5 \\ x_1 + 5x_3 + 3x_2 + 7x_4 &= 7 \\ 11x_2 + 17x_4 + 14x_3 + x_1 &= 12 \end{aligned}$$

Az egyenletrendszer mátrixos alakjából induljunk ki:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 2 & -2 & 1 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 5 & 7 & 7 \\ 1 & 11 & 14 & 17 & 12 \end{array}\right] \begin{array}{c} s_1 \leftrightarrow s_2 \\ \sim \\ \end{array} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 5 & 7 & 7 \\ 2 & -2 & 1 & 4 & 5 \\ 1 & 11 & 14 & 17 & 12 \end{array}\right] \begin{array}{c} s_2 - 2s_1 \\ \sim \\ s_3 - s_1 \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 5 & 7 & 7 \\ 0 & -8 & -9 & -10 & -9 \\ 0 & 8 & 9 & 10 & 5 \end{array}\right] \begin{array}{c} s_3 + s_2 \\ \sim \\ \end{array} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 5 & 7 & 7 \\ 0 & -8 & -9 & -10 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -4 \end{array}\right]$$

Példa

2. példa Oldjuk meg az alábbi egyenletrendszert:

$$\begin{array}{rcl} 2x_1 - 2x_2 + x_3 + 4x_4 & = & 5 \\ x_1 + 5x_3 + 3x_2 + 7x_4 & = & 7 \\ 11x_2 + 17x_4 + 14x_3 + x_1 & = & 12 \end{array}$$

Az egyenletrendszer mátrixos alakjából induljunk ki:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 2 & -2 & 1 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 5 & 7 & 7 \\ 1 & 11 & 14 & 17 & 12 \end{array}\right] \begin{array}{c} s_1 \leftrightarrow s_2 \\ \sim \\ \end{array} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 5 & 7 & 7 \\ 2 & -2 & 1 & 4 & 5 \\ 1 & 11 & 14 & 17 & 12 \end{array}\right] \begin{array}{c} s_2 - 2s_1 \\ \sim \\ s_3 - s_1 \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 5 & 7 & 7 \\ 0 & -8 & -9 & -10 & -9 \\ 0 & 8 & 9 & 10 & 5 \end{array}\right] \begin{array}{c} s_3 + s_2 \\ \sim \\ \end{array} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 5 & 7 & 7 \\ 0 & -8 & -9 & -10 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -4 \end{array}\right]$$

Az utolsó sornak megfelelő egyenlet: $0x_1 + 0x_2 + 0x_3 + 0x_4 = -4$, ami ellentmondás $\Rightarrow$ NINCS MEGOLDÁS

Példa

3. példa Oldjuk meg az alábbi egyenletrendszert:

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 - x_3 &= 5 \\ 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 &= 29 \\ x_1 - 11x_2 + 13x_3 &= 33 \end{aligned}$$

Példa

3. példa Oldjuk meg az alábbi egyenletrendszert:

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 - x_3 &= 5 \\ 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 &= 29 \\ x_1 - 11x_2 + 13x_3 &= 33 \end{aligned}$$

Az egyenletrendszer mátrixos alakjából induljunk ki:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & 5 \\ 3 & 2 & 4 & 29 \\ 1 & -11 & 13 & 33 \end{array}\right]$$

Példa

3. példa Oldjuk meg az alábbi egyenletrendszert:

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 - x_3 &= 5 \\ 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 &= 29 \\ x_1 - 11x_2 + 13x_3 &= 33 \end{aligned}$$

Az egyenletrendszer mátrixos alakjából induljunk ki:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & 5 \\ 3 & 2 & 4 & 29 \\ 1 & -11 & 13 & 33 \end{array}\right] \begin{array}{c} s_2 - 3s_1 \\ \sim \\ s_3 - s_1 \end{array}$$

Példa

3. példa Oldjuk meg az alábbi egyenletrendszert:

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 - x_3 &= 5 \\ 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 &= 29 \\ x_1 - 11x_2 + 13x_3 &= 33 \end{aligned}$$

Az egyenletrendszer mátrixos alakjából induljunk ki:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & 5 \\ 3 & 2 & 4 & 29 \\ 1 & -11 & 13 & 33 \end{array}\right] \begin{array}{c} s_2 - 3s_1 \\ \sim \\ s_3 - s_1 \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & 5 \\ 0 & -7 & 7 & 14 \\ 0 & -14 & 14 & 28 \end{array}\right]$$

Példa

3. példa Oldjuk meg az alábbi egyenletrendszert:

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 - x_3 &= 5 \\ 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 &= 29 \\ x_1 - 11x_2 + 13x_3 &= 33 \end{aligned}$$

Az egyenletrendszer mátrixos alakjából induljunk ki:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & 5 \\ 3 & 2 & 4 & 29 \\ 1 & -11 & 13 & 33 \end{array}\right] \begin{array}{c} s_2 - 3s_1 \\ \sim \\ s_3 - s_1 \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & 5 \\ 0 & -7 & 7 & 14 \\ 0 & -14 & 14 & 28 \end{array}\right] \begin{array}{c} \frac{s_2}{-7} \\ \sim \\ \frac{s_3}{-14} \end{array}$$

Példa

3. példa Oldjuk meg az alábbi egyenletrendszert:

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 - x_3 &= 5 \\ 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 &= 29 \\ x_1 - 11x_2 + 13x_3 &= 33 \end{aligned}$$

Az egyenletrendszer mátrixos alakjából induljunk ki:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & 5 \\ 3 & 2 & 4 & 29 \\ 1 & -11 & 13 & 33 \end{array}\right] \begin{array}{c} s_2 - 3s_1 \\ \sim \\ s_3 - s_1 \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & 5 \\ 0 & -7 & 7 & 14 \\ 0 & -14 & 14 & 28 \end{array}\right] \begin{array}{c} \frac{s_2}{-7} \\ \sim \\ \frac{s_3}{-14} \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \end{array}\right]$$

Példa

3. példa Oldjuk meg az alábbi egyenletrendszert:

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 - x_3 &= 5 \\ 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 &= 29 \\ x_1 - 11x_2 + 13x_3 &= 33 \end{aligned}$$

Az egyenletrendszer mátrixos alakjából induljunk ki:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & 5 \\ 3 & 2 & 4 & 29 \\ 1 & -11 & 13 & 33 \end{array}\right] \begin{array}{c} s_2 - 3s_1 \\ \sim \\ s_3 - s_1 \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & 5 \\ 0 & -7 & 7 & 14 \\ 0 & -14 & 14 & 28 \end{array}\right] \begin{array}{c} \frac{s_2}{-7} \\ \sim \\ \frac{s_3}{-14} \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \end{array}\right] \begin{array}{c} s_1 - 3s_2 \\ \sim \\ s_3 - s_2 \end{array}$$

Példa

3. példa Oldjuk meg az alábbi egyenletrendszert:

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 - x_3 &= 5 \\ 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 &= 29 \\ x_1 - 11x_2 + 13x_3 &= 33 \end{aligned}$$

Az egyenletrendszer mátrixos alakjából induljunk ki:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & 5 \\ 3 & 2 & 4 & 29 \\ 1 & -11 & 13 & 33 \end{array}\right] \begin{array}{c} s_2 - 3s_1 \\ \sim \\ s_3 - s_1 \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & 5 \\ 0 & -7 & 7 & 14 \\ 0 & -14 & 14 & 28 \end{array}\right] \begin{array}{c} \frac{s_2}{-7} \\ \sim \\ \frac{s_3}{-14} \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \end{array}\right] \begin{array}{c} s_1 - 3s_2 \\ \sim \\ s_3 - s_2 \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 11 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Példa

3. példa Oldjuk meg az alábbi egyenletrendszert:

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 - x_3 &= 5 \\ 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 &= 29 \\ x_1 - 11x_2 + 13x_3 &= 33 \end{aligned}$$

Az egyenletrendszer mátrixos alakjából induljunk ki:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & 5 \\ 3 & 2 & 4 & 29 \\ 1 & -11 & 13 & 33 \end{array}\right] \begin{array}{c} s_2 - 3s_1 \\ \sim \\ s_3 - s_1 \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & 5 \\ 0 & -7 & 7 & 14 \\ 0 & -14 & 14 & 28 \end{array}\right] \begin{array}{c} \frac{s_2}{-7} \\ \sim \\ \frac{s_3}{-14} \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \end{array}\right] \begin{array}{c} s_1 - 3s_2 \\ \sim \\ s_3 - s_2 \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 11 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Látható, hogy az utolsó sor nem ad információt a változókra nézve, így elhagyható. A másik két egyenletből $x_1 = 11 - 2x_3$ és $x_2 = x_3 - 2$, ahol x_2 bármilyen valós lehet, szabad paraméter $\Rightarrow \infty$ számú megoldás van.

Gauss(-Jordan) elimináció

Az egyenleteknél megengedett műveletekhez tartozó sorműveletek:

Gauss(-Jordan) elimináció

Az egyenleteknél megengedett műveletekhez tartozó sorműveletek:

1. Két sor felcserélése ($s_i \leftrightarrow s_j$)

Gauss(-Jordan) elimináció

Az egyenleteknél megengedett műveletekhez tartozó sorműveletek:

1. Két sor felcserélése ($s_i \leftrightarrow s_j$)
2. Sor szorzása nem 0 számmal (λs_i)

Gauss(-Jordan) elimináció

Az egyenleteknél megengedett műveletekhez tartozó sorműveletek:

1. Két sor felcserélése ($s_i \leftrightarrow s_j$)
2. Sor szorzása nem 0 számmal (λs_i)
3. Egy sorhoz hozzáadjuk egy másik sor számszorosát ($s_i + \lambda s_j$)

Gauss(-Jordan) elimináció

Az egyenleteknél megengedett műveletekhez tartozó sorműveletek:

1. Két sor felcserélése ($s_i \leftrightarrow s_j$)
2. Sor szorzása nem 0 számmal (λs_i)
3. Egy sorhoz hozzáadjuk egy másik sor számszorosát ($s_i + \lambda s_j$)

A fenti elemi sorműveletek segítségével megoldjuk az egyenletrendszer:

Gauss(-Jordan) elimináció

Az egyenleteknél megengedett műveletekhez tartozó sorműveletek:

1. Két sor felcserélése ($s_i \leftrightarrow s_j$)
2. Sor szorzása nem 0 számmal (λs_i)
3. Egy sorhoz hozzáadjuk egy másik sor számszorosát ($s_i + \lambda s_j$)

A fenti elemi sorműveletek segítségével megoldjuk az egyenletrendszer:

1. Elérjük, hogy a mátrix bal felső eleme 1 legyen, amit vezéregyesnek nevezünk. (1-2 művelet) Ha ez nem lehetséges, letakarjuk az első oszlopot és az így kapott kisebb mátrixszal próbálkozunk ismét.

Gauss(-Jordan) elimináció

Az egyenleteknél megengedett műveletekhez tartozó sorműveletek:

1. Két sor felcserélése ($s_i \leftrightarrow s_j$)
2. Sor szorzása nem 0 számmal (λs_i)
3. Egy sorhoz hozzáadjuk egy másik sor számszorosát ($s_i + \lambda s_j$)

A fenti elemi sorműveletek segítségével megoldjuk az egyenletrendszer:

1. Elérjük, hogy a mátrix bal felső eleme 1 legyen, amit vezéregyesnek nevezünk. (1-2 művelet) Ha ez nem lehetséges, letakarjuk az első oszlopot és az így kapott kisebb mátrixszal próbálkozunk ismét.
2. Minden ezen vezéregyes alatti (és feletti) elemeket kinullázuk. (3 művelet)

Gauss(-Jordan) elimináció

Az egyenleteknél megengedett műveletekhez tartozó sorműveletek:

1. Két sor felcserélése ($s_i \leftrightarrow s_j$)
2. Sor szorzása nem 0 számmal (λs_i)
3. Egy sorhoz hozzáadjuk egy másik sor számszorosát ($s_i + \lambda s_j$)

A fenti elemi sorműveletek segítségével megoldjuk az egyenletrendszer:

1. Elérjük, hogy a mátrix bal felső eleme 1 legyen, amit vezéregyesnek nevezünk. (1-2 művelet) Ha ez nem lehetséges, letakarjuk az első oszlopot és az így kapott kisebb mátrixszal próbálkozunk ismét.
2. Minden ezen vezéregyes alatti (és feletti) elemeket kinullázuk. (3 művelet)
3. A fenti két lépést ismételjük azon a kisebb mátrixon, amit úgy kapunk, hogy letakarjuk az előző mátrix első sorát és oszloptát.

Gauss(-Jordan) elimináció

Az egyenleteknél megengedett műveletekhez tartozó sorműveletek:

1. Két sor felcserélése ($s_i \leftrightarrow s_j$)
2. Sor szorzása nem 0 számmal (λs_i)
3. Egy sorhoz hozzáadjuk egy másik sor számszorosát ($s_i + \lambda s_j$)

A fenti elemi sorműveletek segítségével megoldjuk az egyenletrendszer:

1. Elérjük, hogy a mátrix bal felső eleme 1 legyen, amit vezéregyesnek nevezünk. (1-2 művelet) Ha ez nem lehetséges, letakarjuk az első oszlopot és az így kapott kisebb mátrixszal próbálkozunk ismét.
2. Minden ezen vezéregyes alatti (és feletti) elemeket kinullázuk. (3 művelet)
3. A fenti két lépést ismételjük azon a kisebb mátrixon, amit úgy kapunk, hogy letakarjuk az előző mátrix első sorát és oszloptát.

A fenti ciklus akkor ér véget, ha már minden oszlopot, vagy sort letakartunk.

A Gauss(-Jordan) elimináció lehetséges kimenetelei

Az előbbi eljárás végén a következő két eset lehet:

A Gauss(-Jordan) elimináció lehetséges kimenetelei

Az előbbi eljárás végén a következő két eset lehet:

1. Van nulla sor a $|$ előttig. Ebben az esetben is két lehetőség van:

A Gauss(-Jordan) elimináció lehetséges kimenetelei

Az előbbi eljárás végén a következő két eset lehet:

1. Van nulla sor a $|$ előttig. Ebben az esetben is két lehetőség van:
    1. A $|$ után is 0 áll

A Gauss(-Jordan) elimináció lehetséges kimenetelei

Az előbbi eljárás végén a következő két eset lehet:

1. Van nulla sor a $|$ előttig. Ebben az esetben is két lehetőség van:
    1. A $|$ után is 0 áll $\Rightarrow$ a sor elhagyható

A Gauss(-Jordan) elimináció lehetséges kimenetelei

Az előbbi eljárás végén a következő két eset lehet:

1. Van nulla sor a $|$ előttig. Ebben az esetben is két lehetőség van:
   1. A $|$ után is 0 áll $\Rightarrow$ a sor elhagyható
   2. A $|$ után nem 0 áll

A Gauss(-Jordan) elimináció lehetséges kimenetelei

Az előbbi eljárás végén a következő két eset lehet:

1. Van nulla sor a $|$ előttig. Ebben az esetben is két lehetőség van:
    1. A $|$ után is 0 áll $\Rightarrow$ a sor elhagyható
    2. A $|$ után nem 0 áll $\Rightarrow$ nincs megoldás

A Gauss(-Jordan) elimináció lehetséges kimenetelei

Az előbbi eljárás végén a következő két eset lehet:

1. Van nulla sor a $|$ előttig. Ebben az esetben is két lehetőség van:
   1. A $|$ után is 0 áll $\Rightarrow$ a sor elhagyható
   2. A $|$ után nem 0 áll $\Rightarrow$ nincs megoldás
2. Nincs 0 sor és
   1. minden oszlop tartalmaz vezéregyest:

A Gauss(-Jordan) elimináció lehetséges kimenetelei

Az előbbi eljárás végén a következő két eset lehet:

1. Van nulla sor a $|$ előttig. Ebben az esetben is két lehetőség van:
    1. A $|$ után is 0 áll $\Rightarrow$ a sor elhagyható
    2. A $|$ után nem 0 áll $\Rightarrow$ nincs megoldás
2. Nincs 0 sor és
    1. minden oszlop tartalmaz vezéregyest: egyértelmű megoldás

A Gauss(-Jordan) elimináció lehetséges kimenetelei

Az előbbi eljárás végén a következő két eset lehet:

1. Van nulla sor a $|$ előttig. Ebben az esetben is két lehetőség van:
    1. A $|$ után is 0 áll $\Rightarrow$ a sor elhagyható
    2. A $|$ után nem 0 áll $\Rightarrow$ nincs megoldás
2. Nincs 0 sor és
    1. minden oszlop tartalmaz vezéregyest: egyértelmű megoldás
    2. van olyan oszlop, amiben nincs vezéregyes,

A Gauss(-Jordan) elimináció lehetséges kimenetelei

Az előbbi eljárás végén a következő két eset lehet:

1. Van nulla sor a $|$ előttig. Ebben az esetben is két lehetőség van:
   1. A $|$ után is 0 áll $\Rightarrow$ a sor elhagyható
   2. A $|$ után nem 0 áll $\Rightarrow$ nincs megoldás
2. Nincs 0 sor és
   1. minden oszlop tartalmaz vezéregyest: egyértelmű megoldás
   2. van olyan oszlop, amiben nincs vezéregyes, ekkor ezek szabad változók és ∞ sok megoldás van.

A Gauss(-Jordan) elimináció lehetséges kimenetelei

Az előbbi eljárás végén a következő két eset lehet:

1. Van nulla sor a $|$ előttig. Ebben az esetben is két lehetőség van:
    1. A $|$ után is 0 áll $\Rightarrow$ a sor elhagyható
    2. A $|$ után nem 0 áll $\Rightarrow$ nincs megoldás
2. Nincs 0 sor és
    1. minden oszlop tartalmaz vezéregyest: egyértelmű megoldás
    2. van olyan oszlop, amiben nincs vezéregyes, ekkor ezek szabad változók és ∞ sok megoldás van.

Tétel

Egy lineáris egyenletrendszerben a megoldások száma 0, 1 vagy ∞.

A Gauss(-Jordan) elimináció lehetséges kimenetelei

Az előbbi eljárás végén a következő két eset lehet:

1. Van nulla sor a | előttig. Ebben az esetben is két lehetőség van:
   1. A | után is 0 áll $\Rightarrow$ a sor elhagyható
   2. A | után nem 0 áll $\Rightarrow$ nincs megoldás
2. Nincs 0 sor és
   1. minden oszlop tartalmaz vezéregyest: egyértelmű megoldás
   2. van olyan oszlop, amiben nincs vezéregyes, ekkor ezek szabad változók és ∞ sok megoldás van.

Tétel

Egy lineáris egyenletrendszerben a megoldások száma 0, 1 vagy ∞.

Ha lenne mondjuk két megoldás vektor $\mathbf{m}_1$ és $\mathbf{m}_2$, akkor azoknak tetszőleges affin kombinációja is jó megoldás lenne. Tehát $\lambda \in \mathbb{R}$ esetén $A(\lambda\mathbf{m}_1 + (1-\lambda)\mathbf{m}_2) = \lambda(A\mathbf{m}_1) + (1-\lambda)(A\mathbf{m}_2) = \lambda\mathbf{b} + (1-\lambda)\mathbf{b} = \mathbf{b}$.

Homogén egyenlet

Definíció

Az $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ *alakú lineáris egyenletrendszert homogénnak nevezzük.*

Homogén egyenlet

Definíció

Az $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ *alakú lineáris egyenletrendszert homogénnak nevezzük.*

A homogén egyenleteknek mindig van megoldása, ha más nem, akkor az $\mathbf{x} = \mathbf{0}$, tehát az a kérdés, hogy van-e nemtriviális megoldás.

Homogén egyenlet

Definíció

Az $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ *alakú lineáris egyenletrendszert homogénnak nevezzük.*

A homogén egyenleteknek mindig van megoldása, ha más nem, akkor az $\mathbf{x} = \mathbf{0}$, tehát az a kérdés, hogy van-e nemtriviális megoldás.

4. példa Lineárisan függetlenek-e: $(2, 2, 0)$, $(3, -2, 5)$ és $(5, 6, -1)$

Homogén egyenlet

Definíció

Az $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ alakú lineáris egyenletrendszert homogénnak nevezzük.

A homogén egyenleteknek mindig van megoldása, ha más nem, akkor az $\mathbf{x} = \mathbf{0}$, tehát az a kérdés, hogy van-e nemtriviális megoldás.

4. példa Lineárisan függetlenek-e: $(2, 2, 0)$, $(3, -2, 5)$ és $(5, 6, -1)$
Ha függetlenek, akkor csak a triviális megoldás van, tehát $(2, 2, 0)x + (3, -2, 5)y + (5, 6, -1)z = (0, 0, 0)$ csak úgy lehet, hogy $x = y = z = 0$. Koordinátánkénti egyenletből:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 5 & 0 \\ 2 & -2 & 6 & 0 \\ 0 & 5 & -1 & 0 \end{array}\right]$$

Homogén egyenlet

Definíció

Az $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ *alakú lineáris egyenletrendszert homogénnak nevezzük.*

A homogén egyenleteknek mindig van megoldása, ha más nem, akkor az $\mathbf{x} = \mathbf{0}$, tehát az a kérdés, hogy van-e nemtriviális megoldás.

4. példa Lineárisan függetlenek-e: $(2,2,0)$, $(3,-2,5)$ és $(5,6,-1)$

Ha függetlenek, akkor csak a triviális megoldás van, tehát $(2,2,0)x + (3,-2,5)y + (5,6,-1)z = (0,0,0)$ csak úgy lehet, hogy $x = y = z = 0$. Koordinátánkénti egyenletből:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 5 & 0 \\ 2 & -2 & 6 & 0 \\ 0 & 5 & -1 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{c} s_2 \leftrightarrow s_1 \\ \sim \\ \frac{s_1 *}{2} \end{array}$$

Homogén egyenlet

Definíció

Az $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ alakú lineáris egyenletrendszert homogénnak nevezzük.

A homogén egyenleteknek mindig van megoldása, ha más nem, akkor az $\mathbf{x} = \mathbf{0}$, tehát az a kérdés, hogy van-e nemtriviális megoldás.
4. példa Lineárisan függetlenek-e: $(2, 2, 0)$, $(3, -2, 5)$ és $(5, 6, -1)$
Ha függetlenek, akkor csak a triviális megoldás van, tehát $(2, 2, 0)x + (3, -2, 5)y + (5, 6, -1)z = (0, 0, 0)$ csak úgy lehet, hogy $x = y = z = 0$. Koordinátánkénti egyenletből:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 5 & 0 \\ 2 & -2 & 6 & 0 \\ 0 & 5 & -1 & 0 \end{array}\right] \underset{\frac{s_1*}{2}}{\overset{s_2 \leftrightarrow s_1}{\sim}} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \\ 0 & 5 & -1 \end{bmatrix}$$

Homogén egyenlet

Definíció

Az $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ alakú lineáris egyenletrendszert homogénnak nevezzük.

A homogén egyenleteknek mindig van megoldása, ha más nem, akkor az $\mathbf{x} = \mathbf{0}$, tehát az a kérdés, hogy van-e nemtriviális megoldás.

4. példa Lineárisan függetlenek-e: $(2,2,0)$, $(3,-2,5)$ és $(5,6,-1)$

Ha függetlenek, akkor csak a triviális megoldás van, tehát $(2,2,0)x + (3,-2,5)y + (5,6,-1)z = (0,0,0)$ csak úgy lehet, hogy $x = y = z = 0$. Koordinátánkénti egyenletből:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 5 & 0 \\ 2 & -2 & 6 & 0 \\ 0 & 5 & -1 & 0 \end{array}\right] \underset{\frac{s_1 *}{2}}{\overset{s_2 \leftrightarrow s_1}{\sim}} \left[\begin{array}{ccc} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \\ 0 & 5 & -1 \end{array}\right] \overset{s_2 - 2s_1}{\sim}$$

Homogén egyenlet

Definíció

Az $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ alakú lineáris egyenletrendszert homogénnak nevezzük.

A homogén egyenleteknek mindig van megoldása, ha más nem, akkor az $\mathbf{x} = \mathbf{0}$, tehát az a kérdés, hogy van-e nemtriviális megoldás.

4. példa Lineárisan függetlenek-e: $(2, 2, 0)$, $(3, -2, 5)$ és $(5, 6, -1)$

Ha függetlenek, akkor csak a triviális megoldás van, tehát $(2, 2, 0)x + (3, -2, 5)y + (5, 6, -1)z = (0, 0, 0)$ csak úgy lehet, hogy $x = y = z = 0$. Koordinátánkénti egyenletből:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 5 & 0 \\ 2 & -2 & 6 & 0 \\ 0 & 5 & -1 & 0 \end{array}\right] \underset{\frac{s_1 *}{2}}{\overset{s_2 \leftrightarrow s_1}{\sim}} \left[\begin{array}{ccc} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \\ 0 & 5 & -1 \end{array}\right] \overset{s_2 - 2s_1}{\sim} \left[\begin{array}{ccc} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 5 & -1 \\ 0 & 5 & -1 \end{array}\right]$$

Homogén egyenlet

Definíció

Az $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ *alakú lineáris egyenletrendszert homogénnak nevezzük.*

A homogén egyenleteknek mindig van megoldása, ha más nem, akkor az $\mathbf{x} = \mathbf{0}$, tehát az a kérdés, hogy van-e nemtriviális megoldás.
4. példa Lineárisan függetlenek-e: $(2, 2, 0)$, $(3, -2, 5)$ és $(5, 6, -1)$
Ha függetlenek, akkor csak a triviális megoldás van, tehát $(2, 2, 0)x + (3, -2, 5)y + (5, 6, -1)z = (0, 0, 0)$ csak úgy lehet, hogy $x = y = z = 0$. Koordinátánkénti egyenletből:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 5 & 0 \\ 2 & -2 & 6 & 0 \\ 0 & 5 & -1 & 0 \end{array}\right] \underset{\frac{s_1 *}{2}}{\overset{s_2 \leftrightarrow s_1}{\sim}} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \\ 0 & 5 & -1 \end{bmatrix} \overset{s_2 - 2s_1}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 5 & -1 \\ 0 & 5 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\underset{\frac{s_2}{5}}{\overset{s_3 - s_2}{\sim}}$$

Homogén egyenlet

Definíció

Az $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ alakú lineáris egyenletrendszert homogénnak nevezzük.

A homogén egyenleteknek mindig van megoldása, ha más nem, akkor az $\mathbf{x} = \mathbf{0}$, tehát az a kérdés, hogy van-e nemtriviális megoldás.

4. példa Lineárisan függetlenek-e: $(2, 2, 0)$, $(3, -2, 5)$ és $(5, 6, -1)$
Ha függetlenek, akkor csak a triviális megoldás van, tehát $(2, 2, 0)x + (3, -2, 5)y + (5, 6, -1)z = (0, 0, 0)$ csak úgy lehet, hogy $x = y = z = 0$. Koordinátánkénti egyenletből:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 5 & 0 \\ 2 & -2 & 6 & 0 \\ 0 & 5 & -1 & 0 \end{array}\right] \underset{\frac{s_1*}{2}}{\overset{s_2 \leftrightarrow s_1}{\sim}} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \\ 0 & 5 & -1 \end{bmatrix} \overset{s_2 - 2s_1}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 5 & -1 \\ 0 & 5 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\underset{\frac{s_2}{5}}{\overset{s_3 - s_2}{\sim}} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{5} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Homogén egyenlet

Definíció

Az $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ *alakú lineáris egyenletrendszert homogénnak nevezzük.*

A homogén egyenleteknek mindig van megoldása, ha más nem, akkor az $\mathbf{x} = \mathbf{0}$, tehát az a kérdés, hogy van-e nemtriviális megoldás.

4. példa Lineárisan függetlenek-e: $(2, 2, 0)$, $(3, -2, 5)$ és $(5, 6, -1)$
Ha függetlenek, akkor csak a triviális megoldás van, tehát $(2, 2, 0)x + (3, -2, 5)y + (5, 6, -1)z = (0, 0, 0)$ csak úgy lehet, hogy $x = y = z = 0$. Koordinátánkénti egyenletből:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 5 & 0 \\ 2 & -2 & 6 & 0 \\ 0 & 5 & -1 & 0 \end{array}\right] \underset{\frac{s_1*}{2}}{\overset{s_2 \leftrightarrow s_1}{\sim}} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \\ 0 & 5 & -1 \end{bmatrix} \overset{s_2 - 2s_1}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 5 & -1 \\ 0 & 5 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\underset{\frac{s_2}{5}}{\overset{s_3 - s_2}{\sim}} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{5} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \overset{s_1 + s_2}{\sim}$$

Homogén egyenlet

Definíció

Az $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ alakú lineáris egyenletrendszert homogénnak nevezzük.

A homogén egyenleteknek mindig van megoldása, ha más nem, akkor az $\mathbf{x} = \mathbf{0}$, tehát az a kérdés, hogy van-e nemtriviális megoldás.
4. példa Lineárisan függetlenek-e: $(2, 2, 0)$, $(3, -2, 5)$ és $(5, 6, -1)$
Ha függetlenek, akkor csak a triviális megoldás van, tehát $(2, 2, 0)x + (3, -2, 5)y + (5, 6, -1)z = (0, 0, 0)$ csak úgy lehet, hogy $x = y = z = 0$. Koordinátánkénti egyenletből:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 5 & 0 \\ 2 & -2 & 6 & 0 \\ 0 & 5 & -1 & 0 \end{array}\right] \underset{\frac{s_1*}{2}}{\overset{s_2 \leftrightarrow s_1}{\sim}} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \\ 0 & 5 & -1 \end{bmatrix} \overset{s_2 - 2s_1}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 5 & -1 \\ 0 & 5 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\underset{\frac{s_2}{5}}{\overset{s_3 - s_2}{\sim}} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{5} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \overset{s_1 + s_2}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{14}{5} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{5} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Homogén egyenlet

Definíció

Az $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ alakú lineáris egyenletrendszert homogénnak nevezzük.

A homogén egyenleteknek mindig van megoldása, ha más nem, akkor az $\mathbf{x} = \mathbf{0}$, tehát az a kérdés, hogy van-e nemtriviális megoldás.

4. példa Lineárisan függetlenek-e: $(2,2,0)$, $(3,-2,5)$ és $(5,6,-1)$

Ha függetlenek, akkor csak a triviális megoldás van, tehát $(2,2,0)x + (3,-2,5)y + (5,6,-1)z = (0,0,0)$ csak úgy lehet, hogy $x = y = z = 0$. Koordinátánkénti egyenletből:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 5 & 0 \\ 2 & -2 & 6 & 0 \\ 0 & 5 & -1 & 0 \end{array}\right] \underset{\frac{s_1*}{2}}{\overset{s_2 \leftrightarrow s_1}{\sim}} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \\ 0 & 5 & -1 \end{bmatrix} \overset{s_2 - 2s_1}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 5 & -1 \\ 0 & 5 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\underset{\frac{s_2}{5}}{\overset{s_3 - s_2}{\sim}} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{5} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \overset{s_1 + s_2}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{14}{5} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{5} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{c} x = -\frac{14}{5}z \\ y = \frac{1}{5}z \\ z \in \mathbb{R} \end{array}$$

Homogén egyenlet

Definíció

Az $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ alakú lineáris egyenletrendszert homogénnak nevezzük.

A homogén egyenleteknek mindig van megoldása, ha más nem, akkor az $\mathbf{x} = \mathbf{0}$, tehát az a kérdés, hogy van-e nemtriviális megoldás.

4. példa Lineárisan függetlenek-e: $(2, 2, 0)$, $(3, -2, 5)$ és $(5, 6, -1)$
Ha függetlenek, akkor csak a triviális megoldás van, tehát $(2, 2, 0)x + (3, -2, 5)y + (5, 6, -1)z = (0, 0, 0)$ csak úgy lehet, hogy $x = y = z = 0$. Koordinátánkénti egyenletből:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 5 & 0 \\ 2 & -2 & 6 & 0 \\ 0 & 5 & -1 & 0 \end{array}\right] \underset{\frac{s_1*}{2}}{\overset{s_2 \leftrightarrow s_1}{\sim}} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \\ 0 & 5 & -1 \end{bmatrix} \overset{s_2 - 2s_1}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 5 & -1 \\ 0 & 5 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\underset{\frac{s_2}{5}}{\overset{s_3 - s_2}{\sim}} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{5} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \overset{s_1 + s_2}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{14}{5} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{5} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{c} x = -\frac{14}{5}z \\ y = \frac{1}{5}z \\ z \in \mathbb{R} \end{array} \Rightarrow \begin{array}{c} \text{N} \\ \text{E} \\ \text{M} \end{array}$$