Lineáris leképezések, sajátérték, sajátvektor

Matematika A2 műszaki menedzser

2020 tavasz

Definíció

Elképzelhetünk olyan függvényeket, amelyek különböző vektorterek között hatnak. Gondolhatunk itt például a vetítésre, ami egy három dimenziós térbeli vektorhoz rendel hozzá egy két dimenziós vektort. Ezek közül a leképezések közül csak a következő osztállyal foglalkozunk:

Definíció

Elképzelhetünk olyan függvényeket, amelyek különböző vektorterek között hatnak. Gondolhatunk itt például a vetítésre, ami egy három dimenziós térbeli vektorhoz rendel hozzá egy két dimenziós vektort. Ezek közül a leképezések közül csak a következő osztállyal foglalkozunk:

Definíció

Az $\mathcal{A} : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^k$ leképezést lineáris leképezésnek nevezzük, ha adott $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ és $\lambda \in \mathbb{R}$-re:

1. $\mathcal{A}(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = \mathcal{A}(\mathbf{x}) + \mathcal{A}(\mathbf{y})$
2. $\mathcal{A}(\lambda \mathbf{x}) = \lambda \mathcal{A}(\mathbf{x})$

Ha $n = k$, akkor a $\mathcal{A}$-t lineáris transzformációnak nevezzük.

Definíció

Elképzelhetünk olyan függvényeket, amelyek különböző vektorterek között hatnak. Gondolhatunk itt például a vetítésre, ami egy három dimenziós térbeli vektorhoz rendel hozzá egy két dimenziós vektort. Ezek közül a leképezések közül csak a következő osztállyal foglalkozunk:

Definíció

Az $\mathcal{A} : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^k$ leképezést lineáris leképezésnek nevezzük, ha adott $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ és $\lambda \in \mathbb{R}$-re:

1. $\mathcal{A}(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = \mathcal{A}(\mathbf{x}) + \mathcal{A}(\mathbf{y})$
2. $\mathcal{A}(\lambda \mathbf{x}) = \lambda \mathcal{A}(\mathbf{x})$

Ha $n = k$, akkor a $\mathcal{A}$-t lineáris transzformációnak nevezzük.

Azaz olyan leképezés, ahol két vektor összegének képe, a képvektorok összege és vektor számszorosának képe, a képvektor számszorosa. Két különböző tér között leképezés, és két egyforma tér között transzformáció (vagy egy tér önmagára való leképezése).

Emlékeztető

Ha egy n-dimenziós térben n db lineárisan független vektorunk van, akkor azok bázist alkotnak, azaz a tér minden vektora előáll ezen vektorok lineáris kombinációjaként, ráadásul ez az előállítás egyértelmű. A bázisvektorok együtthatói voltak a koordináták. Mondjuk egy szokásos térvektor koordinátáit úgy kaptuk meg, hogy megnéztük mennyi kell az x,y és z koordinátatengelyekkel párhuzamos $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ egységvektorokból. Ha n dimenzióban dolgozunk, akkor ezeket $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots \mathbf{e}_n$-vel jelöltük és természetes, vagy standard bázisnak neveztük. De másféle bázisok is vannak, azok szerint is vezethetünk be koordinátázást.

Általános vektor képe

Most vizsgáljuk meg, mi történik egy általános $\mathbf{v} = \lambda_1\mathbf{e}_1 + \lambda_2\mathbf{e}_2 + \cdots + \lambda_n\mathbf{e}_n$ vektorral ($\mathbf{v}$ koordinátája a standard bázisban $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n)$), ha alkalmazzuk rá az $\mathcal{A}$ lineáris leképezést:

$\mathcal{A}(\mathbf{v}) =$

Általános vektor képe

Most vizsgáljuk meg, mi történik egy általános $\mathbf{v} = \lambda_1\mathbf{e}_1 + \lambda_2\mathbf{e}_2 + \cdots + \lambda_n\mathbf{e}_n$ vektorral ($\mathbf{v}$ koordinátája a standard bázisban $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n)$), ha alkalmazzuk rá az $\mathcal{A}$ lineáris leképezést:

$$\mathcal{A}(\mathbf{v}) = \mathcal{A}(\lambda_1\mathbf{e}_1+\lambda_2\mathbf{e}_2+\cdots+\lambda_n\mathbf{e}_n) =$$

Általános vektor képe

Most vizsgáljuk meg, mi történik egy általános $\mathbf{v} = \lambda_1 \mathbf{e}_1 + \lambda_2 \mathbf{e}_2 + \cdots + \lambda_n \mathbf{e}_n$ vektorral ($\mathbf{v}$ koordinátája a standard bázisban $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n)$), ha alkalmazzuk rá az $\mathcal{A}$ lineáris leképezést:

$$\mathcal{A}(\mathbf{v}) = \mathcal{A}(\lambda_1 \mathbf{e}_1 + \lambda_2 \mathbf{e}_2 + \cdots + \lambda_n \mathbf{e}_n) = \mathcal{A}(\lambda_1 \mathbf{e}_1) + \mathcal{A}(\lambda_2 \mathbf{e}_2) + \cdots + \mathcal{A}(\lambda_n \mathbf{e}_n) =$$

Általános vektor képe

Most vizsgáljuk meg, mi történik egy általános $\mathbf{v} = \lambda_1\mathbf{e}_1 + \lambda_2\mathbf{e}_2 + \cdots + \lambda_n\mathbf{e}_n$ vektorral ($\mathbf{v}$ koordinátája a standard bázisban $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n)$), ha alkalmazzuk rá az $\mathcal{A}$ lineáris leképezést:

$$\mathcal{A}(\mathbf{v}) = \mathcal{A}(\lambda_1\mathbf{e}_1+\lambda_2\mathbf{e}_2+\cdots+\lambda_n\mathbf{e}_n) = \mathcal{A}(\lambda_1\mathbf{e}_1)+\mathcal{A}(\lambda_2\mathbf{e}_2)+\cdots+\mathcal{A}(\lambda_n\mathbf{e}_n) =$$

$$= \lambda_1\mathcal{A}(\mathbf{e}_1) + \lambda_2\mathcal{A}(\mathbf{e}_2) + \cdots + \lambda_n\mathcal{A}(\mathbf{e}_n)$$

Ahol a második és a harmadik egyenlőség a lineráis leképezés definíciójában szereplő tulajdonságok miatt teljesül.

Általános vektor képe

Most vizsgáljuk meg, mi történik egy általános $\mathbf{v} = \lambda_1 \mathbf{e}_1 + \lambda_2 \mathbf{e}_2 + \cdots + \lambda_n \mathbf{e}_n$ vektorral ($\mathbf{v}$ koordinátája a standard bázisban $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n)$), ha alkalmazzuk rá az $\mathcal{A}$ lineáris leképezést:

$$\mathcal{A}(\mathbf{v}) = \mathcal{A}(\lambda_1 \mathbf{e}_1 + \lambda_2 \mathbf{e}_2 + \cdots + \lambda_n \mathbf{e}_n) = \mathcal{A}(\lambda_1 \mathbf{e}_1) + \mathcal{A}(\lambda_2 \mathbf{e}_2) + \cdots + \mathcal{A}(\lambda_n \mathbf{e}_n) =$$

$$= \lambda_1 \mathcal{A}(\mathbf{e}_1) + \lambda_2 \mathcal{A}(\mathbf{e}_2) + \cdots + \lambda_n \mathcal{A}(\mathbf{e}_n)$$

Ahol a második és a harmadik egyenlőség a lineráis leképezés definíciójában szereplő tulajdonságok miatt teljesül.
Így azt kaptuk, hogy egy **lineáris leképezésnél a bázisvektorok képe**($\mathcal{A}(\mathbf{e}_i)$) **meghatározza minden vektor képét**. Csak annyi a dolgunk, hogy a képként kapott vektoroknak kell vennünk ugyanazon λ_i-kel való lineáris kombinációját.

Lineáris kombináció mátrixos-szorzásos alakja

Legyen most adott egy $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2 \dots \mathbf{b}_n$ bázis (az egyszerűség kedvéért gondolhatunk nyugodtan a standard bázisra is), továbbá ebben a bázisban egy $\mathbf{v}$ vektor $(\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_n)$ koordinátákkal. Ekkor felírhatjuk az alábbi szorzatot:

$$\mathbf{v} =$$

Lineáris kombináció mátrixos-szorzásos alakja

Legyen most adott egy $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2 \dots \mathbf{b}_n$ bázis (az egyszerűség kedvéért gondolhatunk nyugodtan a standard bázisra is), továbbá ebben a bázisban egy $\mathbf{v}$ vektor $(\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_n)$ koordinátákkal. Ekkor felírhatjuk az alábbi szorzatot:

$$\mathbf{v} = \lambda_1 \mathbf{b}_1 + \lambda_2 \mathbf{b}_2 + \dots + \lambda_n \mathbf{b}_n =$$

Lineáris kombináció mátrixos-szorzásos alakja

Legyen most adott egy $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2 \dots \mathbf{b}_n$ bázis (az egyszerűség kedvéért gondolhatunk nyugodtan a standard bázisra is), továbbá ebben a bázisban egy $\mathbf{v}$ vektor $(\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_n)$ koordinátákkal. Ekkor felírhatjuk az alábbi szorzatot:

$$\mathbf{v} = \lambda_1 \mathbf{b}_1 + \lambda_2 \mathbf{b}_2 + \cdots + \lambda_n \mathbf{b}_n = \begin{bmatrix} \mathbf{b}_1 & \mathbf{b}_2 & \dots & \mathbf{b}_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{bmatrix} =$$

Lineáris kombináció mátrixos-szorzásos alakja

Legyen most adott egy $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2 \dots \mathbf{b}_n$ bázis (az egyszerűség kedvéért gondolhatunk nyugodtan a standard bázisra is), továbbá ebben a bázisban egy $\mathbf{v}$ vektor $(\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_n)$ koordinátákkal. Ekkor felírhatjuk az alábbi szorzatot:

$$\mathbf{v} = \lambda_1 \mathbf{b}_1 + \lambda_2 \mathbf{b}_2 + \cdots + \lambda_n \mathbf{b}_n = \begin{bmatrix} \mathbf{b}_1 & \mathbf{b}_2 & \dots & \mathbf{b}_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{bmatrix} = \underline{\underline{\mathbf{B}}} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{bmatrix}$$

Lineáris kombináció mátrixos-szorzásos alakja

Legyen most adott egy $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2 \dots \mathbf{b}_n$ bázis (az egyszerűség kedvéért gondolhatunk nyugodtan a standard bázisra is), továbbá ebben a bázisban egy $\mathbf{v}$ vektor $(\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_n)$ koordinátákkal. Ekkor felírhatjuk az alábbi szorzatot:

$$\mathbf{v} = \lambda_1\mathbf{b}_1 + \lambda_2\mathbf{b}_2 + \dots + \lambda_n\mathbf{b}_n = \begin{bmatrix} \mathbf{b}_1 & \mathbf{b}_2 & \dots & \mathbf{b}_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{bmatrix} = \underline{\underline{\mathbf{B}}} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{bmatrix}$$

Tehát ha a bázisvektorokat, mint oszlopvektorokat bepakoljuk egy $\underline{\underline{\mathbf{B}}}$ mátrixba, akkor a lineáris kombináció felfogható úgy, mint egy mátrix szorzás.

Lineáris leképezés mátrixos alakja

Az előző két dia alapján:

Lineáris leképezés mátrixos alakja

Az előző két dia alapján:

$\mathcal{A}(\mathbf{v}) = \dots = \lambda_1 \mathcal{A}(\mathbf{e}_1) + \lambda_2 \mathcal{A}(\mathbf{e}_2) + \dots + \lambda_n \mathcal{A}(\mathbf{e}_n) =$

Lineáris leképezés mátrixos alakja

Az előző két dia alapján:

$$\mathcal{A}(\mathbf{v}) = \cdots = \lambda_1 \mathcal{A}(\mathbf{e}_1) + \lambda_2 \mathcal{A}(\mathbf{e}_2) + \cdots + \lambda_n \mathcal{A}(\mathbf{e}_n) =$$

$$\begin{bmatrix} \mathcal{A}(\mathbf{e}_1) & \mathcal{A}(\mathbf{e}_2) & \ldots & \mathcal{A}(\mathbf{e}_n) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{bmatrix} = \underline{\underline{\mathbf{A}}} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{bmatrix} = \underline{\underline{\mathbf{A}}}\mathbf{v}$$

Ahol $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$ a bázisvektorok képéből összeállított mátrix. Az utolsó egyenlőséghez felhasználjuk, hogy a $\mathbf{v}$ vektor koordinátái a standard bázisban $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$. Tehát kimondhatjuk az alábbi tételt:

Lineáris leképezés mátrixos alakja

Az előző két dia alapján:

$$\mathcal{A}(\mathbf{v}) = \dots = \lambda_1 \mathcal{A}(\mathbf{e}_1) + \lambda_2 \mathcal{A}(\mathbf{e}_2) + \dots + \lambda_n \mathcal{A}(\mathbf{e}_n) =$$

$$\begin{bmatrix} \mathcal{A}(\mathbf{e}_1) & \mathcal{A}(\mathbf{e}_2) & \dots & \mathcal{A}(\mathbf{e}_n) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{bmatrix} = \underline{\underline{\mathbf{A}}} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{bmatrix} = \underline{\underline{\mathbf{A}}}\mathbf{v}$$

Ahol $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$ a bázisvektorok képéből összeállított mátrix. Az utolsó egyenlőséghez felhasználjuk, hogy a $\mathbf{v}$ vektor koordinátái a standard bázisban $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$. Tehát kimondhatjuk az alábbi tételt:

Tétel

Bármely $\mathcal{A} : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^m$ lineáris leképezéshez létezik egy és csak egy olyan $\underline{\underline{\mathbf{A}}} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ mátrix, hogy bármely $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$-re $\mathcal{A}(\mathbf{x}) = \underline{\underline{\mathbf{A}}}\mathbf{x}$.

Vagyis minden leképezés reprezentálható mint egy mátrix és minden mátrix felfogható egy lineáris leképezésként!

Lineáris leképezések kompozíciója

Tekintsük a $\mathcal{A}:\mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^m$ és $\mathcal{B}:\mathbb{R}^m \mapsto \mathbb{R}^k$ lineáris leképezések kompozícióját, azaz alkalmazzuk egy $\mathbf{v}$ vektorra előbb az $\mathcal{A}$, majd pedig a képre a $\mathcal{B}$ leképezést. Ekkor kapjuk a $\mathcal{B}\circ\mathcal{A}$ leképezést, ami szintén egy lineáris leképezés lesz, továbbá:

Lineáris leképezések kompozíciója

Tekintsük a $\mathcal{A} : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^m$ és $\mathcal{B} : \mathbb{R}^m \mapsto \mathbb{R}^k$ lineáris leképezések kompozícióját, azaz alkalmazzuk egy $\mathbf{v}$ vektorra előbb az $\mathcal{A}$, majd pedig a képre a $\mathcal{B}$ leképezést. Ekkor kapjuk a $\mathcal{B} \circ \mathcal{A}$ leképezést, ami szintén egy lineáris leképezés lesz, továbbá:

Tétel

Legyenek adott a $\mathcal{A} : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^m$ és $\mathcal{B} : \mathbb{R}^m \mapsto \mathbb{R}^k$ lineáris leképezések a hozzájuk tartozó $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$ és $\underline{\underline{\mathbf{B}}}$ mátrixokkal. Ekkor a $\mathcal{B} \circ \mathcal{A} : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^k$ lineáris leképezés reprezentálható a $\underline{\underline{\mathbf{BA}}}$ szorzat-mátrixszal, azaz $\mathcal{B} \circ \mathcal{A}(\mathbf{x}) = \underline{\underline{\mathbf{B}}}(\underline{\underline{\mathbf{A}}}(\mathbf{x})) = (\underline{\underline{\mathbf{BA}}})\mathbf{x}$.

Lineáris leképezések kompozíciója

Tekintsük a $\mathcal{A} : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^m$ és $\mathcal{B} : \mathbb{R}^m \mapsto \mathbb{R}^k$ lineáris leképezések kompozícióját, azaz alkalmazzuk egy $\mathbf{v}$ vektorra előbb az $\mathcal{A}$, majd pedig a képre a $\mathcal{B}$ leképezést. Ekkor kapjuk a $\mathcal{B} \circ \mathcal{A}$ leképezést, ami szintén egy lineáris leképezés lesz, továbbá:

Tétel

Legyenek adott a $\mathcal{A} : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^m$ és $\mathcal{B} : \mathbb{R}^m \mapsto \mathbb{R}^k$ lineáris leképezések a hozzájuk tartozó $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$ és $\underline{\underline{\mathbf{B}}}$ mátrixokkal. Ekkor a $\mathcal{B} \circ \mathcal{A} : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^k$ lineáris leképezés reprezentálható a $\underline{\underline{\mathbf{BA}}}$ szorzat-mátrixszal, azaz
$\mathcal{B} \circ \mathcal{A}(\mathbf{x}) = \underline{\underline{\mathbf{B}}}(\underline{\underline{\mathbf{A}}}(\mathbf{x})) = (\underline{\underline{\mathbf{BA}}})\mathbf{x}$.

Nyilván, ha egy $\mathbf{x}$ vektorra először alkalmazunk egy $\mathcal{A}$ leképezést, majd egy másik $\mathcal{B}$ leképezést a képére, akkor a szorzás sorrendjét úgy kell megállapítanunk, hogy a $\mathbf{x}$ vektor először az $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$ mátrixszal szorzódjon, majd a képet azaz az $(\underline{\underline{\mathbf{A}}}\mathbf{x})$-et kell szorozni (balról) a $\underline{\underline{\mathbf{B}}}$-vel.

Példák

1. Példa Írjuk fel a síkban az x-tengelyre vonatkozó tükrözés mátrixát.

Példák

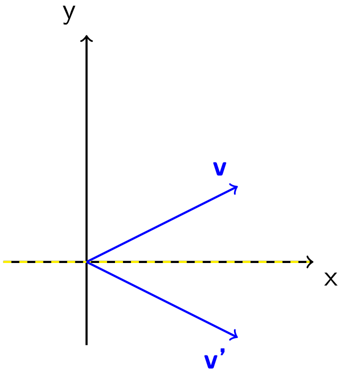
1. Példa Írjuk fel a síkban az x-tengelyre vonatkozó tükrözés mátrixát.

Mint minden hasonló feladatnál, csak a természetes bázis vektorainak kell megállapítanunk a képét és abból áll össze a mátrix.

Példák

1. Példa Írjuk fel a síkban az x-tengelyre vonatkozó tükrözés mátrixát.

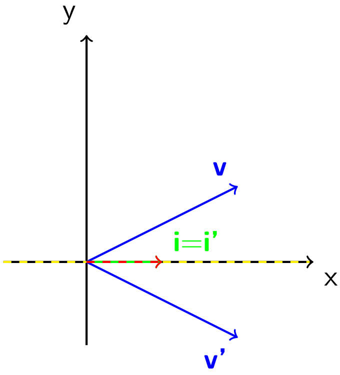
Mint minden hasonló feladatnál, csak a természetes bázis vektorainak kell megállapítanunk a képét és abból áll össze a mátrix.



Példák

1. Példa Írjuk fel a síkban az x-tengelyre vonatkozó tükrözés mátrixát.

Mint minden hasonló feladatnál, csak a természetes bázis vektorainak kell megállapítanunk a képét és abból áll össze a mátrix.

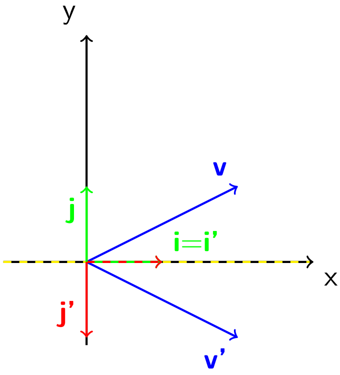


Az x irányú egységvektor marad az, ami volt, mert rajta van a tükrözés tengelyén.

Példák

1. Példa Írjuk fel a síkban az x-tengelyre vonatkozó tükrözés mátrixát.

Mint minden hasonló feladatnál, csak a természetes bázis vektorainak kell megállapítanunk a képét és abból áll össze a mátrix.

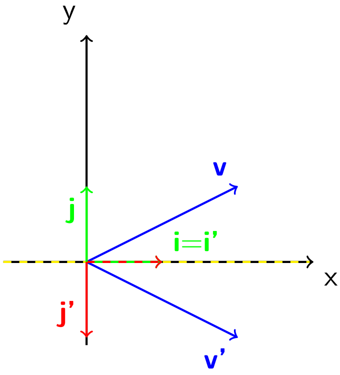


Az x irányú egységvektor marad az, ami volt, mert rajta van a tükrözés tengelyén.
Az y irányú egységvektor pedig pont az ellentetjére változik, mert merőleges a tükrözés tengelyére.

Példák

1. Példa Írjuk fel a síkban az x-tengelyre vonatkozó tükrözés mátrixát.

Mint minden hasonló feladatnál, csak a természetes bázis vektorainak kell megállapítanunk a képét és abból áll össze a mátrix.



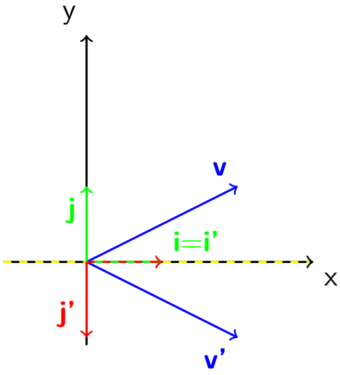
Az x irányú egységvektor marad az, ami volt, mert rajta van a tükrözés tengelyén.
Az y irányú egységvektor pedig pont az ellentetjére változik, mert merőleges a tükrözés tengelyére.

$$\mathcal{T}^x : \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Példák

1. Példa Írjuk fel a síkban az x-tengelyre vonatkozó tükrözés mátrixát.

Mint minden hasonló feladatnál, csak a természetes bázis vektorainak kell megállapítanunk a képét és abból áll össze a mátrix.



Az x irányú egységvektor marad az, ami volt, mert rajta van a tükrözés tengelyén.
Az y irányú egységvektor pedig pont az ellentetjére változik, mert merőleges a tükrözés tengelyére.

$$\mathcal{T}^x : \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Tehát az x-tengelyre vonatkozó tükrözés mátrixa: $\underline{\underline{T}}^x = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

Példák

2. Példa Írjuk fel a síkban az origó körüli α szögű forgatás mátrixát.

Példák

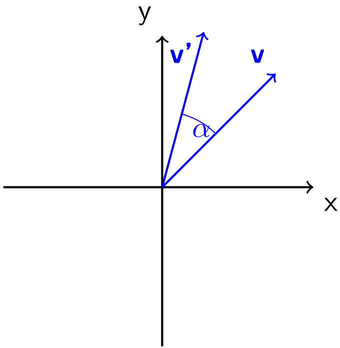
2. Példa Írjuk fel a síkban az origó körüli α szögű forgatás mátrixát.

Mint minden hasonló feladatnál, csak a természetes bázis vektorainak kell megállapítanunk a képét és abból áll össze a mátrix.

Példák

2. Példa Írjuk fel a síkban az origó körüli α szögű forgatás mátrixát.

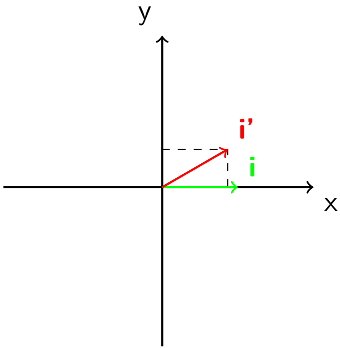
Mint minden hasonló feladatnál, csak a természetes bázis vektorainak kell megállapítanunk a képét és abból áll össze a mátrix.



Példák

2. Példa Írjuk fel a síkban az origó körüli α szögű forgatás mátrixát.

Mint minden hasonló feladatnál, csak a természetes bázis vektorainak kell megállapítanunk a képét és abból áll össze a mátrix.

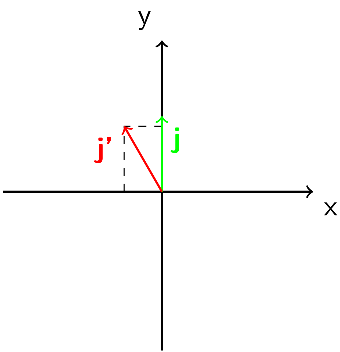


Az x irányú egységvektor első koordinátája a trigonometrikus függvények általános definíciója szerint pont $\cos(\alpha)$ lesz, míg a második koordinátája $\sin(\alpha)$.

Példák

2. Példa Írjuk fel a síkban az origó körüli α szögű forgatás mátrixát.

Mint minden hasonló feladatnál, csak a természetes bázis vektorainak kell megállapítanunk a képét és abból áll össze a mátrix.

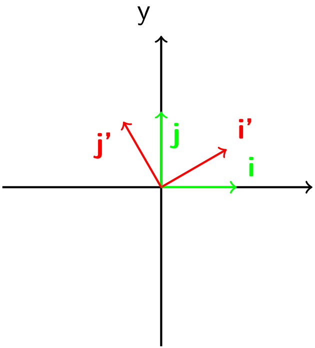


Az x irányú egységvektor első koordinátája a trigonometrikus függvények általános definíciója szerint pont $\cos(\alpha)$ lesz, míg a második koordinátája $\sin(\alpha)$. Az y irányú egységvektor első koordinátája $-\sin(\alpha)$, második koordinátája pedig $\cos(\alpha)$ lesz.

Példák

2. Példa Írjuk fel a síkban az origó körüli α szögű forgatás mátrixát.

Mint minden hasonló feladatnál, csak a természetes bázis vektorainak kell megállapítanunk a képét és abból áll össze a mátrix.



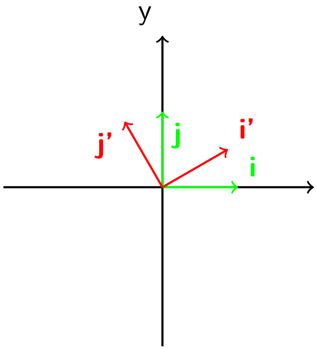
Az x irányú egységvektor első koordinátája a trigonometrikus függvények általános definíciója szerint pont $\cos(\alpha)$ lesz, míg a második koordinátája $\sin(\alpha)$. Az y irányú egységvektor első koordinátája $-\sin(\alpha)$, második koordinátája pedig $\cos(\alpha)$ lesz.

$$\mathcal{F}^\alpha : \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -\sin\alpha \\ \cos\alpha \end{pmatrix}$$

Példák

2. Példa Írjuk fel a síkban az origó körüli α szögű forgatás mátrixát.

Mint minden hasonló feladatnál, csak a természetes bázis vektorainak kell megállapítanunk a képét és abból áll össze a mátrix.



Az x irányú egységvektor első koordinátája a trigonometrikus függvények általános definíciója szerint pont $\cos(\alpha)$ lesz, míg a második koordinátája $\sin(\alpha)$. Az y irányú egységvektor első koordinátája $-\sin(\alpha)$, második koordinátája pedig $\cos(\alpha)$ lesz.

$$\mathcal{F}^\alpha : \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -\sin\alpha \\ \cos\alpha \end{pmatrix}$$

$$\underline{\underline{F}}^\alpha = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$$

Példák

3. Példa Írjuk fel térben a z tengely körüli α szögű forgatás mátrixát és írjuk fel a $P(1,2,3)$ koordinátájú pont z tengely körüli 60°-os elforgatott képét.

Példák

3. Példa Írjuk fel térben a z tengely körüli α szögű forgatás mátrixát és írjuk fel a $P(1,2,3)$ koordinátájú pont z tengely körüli 60°-os elforgatott képét.

Az előző példát használjuk fel. Az x és y tengelyekkel párhuzamos egységvektor megmarad az xy koordinátasíkban, így a harmadik koordináta 0 lesz, az első kettő pedig pontosan úgy viselkedik, mint az előző példában(az előző dia rajzán képzeljük azt, hogy a z tengely irányából nézünk az ábrára). A z irányú egységvektor pontosan a forgatás tengelyére esik, így nem változik a képe.

$$\mathcal{F}_z^\alpha : \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -\sin\alpha \\ \cos\alpha \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Példák

$$\underline{\underline{F}}_z^{\alpha} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

A z tengely körüli 60°-os elforgatás mátrixát úgy kapjuk meg, hogy

Példák

$$\underline{\underline{F}}_z^{\alpha} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

A z tengely körüli 60°-os elforgatás mátrixát úgy kapjuk meg, hogy α helyére beírjuk a 60°-ot:

$$\underline{\underline{F}}_z^{60} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

A P pont képét pedig úgy kapjuk, hogy

Példák

$$\underline{\underline{F}}_z^{\alpha} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

A z tengely körüli 60°-os elforgatás mátrixát úgy kapjuk meg, hogy α helyére beírjuk a 60°-ot:

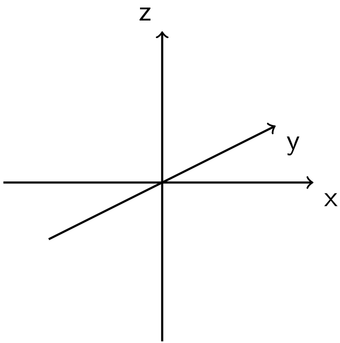
$$\underline{\underline{F}}_z^{60} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

A P pont képét pedig úgy kapjuk, hogy megszorozzuk a transzformáció mátrixát a pont koordinátáival:

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} - \sqrt{3} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} + 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

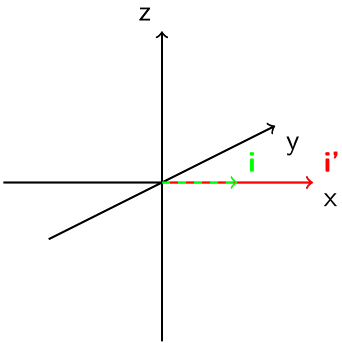
4. példa Adjuk meg térben az x tengelyű 2-szoros nyújtás mátrixát.

4. példa Adjuk meg térben az x tengelyű 2-szoros nyújtás mátrixát.



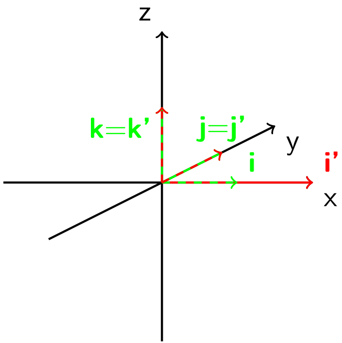
4. példa Adjuk meg térben az x tengelyű 2-szoros nyújtás mátrixát.

Az x irányú egységvektor a kétszeresére változik.



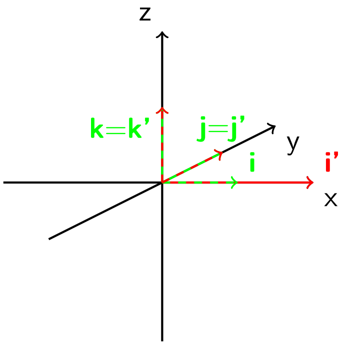
4. példa Adjuk meg térben az x tengelyű 2-szoros nyújtás mátrixát.

Az x irányú egységvektor a kétszeresére változik. Az y és z irányú egységvektorok pedig nem változnak.



4. példa Adjuk meg térben az x tengelyű 2-szoros nyújtás mátrixát.

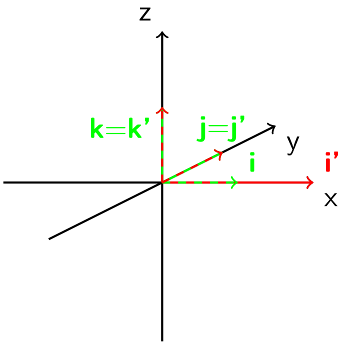
Az x irányú egységvektor a kétszeresére változik. Az y és z irányú egységvektorok pedig nem változnak.



$$\mathcal{N}_2^x : \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

4. példa Adjuk meg térben az x tengelyű 2-szoros nyújtás mátrixát.



Az x irányú egységvektor a kétszeresére változik. Az y és z irányú egységvektorok pedig nem változnak.

$$\mathcal{N}_2^x : \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Tehát az x-tengelyre vonatkozó tükrözés mátrixa: $\underline{\underline{N}}_2^x = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Példák

5. Példa Adjuk meg a z tengely körüli 60°-os forgatás utáni x-tengely irányű kétszeres nyújtás kompozíciójának mátrixát, majd adjuk meg a $P(1, 2, 3)$ koordinátájú pont transzformáció utáni képét.

Példák

5. Példa Adjuk meg a z tengely körüli 60°-os forgatás utáni x-tengely irányű kétszeres nyújtás kompozíciójának mátrixát, majd adjuk meg a $P(1,2,3)$ koordinátájú pont transzformáció utáni képét.

Előbb az $\mathcal{F}_z^{60}$ forgatást hajtjuk végre, majd az $\mathcal{N}_2^x$ nyűjtást, így a kompozíciójuk mátrixát az alábbi mátrixszorzással kaphatjuk meg:

Példák

5. Példa Adjuk meg a z tengely körüli 60°-os forgatás utáni x-tengely irányű kétszeres nyújtás kompozíciójának mátrixát, majd adjuk meg a $P(1,2,3)$ koordinátájú pont transzformáció utáni képét.

Előbb az $\mathcal{F}_z^{60}$ forgatást hajtjuk végre, majd az $\mathcal{N}_2^x$ nyűjtást, így a kompozíciójuk mátrixát az alábbi mátrixszorzással kaphatjuk meg:

$$\underline{\underline{N}}_2^x \cdot \underline{\underline{F}}_z^{60} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -\sqrt{3} & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

A P pont képét pedig úgy kapjuk meg, hogy

Példák

5. Példa Adjuk meg a z tengely körüli 60°-os forgatás utáni x-tengely irányű kétszeres nyújtás kompozíciójának mátrixát, majd adjuk meg a $P(1,2,3)$ koordinátájú pont transzformáció utáni képét.

Előbb az $\mathcal{F}_z^{60}$ forgatást hajtjuk végre, majd az $\mathcal{N}_2^x$ nyűjtást, így a kompozíciójuk mátrixát az alábbi mátrixszorzással kaphatjuk meg:

$$\underline{\underline{N}}_2^x \cdot \underline{\underline{F}}_z^{60} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -\sqrt{3} & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

A P pont képét pedig úgy kapjuk meg, hogy a transzformáció mátrixszát szorozzuk a pont koordinátáival:

$$\begin{bmatrix} 1 & -\sqrt{3} & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-2\sqrt{3} \\ \frac{\sqrt{3}}{2}+1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Sajátérték, sajátvektor

Tekintsünk egy transzformációt az $\mathbb{R}^n$-en.
Kérdések: Vannak-e esetleg olyan részei a térnek, ami egy transzormáció elvégzése után önmagába megy át, vagyis invariáns? És ha igen, akkor ez hogyan néz ki? Milyen változás megy végbe ezen a téren?

Sajátérték, sajátvektor

Tekintsünk egy transzformációt az $\mathbb{R}^n$-en.
Kérdések: Vannak-e esetleg olyan részei a térnek, ami egy transzormáció elvégzése után önmagába megy át, vagyis invariáns? És ha igen, akkor ez hogyan néz ki? Milyen változás megy végbe ezen a téren?
Keressünk olyan vektorokat, amelyek a transzformáció során alig változnak, azaz legfeljebb csak a hosszukat változtatják, az irányuk megmarad.

Sajátérték, sajátvektor

Tekintsünk egy transzformációt az $\mathbb{R}^n$-en.
Kérdések: Vannak-e esetleg olyan részei a térnek, ami egy transzormáció elvégzése után önmagába megy át, vagyis invariáns? És ha igen, akkor ez hogyan néz ki? Milyen változás megy végbe ezen a téren?
Keressünk olyan vektorokat, amelyek a transzformáció során alig változnak, azaz legfeljebb csak a hosszukat változtatják, az irányuk megmarad.

Definíció

Az $\underline{\underline{\mathbf{A}}} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mátrix sajátvektora $\mathbf{v} \neq 0$ és λ a $\mathbf{v}$-hez tartozó sajátérték, ha $\underline{\underline{\mathbf{A}}}\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$.

Azaz a $\mathbf{v}$ vektor a transzformáció során csak λ-szorosára változik. Nyilván a 0-vektorra minden $\lambda \in \mathbb{R}$-re sajátérték lenne, éppen ezért **kizárjuk a nullvektort a sajátvektorok közül**.

Karakterisztikus egyenlet

Mind az $\underline{\underline{\mathbf{A}}}\mathbf{v}$, mind a $\lambda\mathbf{v}$ egy vektor, így a különbségük a nullvektor.

$$\underline{\underline{\mathbf{A}}}\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$$

$$\Updownarrow$$

$$\underline{\underline{\mathbf{A}}}\mathbf{v} - \lambda\mathbf{v} = \mathbf{0}$$

Karakterisztikus egyenlet

Mind az $\underline{\underline{\mathbf{A}}}\mathbf{v}$, mind a $\lambda\mathbf{v}$ egy vektor, így a különbségük a nullvektor.
Becsempészünk az egyenletbe egy egységmátrixot.

$$\underline{\underline{\mathbf{A}}}\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$$

$$\Updownarrow$$

$$\underline{\underline{\mathbf{A}}}\mathbf{v} - \lambda\mathbf{v} = \mathbf{0}$$

$$\Updownarrow$$

$$\underline{\underline{\mathbf{A}}}\mathbf{v} - \lambda\underline{\underline{\mathbf{E}}}_n\mathbf{v} = \mathbf{0}$$

Karakterisztikus egyenlet

Mind az $\underline{\underline{\mathbf{A}}}\mathbf{v}$, mind a $\lambda\mathbf{v}$ egy vektor, így a különbségük a nullvektor.
Becsempészünk az egyenletbe egy egységmátrixot.
Kiemeljük jobbra a **v**-t. Így a zárójeles kifejezés egy mátrix, a **v** pedig egy ismeretlen vektor, tehát ez felfogható úgy, mint egy homogén lineáris egyenletrendszer. Mivel a $\mathbf{v} = 0$ megoldást kizártuk, ezért a célunk egy nemtriviális megoldás keresése.

$$\underline{\underline{\mathbf{A}}}\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$$

$$\Updownarrow$$

$$\underline{\underline{\mathbf{A}}}\mathbf{v} - \lambda\mathbf{v} = \mathbf{0}$$

$$\Updownarrow$$

$$\underline{\underline{\mathbf{A}}}\mathbf{v} - \lambda\underline{\underline{\mathbf{E}}}_n\mathbf{v} = \mathbf{0}$$

$$\Updownarrow$$

$$(\underline{\underline{\mathbf{A}}} - \lambda\underline{\underline{\mathbf{E}}}_n)\mathbf{v} = \mathbf{0}$$

Karakterisztikus egyenlet

Mind az $\underline{\underline{\mathbf{A}}}\mathbf{v}$, mind a $\lambda\mathbf{v}$ egy vektor, így a különbségük a nullvektor.
Becsempészünk az egyenletbe egy egységmátrixot.
Kiemeljük jobbra a $\mathbf{v}$-t. Így a zárójeles kifejezés egy mátrix, a $\mathbf{v}$ pedig egy ismeretlen vektor, tehát ez felfogható úgy, mint egy homogén lineáris egyenletrendszer. Mivel a $\mathbf{v} = 0$ megoldást kizártuk, ezért a célunk egy nemtriviális megoldás keresése.
Nemtriviális megoldást pedig akkor találunk, ha az együttható mátrix determinánsa 0.

$$\underline{\underline{\mathbf{A}}}\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$$

$$\Updownarrow$$

$$\underline{\underline{\mathbf{A}}}\mathbf{v} - \lambda\mathbf{v} = \mathbf{0}$$

$$\Updownarrow$$

$$\underline{\underline{\mathbf{A}}}\mathbf{v} - \lambda\underline{\underline{\mathbf{E}}}_n\mathbf{v} = \mathbf{0}$$

$$\Updownarrow$$

$$(\underline{\underline{\mathbf{A}}} - \lambda\underline{\underline{\mathbf{E}}}_n)\mathbf{v} = \mathbf{0}$$

Karakterisztikus egyenlet

Mind az $\underline{\underline{\mathbf{A}}}\mathbf{v}$, mind a $\lambda\mathbf{v}$ egy vektor, így a különbségük a nullvektor.
Becsempészünk az egyenletbe egy egységmátrixot.
Kiemeljük jobbra a **v**-t. Így a zárójeles kifejezés egy mátrix, a **v** pedig egy ismeretlen vektor, tehát ez felfogható úgy, mint egy homogén lineáris egyenletrendszer. Mivel a $\mathbf{v} = 0$ megoldást kizártuk, ezért a célunk egy nemtriviális megoldás keresése. Nemtriviális megoldást pedig akkor találunk, ha az együttható mátrix determinánsa 0.

$$\underline{\underline{\mathbf{A}}}\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$$
$$\Updownarrow$$
$$\underline{\underline{\mathbf{A}}}\mathbf{v} - \lambda\mathbf{v} = \mathbf{0}$$
$$\Updownarrow$$
$$\underline{\underline{\mathbf{A}}}\mathbf{v} - \lambda\underline{\underline{\mathbf{E}}}_n\mathbf{v} = \mathbf{0}$$
$$\Updownarrow$$
$$(\underline{\underline{\mathbf{A}}} - \lambda\underline{\underline{\mathbf{E}}}_n)\mathbf{v} = \mathbf{0}$$

Definíció

Az $\underline{\underline{\mathbf{A}}} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *mátrix karakterisztikus egyenlete:* $\det\left(\underline{\underline{\mathbf{A}}} - \lambda\underline{\underline{\mathbf{E}}}_n\right) = 0$

Karakterisztikus egyenlet

Hogyan is néz ki a karakterisztikus egyenlet?

Karakterisztikus egyenlet

Hogyan is néz ki a karakterisztikus egyenlet?

$$det(\underline{\underline{\mathbf{A}}} - \lambda \underline{\underline{\mathbf{E}}}_n) = det\left(\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} \right) =$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix}$$

Karakterisztikus egyenlet

Hogyan is néz ki a karakterisztikus egyenlet?

$$det(\underline{\underline{\mathbf{A}}} - \lambda \underline{\underline{\mathbf{E}}}_n) = det\left(\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}\right) =$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix}$$

Ennek a determinánsnak a kiszámításánál az egyik szorzat a főátló elemeiből áll (egy az n! db szorzat közül), amelynek minden tényezőjében van λ, így az eredmény λ-nak egy n-edfokú polinomja lesz ($p_n(\lambda)$), aminek a gyökei lesznek a sajátértékek.

Példa

1. Példa Keressük meg az alábbi $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$ mátrix sajátértékeit és sajátvektorait:

$$\underline{\underline{\mathbf{A}}} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Példa

1. Példa Keressük meg az alábbi $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$ mátrix sajátértékeit és sajátvektorait:

$$\underline{\underline{\mathbf{A}}} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\det\left(\underline{\underline{\mathbf{A}}} - \lambda \underline{\underline{\mathbf{E}}}_3\right) = \left| \begin{matrix} 1-\lambda & -1 & 1 \\ 1 & 1-\lambda & -1 \\ 2 & -1 & 0-\lambda \end{matrix} \right| \begin{matrix} 1-\lambda & -1 \\ 1 & 1-\lambda \\ 2 & -1 \end{matrix} =$$

Példa

1. Példa Keressük meg az alábbi $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$ mátrix sajátértékeit és sajátvektorait:

$$\underline{\underline{\mathbf{A}}} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\det\left(\underline{\underline{\mathbf{A}}} - \lambda \underline{\underline{\mathbf{E}}}_3\right) = \left| \begin{matrix} 1-\lambda & -1 & 1 \\ 1 & 1-\lambda & -1 \\ 2 & -1 & 0-\lambda \end{matrix} \right| \begin{matrix} 1-\lambda & -1 \\ 1 & 1-\lambda \\ 2 & -1 \end{matrix} =$$

$$= (1-\lambda)^2(-\lambda)+2-1-(2(1-\lambda)+(1-\lambda)+\lambda) =$$

Példa

1. Példa Keressük meg az alábbi $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$ mátrix sajátértékeit és sajátvektorait:

$$\underline{\underline{\mathbf{A}}} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\det\left(\underline{\underline{\mathbf{A}}} - \lambda \underline{\underline{\mathbf{E}}}_3\right) = \left| \begin{array}{ccc} 1-\lambda & -1 & 1 \\ 1 & 1-\lambda & -1 \\ 2 & -1 & 0-\lambda \end{array} \right| \begin{array}{cc} 1-\lambda & -1 \\ 1 & 1-\lambda \\ 2 & -1 \end{array} =$$

$$= (1-\lambda)^2(-\lambda)+2-1-(2(1-\lambda)+(1-\lambda)+\lambda) = -\lambda^3+2\lambda^2-\lambda+1-(3-2\lambda) =$$

Példa

1. Példa Keressük meg az alábbi $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$ mátrix sajátértékeit és sajátvektorait:

$$\underline{\underline{\mathbf{A}}} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\det\left(\underline{\underline{\mathbf{A}}} - \lambda \underline{\underline{\mathbf{E}}}_3\right) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 & 1 \\ 1 & 1-\lambda & -1 \\ 2 & -1 & 0-\lambda \end{vmatrix} \begin{matrix} 1-\lambda & -1 \\ 1 & 1-\lambda \\ 2 & -1 \end{matrix} =$$

$$= (1-\lambda)^2(-\lambda)+2-1-(2(1-\lambda)+(1-\lambda)+\lambda) = -\lambda^3+2\lambda^2-\lambda+1-(3-2\lambda) =$$

$$= -\lambda^3 + 2\lambda^2 + \lambda - 2 = 0 \ \leftarrow \ \text{Karakterisztikus egyenlet}$$

Példa

Múlt félévben tanultuk, hogy egy harmad, vagy annál magasabb fokú polinom lehetséges egész gyökeinek (a feladott feladatok ilyenek lesznek) megkeresésekor a konstans tag osztóival kell próbálkoznunk. Azaz a $-\lambda^3 + 2\lambda^2 + \lambda - 2 = 0$ egyenlet esetében ezek

Példa

Múlt félévben tanultuk, hogy egy harmad, vagy annál magasabb fokú polinom lehetséges egész gyökeinek (a feladott feladatok ilyenek lesznek) megkeresésekor a konstans tag osztóival kell próbálkoznunk. Azaz a $-\lambda^3 + 2\lambda^2 + \lambda - 2 = 0$ egyenlet esetében ezek a $\pm 1, \pm 2$. Például jó lesz

Példa

Múlt félévben tanultuk, hogy egy harmad, vagy annál magasabb fokú polinom lehetséges egész gyökeinek (a feladott feladatok ilyenek lesznek) megkeresésekor a konstans tag osztóival kell próbálkoznunk. Azaz a $-\lambda^3 + 2\lambda^2 + \lambda - 2 = 0$ egyenlet esetében ezek a $\pm 1, \pm 2$. Például jó leszaz 1 ($\lambda_1 = 1$ lesz az egyik sajátérték) és kiemelve a gyököt:

$$-\lambda^3 + 2\lambda^2 + \lambda - 2 =$$

Példa

Múlt félévben tanultuk, hogy egy harmad, vagy annál magasabb fokú polinom lehetséges egész gyökeinek (a feladott feladatok ilyenek lesznek) megkeresésekor a konstans tag osztóival kell próbálkoznunk. Azaz a $-\lambda^3 + 2\lambda^2 + \lambda - 2 = 0$ egyenlet esetében ezek a $\pm 1, \pm 2$. Például jó leszaz 1 ($\lambda_1 = 1$ lesz az egyik sajátérték) és kiemelve a gyököt:

$$-\lambda^3 + 2\lambda^2 + \lambda - 2 = (\lambda - 1)(-\lambda^2 + \lambda + 2) = 0$$

A maradék másodfokúnak már a megoldó képlet segítségével megkaphatjuk a gyökeit:

Példa

Múlt félévben tanultuk, hogy egy harmad, vagy annál magasabb fokú polinom lehetséges egész gyökeinek (a feladott feladatok ilyenek lesznek) megkeresésekor a konstans tag osztóival kell próbálkoznunk. Azaz a $-\lambda^3 + 2\lambda^2 + \lambda - 2 = 0$ egyenlet esetében ezek a $\pm 1, \pm 2$. Például jó leszaz 1 ($\lambda_1 = 1$ lesz az egyik sajátérték) és kiemelve a gyököt:

$$-\lambda^3 + 2\lambda^2 + \lambda - 2 = (\lambda - 1)(-\lambda^2 + \lambda + 2) = 0$$

A maradék másodfokúnak már a megoldó képlet segítségével megkaphatjuk a gyökeit:

$$\lambda_{23} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4 \cdot 2 \cdot (-1)}}{-2} = \frac{-1 \pm \sqrt{9}}{-2} = \frac{-1 \pm 3}{-2} \Rightarrow \lambda_2 = -1, \lambda_3 = 2$$

Példa

Múlt félévben tanultuk, hogy egy harmad, vagy annál magasabb fokú polinom lehetséges egész gyökeinek (a feladott feladatok ilyenek lesznek) megkeresésekor a konstans tag osztóival kell próbálkoznunk. Azaz a $-\lambda^3 + 2\lambda^2 + \lambda - 2 = 0$ egyenlet esetében ezek a $\pm 1, \pm 2$. Például jó leszaz 1 ($\lambda_1 = 1$ lesz az egyik sajátérték) és kiemelve a gyököt:

$$-\lambda^3 + 2\lambda^2 + \lambda - 2 = (\lambda - 1)(-\lambda^2 + \lambda + 2) = 0$$

A maradék másodfokúnak már a megoldó képlet segítségével megkaphatjuk a gyökeit:

$$\lambda_{23} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4 \cdot 2 \cdot (-1)}}{-2} = \frac{-1 \pm \sqrt{9}}{-2} = \frac{-1 \pm 3}{-2} \Rightarrow \lambda_2 = -1, \lambda_3 = 2$$

Tehát az $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$ mátrix sajátértékei a -1, az 1 és a 2!

Sajátvektorok

Ha már megvan egy mátrix sajátértéke, akkor hogyan határozzuk meg a hozzájuk tartozó sajátvektorokat?

Sajátvektorok

Ha már megvan egy mátrix sajátértéke, akkor hogyan határozzuk meg a hozzájuk tartozó sajátvektorokat? Mit is tudunk akkor, ha például λ az $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$ sajátértéke? Azt, hogy a $\underline{\underline{\mathbf{A}}} - \lambda \underline{\underline{\mathbf{E}}}_n$ mátrix determinánsa 0 és így a $(\underline{\underline{\mathbf{A}}} - \lambda \underline{\underline{\mathbf{E}}}_n)\mathbf{v} = \mathbf{0}$ homogén lineáris egyenletrendszernek

Sajátvektorok

Ha már megvan egy mátrix sajátértéke, akkor hogyan határozzuk meg a hozzájuk tartozó sajátvektorokat? Mit is tudunk akkor, ha például λ az $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$ sajátértéke? Azt, hogy a $\underline{\underline{\mathbf{A}}} - \lambda \underline{\underline{\mathbf{E}}}_n$ mátrix determinánsa 0 és így a $(\underline{\underline{\mathbf{A}}} - \lambda \underline{\underline{\mathbf{E}}}_n)\mathbf{v} = \mathbf{0}$ homogén lineáris egyenletrendszernek van nemtriviális megoldása. Tehát minden sajátértékhez meg kell oldanunk egy homogén lineáris egyenletrendszert, aminek tudjuk, hogy végtelen sok megoldása lesz (mivel az együtthatómátrix determinánsa 0, ezért van nemtriviális megoldás is és akkor már végtelen sok van).

Sajátvektorok

Ha már megvan egy mátrix sajátértéke, akkor hogyan határozzuk meg a hozzájuk tartozó sajátvektorokat? Mit is tudunk akkor, ha például λ az $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$ sajátértéke? Azt, hogy a $\underline{\underline{\mathbf{A}}} - \lambda \underline{\underline{\mathbf{E}}}_n$ mátrix determinánsa 0 és így a $(\underline{\underline{\mathbf{A}}} - \lambda \underline{\underline{\mathbf{E}}}_n)\mathbf{v} = \mathbf{0}$ homogén lineáris egyenletrendszernek van nemtriviális megoldása. Tehát minden sajátértékhez meg kell oldanunk egy homogén lineáris egyenletrendszert, aminek tudjuk, hogy végtelen sok megoldása lesz (mivel az együtthatómátrix determinánsa 0, ezért van nemtriviális megoldás is és akkor már végtelen sok van).
Azt is érdemes végiggondolni, hogy ha $\mathbf{v}$ egy λ-hoz tartozó sajátvektor, akkor tetszőleges $t\mathbf{v}$ $(t \neq 0)$ vektor is sajátvektor lesz:

$$\underline{\underline{\mathbf{A}}}(t\mathbf{v}) = t(\underline{\underline{\mathbf{A}}}\mathbf{v}) = t(\lambda\mathbf{v}) = \lambda(t\mathbf{v})$$

Így akármelyik sajátvektort találjuk is meg, vennünk kell a t-szeresét $(t \in \mathbb{R} \setminus \{0\})$, hogy az összes sajátvektort felírhassuk.

Példa

1. Példa(folytatás) Keressük meg az $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$ mátrix sajátvektorait!

Példa

1. Példa(folytatás) Keressük meg az $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$ mátrix sajátvektorait!

1. $\lambda_1 = 1$ Vonjuk ki $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$-ból az egységmátrix $\lambda_1(=1)$-szeresét:

Példa

1. Példa(folytatás) Keressük meg az $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$ mátrix sajátvektorait!

1. $\lambda_1 = 1$ Vonjuk ki $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$-ból az egységmátrix $\lambda_1 (= 1)$-szeresét:

$$(\underline{\underline{\mathbf{A}}} - \lambda_1 \underline{\underline{\mathbf{E}}}_3) = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix} - 1 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

Példa

1. Példa(folytatás) Keressük meg az $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$ mátrix sajátvektorait!

   1. $\lambda_1 = 1$ Vonjuk ki $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$-ból az egységmátrix $\lambda_1 (= 1)$-szeresét:

$$(\underline{\underline{\mathbf{A}}} - \lambda_1 \underline{\underline{\mathbf{E}}}_3) = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix} - 1 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

Keressük meg a nemtriviális megoldásokat:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & -1 & 0 \end{array}\right]$$

Példa

1. Példa(folytatás) Keressük meg az $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$ mátrix sajátvektorait!

1. $\lambda_1 = 1$ Vonjuk ki $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$-ból az egységmátrix $\lambda_1 (= 1)$-szeresét:

$$(\underline{\underline{\mathbf{A}}} - \lambda_1 \underline{\underline{\mathbf{E}}}_3) = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix} - 1 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

Keressük meg a nemtriviális megoldásokat:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & -1 & 0 \end{array}\right] \overset{s_1 \leftrightarrow s_2}{\sim}$$

Példa

1. Példa(folytatás) Keressük meg az $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$ mátrix sajátvektorait!

1. $\lambda_1 = 1$ Vonjuk ki $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$-ból az egységmátrix $\lambda_1 (= 1)$-szeresét:

$$(\underline{\underline{\mathbf{A}}} - \lambda_1 \underline{\underline{\mathbf{E}}}_3) = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix} - 1 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

Keressük meg a nemtriviális megoldásokat:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & -1 & 0 \end{array}\right] \overset{s_1 \leftrightarrow s_2}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -1 & 0 \end{array}\right]$$

Példa

1. Példa(folytatás) Keressük meg az $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$ mátrix sajátvektorait!

1. $\lambda_1 = 1$ Vonjuk ki $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$-ból az egységmátrix $\lambda_1(=1)$-szeresét:

$$(\underline{\underline{\mathbf{A}}} - \lambda_1 \underline{\underline{\mathbf{E}}}_3) = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix} - 1 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

Keressük meg a nemtriviális megoldásokat:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & -1 & 0 \end{array}\right] \overset{s_1 \leftrightarrow s_2}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -1 & 0 \end{array}\right] \overset{s_3 - 2s_1}{\sim}$$

Példa

1. Példa(folytatás) Keressük meg az $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$ mátrix sajátvektorait!

   1. $\lambda_1 = 1$ Vonjuk ki $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$-ból az egységmátrix $\lambda_1(=1)$-szeresét:

$$(\underline{\underline{\mathbf{A}}} - \lambda_1 \underline{\underline{\mathbf{E}}}_3) = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix} - 1 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

Keressük meg a nemtriviális megoldásokat:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & -1 & 0 \end{array}\right] \overset{s_1 \leftrightarrow s_2}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -1 & 0 \end{array}\right] \overset{s_3 - 2s_1}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

Példa

1. Példa(folytatás) Keressük meg az $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$ mátrix sajátvektorait!

1. $\lambda_1 = 1$ Vonjuk ki $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$-ból az egységmátrix $\lambda_1 (= 1)$-szeresét:

$$(\underline{\underline{\mathbf{A}}} - \lambda_1 \underline{\underline{\mathbf{E}}}_3) = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix} - 1 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

Keressük meg a nemtriviális megoldásokat:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & -1 & 0 \end{array}\right] \overset{s_1 \leftrightarrow s_2}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -1 & 0 \end{array}\right] \overset{s_3 - 2s_1}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

Látszik, hogy az utolsó két sor ugyanaz (itt az összefüggés), így az egyik elhagyható és a következő egyenleteket kapjuk: $x - z = 0$ és $-y + z = 0$, amiből $x = z$ és $y = z$ és z szabad változó.

Példa

Most választunk a szabad változónknak egy tetszőleges értéke. Ezt úgy érdemes kitalálni, hogy a vektorunk "szép" legyen, pl $z := 1$.

Példa

Most választunk a szabad változónknak egy tetszőleges értéke. Ezt úgy érdemes kitalálni, hogy a vektorunk "szép" legyen, pl $z := 1$. Ekkor $\mathbf{s}_1$ sajátvektort úgy adhatjuk meg, hogy:

$$\mathbf{s}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot t_1, \text{ ahol } t_1 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

Példa

Most választunk a szabad változónknak egy tetszőleges értéke. Ezt úgy érdemes kitalálni, hogy a vektorunk "szép" legyen, pl $z := 1$. Ekkor $\mathbf{s}_1$ sajátvektort úgy adhatjuk meg, hogy:

$$\mathbf{s}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot t_1, \text{ ahol } t_1 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

Láthatjuk egyébként a kiindulási mátrixból is, hogy ha a három oszlopot összeadjuk (az (1,1,1) vektorral való szorzás ezt csinálja), akkor megkapjuk a nullvektort.

2. $\lambda_2 = -1$

Példa

Most választunk a szabad változónknak egy tetszőleges értéke. Ezt úgy érdemes kitalálni, hogy a vektorunk "szép" legyen, pl $z := 1$. Ekkor $\mathbf{s}_1$ sajátvektort úgy adhatjuk meg, hogy:

$$\mathbf{s}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot t_1, \text{ ahol } t_1 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

Láthatjuk egyébként a kiindulási mátrixból is, hogy ha a három oszlopot összeadjuk (az (1,1,1) vektorral való szorzás ezt csinálja), akkor megkapjuk a nullvektort.

2. $\lambda_2 = -1$ Vonjuk ki $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$-ból az egységmátrix $\lambda_2(= -1)$-szeresét:

Példa

Most választunk a szabad változónknak egy tetszőleges értéke. Ezt úgy érdemes kitalálni, hogy a vektorunk "szép" legyen, pl $z := 1$. Ekkor $\mathbf{s}_1$ sajátvektort úgy adhatjuk meg, hogy:

$$\mathbf{s}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot t_1, \text{ ahol } t_1 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

Láthatjuk egyébként a kiindulási mátrixból is, hogy ha a három oszlopot összeadjuk (az (1,1,1) vektorral való szorzás ezt csinálja), akkor megkapjuk a nullvektort.

2. $\lambda_2 = -1$ Vonjuk ki $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$-ból az egységmátrix $\lambda_2(= -1)$-szeresét:

$$(\underline{\underline{\mathbf{A}}} - \lambda_2 \underline{\underline{\mathbf{E}}}_3) = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix} + 1 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Példa

Itt már a kiindulási mátrixon látható, hogy az első és harmadik sora ugyanaz. Elhagyva az első sort:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Példa

Itt már a kiindulási mátrixon látható, hogy az első és harmadik sora ugyanaz. Elhagyva az első sort:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix} \overset{s_2-2s_1}{\sim}$$

Példa

Itt már a kiindulási mátrixon látható, hogy az első és harmadik sora ugyanaz. Elhagyva az első sort:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix} \overset{s_2-2s_1}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -5 & 3 \end{bmatrix}$$

Példa

Itt már a kiindulási mátrixon látható, hogy az első és harmadik sora ugyanaz. Elhagyva az első sort:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix} \overset{s_2-2s_1}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -5 & 3 \end{bmatrix} \overset{s_2/(-5)}{\sim}$$

Példa

Itt már a kiindulási mátrixon látható, hogy az első és harmadik sora ugyanaz. Elhagyva az első sort:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix} \overset{s_2-2s_1}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -5 & 3 \end{bmatrix} \overset{s_2/(-5)}{\sim}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -\frac{3}{5} \end{bmatrix}$$

Példa

Itt már a kiindulási mátrixon látható, hogy az első és harmadik sora ugyanaz. Elhagyva az első sort:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix} \underset{\sim}{s_2 - 2s_1} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -5 & 3 \end{bmatrix} \underset{\sim}{s_2/(-5)}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -\frac{3}{5} \end{bmatrix} \underset{\sim}{s_1 - 2s_2}$$

Példa

Itt már a kiindulási mátrixon látható, hogy az első és harmadik sora ugyanaz. Elhagyva az első sort:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix} \overset{s_2-2s_1}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -5 & 3 \end{bmatrix} \overset{s_2/(-5)}{\sim}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -\frac{3}{5} \end{bmatrix} \overset{s_1-2s_2}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{5} \\ 0 & 1 & -\frac{3}{5} \end{bmatrix},$$

Példa

Itt már a kiindulási mátrixon látható, hogy az első és harmadik sora ugyanaz. Elhagyva az első sort:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix} \underset{\sim}{s_2-2s_1} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -5 & 3 \end{bmatrix} \underset{\sim}{s_2/(-5)}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -\frac{3}{5} \end{bmatrix} \underset{\sim}{s_1-2s_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{5} \\ 0 & 1 & -\frac{3}{5} \end{bmatrix},$$ tehát azt kaptuk, hogy $x + \dfrac{1}{5}z = 0$ és $y - \dfrac{3}{5}z = 0$, azaz $x = -\dfrac{1}{5}z$ és $y = \dfrac{3}{5}z$ és z szabad változó.

Példa

Itt már a kiindulási mátrixon látható, hogy az első és harmadik sora ugyanaz. Elhagyva az első sort:

$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix} \overset{s_2-2s_1}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -5 & 3 \end{bmatrix} \overset{s_2/(-5)}{\sim}$
$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -\frac{3}{5} \end{bmatrix} \overset{s_1-2s_2}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{5} \\ 0 & 1 & -\frac{3}{5} \end{bmatrix}$, tehát azt kaptuk, hogy $x + \dfrac{1}{5}z = 0$ és $y - \dfrac{3}{5}z = 0$, azaz $x = -\dfrac{1}{5}z$ és $y = \dfrac{3}{5}z$ és z szabad változó.

Ahhoz, hogy szép legyen a sajátvektor, most válasszuk meg z értékét 5-nek, így

$$\mathbf{s}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix} \cdot t_2, \text{ ahol } t_2 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

Példa

3. $\lambda_3 = 2$ Vonjuk ki $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$-ból az egységmátrix $\lambda_3(= 2)$-szorosát:

Példa

3. $\lambda_3 = 2$ Vonjuk ki $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$-ból az egységmátrix $\lambda_3 (= 2)$-szorosát:

$$(\underline{\underline{\mathbf{A}}} - \lambda_3 \underline{\underline{\mathbf{E}}}_3) = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix} - 2 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & -2 \end{bmatrix}$$

Keressük meg a nemtriviális megoldásokat:

$$\begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & -2 \end{bmatrix}$$

Példa

3. $\lambda_3 = 2$ Vonjuk ki $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$-ból az egységmátrix $\lambda_3(= 2)$-szorosát:

$$(\underline{\underline{\mathbf{A}}} - \lambda_3 \underline{\underline{\mathbf{E}}}_3) = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix} - 2 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & -2 \end{bmatrix}$$

Keressük meg a nemtriviális megoldásokat:

$$\begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & -2 \end{bmatrix} \overset{s_1 \leftrightarrow s_2}{\sim}$$

Példa

3. $\lambda_3 = 2$ Vonjuk ki $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$-ból az egységmátrix $\lambda_3(= 2)$-szorosát:

$$(\underline{\underline{\mathbf{A}}} - \lambda_3 \underline{\underline{\mathbf{E}}}_3) = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix} - 2 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & -2 \end{bmatrix}$$

Keressük meg a nemtriviális megoldásokat:

$$\begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & -2 \end{bmatrix} \overset{s_1 \leftrightarrow s_2}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & -2 \end{bmatrix}$$

Példa

3. $\lambda_3 = 2$ Vonjuk ki $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$-ból az egységmátrix $\lambda_3(=2)$-szorosát:

$$(\underline{\underline{\mathbf{A}}} - \lambda_3 \underline{\underline{\mathbf{E}}}_3) = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix} - 2 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & -2 \end{bmatrix}$$

Keressük meg a nemtriviális megoldásokat:

$$\begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & -2 \end{bmatrix} \overset{s_1 \leftrightarrow s_2}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & -2 \end{bmatrix} \overset{s_2 + s_1, s_3 - 2s_1}{\sim}$$

Példa

3. $\lambda_3 = 2$ Vonjuk ki $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$-ból az egységmátrix $\lambda_3 (= 2)$-szorosát:

$$(\underline{\underline{\mathbf{A}}} - \lambda_3 \underline{\underline{\mathbf{E}}}_3) = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix} - 2 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & -2 \end{bmatrix}$$

Keressük meg a nemtriviális megoldásokat:

$$\begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & -2 \end{bmatrix} \overset{s_1 \leftrightarrow s_2}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & -2 \end{bmatrix} \overset{s_2 + s_1, s_3 - 2s_1}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Példa

3. $\lambda_3 = 2$ Vonjuk ki $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$-ból az egységmátrix $\lambda_3(=2)$-szorosát:

$$(\underline{\underline{\mathbf{A}}} - \lambda_3 \underline{\underline{\mathbf{E}}}_3) = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix} - 2 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & -2 \end{bmatrix}$$

Keressük meg a nemtriviális megoldásokat:

$$\begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & -2 \end{bmatrix} \overset{s_1 \leftrightarrow s_2}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & -2 \end{bmatrix} \overset{s_2+s_1, s_3-2s_1}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Látható, hogy az utolsó két sor egymás számszorosa és mindkettőből $y = 0$ következik. Az első egyenlet így $x - z = 0$, azaz $x = z$ és z szabad változó. A $z = 1$ választással:

$$\mathbf{s}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot t_3, \text{ ahol } t_3 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

Hasznos tételek (bizonyítás nélkül)

Tétel

Ha az $\underline{\underline{\mathbf{A}}} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *mátrix szimmetrikus, akkor valósak a sajátértékei.*

A karakterisztikus egyenlet a valósak között csak elsőfokúak és negatív diszkriminánsú másodfokúak szorzatára bomlik. A tétel azt állítja, hogy ha a mátrix szimmetrikus, akkor a karakterisztikus polinomnak nincsen másodfokú a szorzat alakjában, és n db (nem feltétlen különböző) valós gyöke lesz.

Hasznos tételek (bizonyítás nélkül)

Tétel

Ha az $\underline{\underline{\mathbf{A}}} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ *mátrix szimmetrikus, akkor valósak a sajátértékei.*

A karakterisztikus egyenlet a valósak között csak elsőfokúak és negatív diszkriminánsú másodfokúak szorzatára bomlik. A tétel azt állítja, hogy ha a mátrix szimmetrikus, akkor a karakterisztikus polinomnak nincsen másodfokú a szorzat alakjában, és n db (nem feltétlen különböző) valós gyöke lesz.

Tétel

Ha az $\underline{\underline{\mathbf{A}}} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ *mátrix szimmetrikus, akkor van n darab páronként merőleges sajátvektora.*

Ezeknek komoly jelentősége van, mert így kapunk egy, a természetes bázishoz hasonló, csak sajátvektorokból álló ún. sajátbázist, ami felfogható úgy, mint a szokásos Descartes koordináta-rendszerünk egy "mozgatása".