Mátrixok

Matematika A2x

2020 ősz

Motiváció

1. példa Megkapható-e az $(3,6,8)$ vektor az $(1,-1,2)$, $(1,2,3)$ és $(5,4,12)$ vektorok valamilyen lineáris kombinációjaként $\mathbb{R}^3$-ban?

Motiváció

1. példa Megkapható-e az $(3,6,8)$ vektor az $(1,-1,2)$, $(1,2,3)$ és $(5,4,12)$ vektorok valamilyen lineáris kombinációjaként $\mathbb{R}^3$-ban?
A kérdés eldöntéséhez meg kell vizsgálnunk az alábbi lineáris kombinációt:
$(1,-1,2)x+(1,2,3)y+(5,4,12)z=(3,6,8)$

Motiváció

1. példa Megkapható-e az $(3,6,8)$ vektor az $(1,-1,2)$, $(1,2,3)$ és $(5,4,12)$ vektorok valamilyen lineáris kombinációjaként $\mathbb{R}^3$-ban?
A kérdés eldöntéséhez meg kell vizsgálnunk az alábbi lineáris kombinációt: $(1,-1,2)x + (1,2,3)y + (5,4,12)z = (3,6,8)$ vekotregyenletből koordinátánként kapunk egy-egy egyenletet:

$$\begin{aligned} x + y + 5z &= 3 \\ -x + 2y + 4z &= 6 \\ 2x + 3y + 12z &= 8 \end{aligned}$$

Motiváció

1. példa Megkapható-e az $(3,6,8)$ vektor az $(1,-1,2)$, $(1,2,3)$ és $(5,4,12)$ vektorok valamilyen lineáris kombinációjaként $\mathbb{R}^3$-ban?
A kérdés eldöntéséhez meg kell vizsgálnunk az alábbi lineáris kombinációt: $(1,-1,2)x+(1,2,3)y+(5,4,12)z=(3,6,8)$ vekotregyenletből koordinátánként kapunk egy-egy egyenletet:

$$\begin{array}{rcl} x+y+5z & = & 3 \\ -x+2y+4z & = & 6 \\ 2x+3y+12z & = & 8 \end{array}$$

Készítsünk az x, y és z együtthatóiból egy táblázatot:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 5 & 3 \\ -1 & 2 & 4 & 6 \\ 2 & 3 & 12 & 8 \end{array}\right]$$

A vonal előtti részt az egyenletrendszer együttható mátrixának nevezzük, a vonal utáni részt pedig eredmény vektornak.

Motiváció

1. példa Megkapható-e az $(3,6,8)$ vektor az $(1,-1,2)$, $(1,2,3)$ és $(5,4,12)$ vektorok valamilyen lineáris kombinációjaként $\mathbb{R}^3$-ban?
A kérdés eldöntéséhez meg kell vizsgálnunk az alábbi lineáris kombinációt: $(1,-1,2)x+(1,2,3)y+(5,4,12)z=(3,6,8)$ vekotregyenletből koordinátánként kapunk egy-egy egyenletet:

$$\begin{array}{rcl} x+y+5z & = & 3 \\ -x+2y+4z & = & 6 \\ 2x+3y+12z & = & 8 \end{array}$$

Készítsünk az x, y és z együtthatóiból egy táblázatot:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 5 & 3 \\ -1 & 2 & 4 & 6 \\ 2 & 3 & 12 & 8 \end{array}\right]$$

A vonal előtti részt az egyenletrendszer együttható mátrixának nevezzük, a vonal utáni részt pedig eredmény vektornak. Megoldás később.

Mátrix bevezetése

Legyen A valós számokból készített táblázat, melynek n sora és m oszlopa van. Az így kapott objektumot $n \times m$-es mátrixnak nevezzük. Például

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \\ -2 & 3 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

egy 3×4-es mátrix.

Mátrix bevezetése

Legyen A valós számokból készített táblázat, melynek n sora és m oszlopa van. Az így kapott objektumot $n \times m$-es mátrixnak nevezzük. Például

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \\ -2 & 3 & 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{bmatrix}$$

egy 3×4-es mátrix.
Az összes $n \times m$ méretű (típusú) mátrixot $\mathbb{R}^{n \times m}$-el jelöljük. Az A mátrix i-edik sorának j-edik elemét (ahol $1 \leq i \leq n$ és $1 \leq j \leq m$) a_{ij}-vel jelöljük.

Mátrix bevezetése

Legyen A valós számokból készített táblázat, melynek n sora és m oszlopa van. Az így kapott objektumot $n \times m$-es mátrixnak nevezzük. Például

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \\ -2 & 3 & 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{bmatrix}$$

egy 3×4-es mátrix.

Az összes $n \times m$ méretű (típusú) mátrixot $\mathbb{R}^{n \times m}$-el jelöljük. Az A mátrix i-edik sorának j-edik elemét (ahol $1 \leq i \leq n$ és $1 \leq j \leq m$) a_{ij}-vel jelöljük. Ha $n = m$, akkor a mátrixot négyzetes mátrixnak nevezzük.

Mátrix bevezetése

Legyen A valós számokból készített táblázat, melynek n sora és m oszlopa van. Az így kapott objektumot $n \times m$-es mátrixnak nevezzük. Például

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \\ -2 & 3 & 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{bmatrix}$$

egy 3×4-es mátrix.
Az összes $n \times m$ méretű (típusú) mátrixot $\mathbb{R}^{n \times m}$-el jelöljük. Az A mátrix i-edik sorának j-edik elemét (ahol $1 \leq i \leq n$ és $1 \leq j \leq m$) a_{ij}-vel jelöljük.
Ha $n = m$, akkor a mátrixot négyzetes mátrixnak nevezzük.
Az A mátrix főátlója: $(a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{kk})$, ahol $k = \min(n, m)$ pl.: $(2, 2, 1)$

Mátrix bevezetése

Legyen A valós számokból készített táblázat, melynek n sora és m oszlopa van. Az így kapott objektumot $n \times m$-es mátrixnak nevezzük. Például

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \\ -2 & 3 & 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{bmatrix}$$

egy 3×4-es mátrix.
Az összes $n \times m$ méretű (típusú) mátrixot $\mathbb{R}^{n \times m}$-el jelöljük. Az A mátrix i-edik sorának j-edik elemét (ahol $1 \leq i \leq n$ és $1 \leq j \leq m$) a_{ij}-vel jelöljük.
Ha $n = m$, akkor a mátrixot négyzetes mátrixnak nevezzük.
Az A mátrix főátlója: $(a_{11}, a_{22}, \dots, a_{kk})$, ahol $k = \min(n, m)$ pl.: $(2, 2, 1)$
Az A mátrix mellékátlója: $(a_{1m}, a_{2,(m-1)}, \dots)$ pl.: $(1, -1, 3)$

Mátrix bevezetése

Legyen A valós számokból készített táblázat, melynek n sora és m oszlopa van. Az így kapott objektumot $n \times m$-es mátrixnak nevezzük. Például

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \\ -2 & 3 & 1 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow A^T = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

egy 4×3-as mátrix.
Az összes $n \times m$ méretű (típusú) mátrixot $\mathbb{R}^{n \times m}$-el jelöljük. Az A mátrix i-edik sorának j-edik elemét (ahol $1 \leq i \leq n$ és $1 \leq j \leq m$) a_{ij}-vel jelöljük.
Ha $n = m$, akkor a mátrixot négyzetes mátrixnak nevezzük.
Az A mátrix főátlója: $(a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{kk})$, ahol $k = \min(n, m)$ pl.: $(2, 2, 1)$
Az A mátrix mellékátlója: $(a_{1m}, a_{2,(m-1)}, \ldots)$ pl.: $(1, -1, 3)$
Az A mátrix transzponáltja B, ha $B \in \mathbb{R}^{m \times n}$, és $b_{ji} = a_{ij}$. Jelölés: $B = A^T$

Mátrix bevezetése

Legyen A valós számokból készített táblázat, melynek n sora és m oszlopa van. Az így kapott objektumot $n \times m$-es mátrixnak nevezzük. Például

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \\ -2 & 3 & 1 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow A^T = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

egy 4×3-as mátrix.

Az összes $n \times m$ méretű (típusú) mátrixot $\mathbb{R}^{n \times m}$-el jelöljük. Az A mátrix i-edik sorának j-edik elemét (ahol $1 \leq i \leq n$ és $1 \leq j \leq m$) a_{ij}-vel jelöljük.

Ha $n = m$, akkor a mátrixot négyzetes mátrixnak nevezzük.

Az A mátrix főátlója: $(a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{kk})$, ahol $k = \min(n, m)$ pl.: $(2, 2, 1)$

Az A mátrix mellékátlója: $(a_{1m}, a_{2,(m-1)}, \ldots)$ pl.: $(1, -1, 3)$

Az A mátrix transzponáltja B, ha $B \in \mathbb{R}^{m \times n}$, és $b_{ji} = a_{ij}$. Jelölés: $B = A^T$

A definícióból látszik, hogy $(A^T)^T = A$.

Mátrixok összeadása, kivonása

Összeadás: Csak azonos típusú A és B mátrixra értelmezzük, tehát $A, B \in \mathbb{R}^{n \times m}$! Az összeadás elemenként történik, azaz $A + B \in \mathbb{R}^{n \times m}$ és $(A + B)_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$.

Mátrixok összeadása, kivonása

Összeadás: Csak azonos típusú A és B mátrixra értelmezzük, tehát $A, B \in \mathbb{R}^{n \times m}$! Az összeadás elemenként történik, azaz $A + B \in \mathbb{R}^{n \times m}$ és $(A + B)_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$. Példa:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 3 & 2 \end{bmatrix}, \ B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow A + B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

Mátrixok összeadása, kivonása

Összeadás: Csak azonos típusú A és B mátrixra értelmezzük, tehát $A, B \in \mathbb{R}^{n\times m}$! Az összeadás elemenként történik, azaz $A+B \in \mathbb{R}^{n\times m}$ és $(A+B)_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$. Példa:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 3 & 2 \end{bmatrix}, \; B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow A + B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

Tulajdonságok: zárt, kommutatív, asszociatív, van nullmátrix ($a_{ij} = 0$)

Mátrixok összeadása, kivonása

Összeadás: Csak azonos típusú A és B mátrixra értelmezzük, tehát $A, B \in \mathbb{R}^{n\times m}$! Az összeadás elemenként történik, azaz $A+B \in \mathbb{R}^{n\times m}$ és $(A+B)_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$. Példa:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 3 & 2 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow A+B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

Tulajdonságok: zárt, kommutatív, asszociatív, van nullmátrix ($a_{ij} = 0$)

Kivonás: Csak azonos típusú A és B mátrixra értelmezzük, tehát $A, B \in \mathbb{R}^{n\times m}$! A kivonás elemenként történik, azaz $A-B \in \mathbb{R}^{n\times m}$ és $(A-B)_{ij} = a_{ij} - b_{ij}$.

Mátrixok összeadása, kivonása

Összeadás: Csak azonos típusú A és B mátrixra értelmezzük, tehát $A, B \in \mathbb{R}^{n\times m}$! Az összeadás elemenként történik, azaz $A+B \in \mathbb{R}^{n\times m}$ és $(A+B)_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$. Példa:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 3 & 2 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow A+B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

Tulajdonságok: zárt, kommutatív, asszociatív, van nullmátrix ($a_{ij} = 0$)

Kivonás: Csak azonos típusú A és B mátrixra értelmezzük, tehát $A, B \in \mathbb{R}^{n\times m}$! A kivonás elemenként történik, azaz $A-B \in \mathbb{R}^{n\times m}$ és $(A-B)_{ij} = a_{ij} - b_{ij}$. Példa:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 3 & 2 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow A-B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -3 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

Mátrixok összeadása, kivonása

Összeadás: Csak azonos típusú A és B mátrixra értelmezzük, tehát $A, B \in \mathbb{R}^{n\times m}$! Az összeadás elemenként történik, azaz $A+B \in \mathbb{R}^{n\times m}$ és $(A+B)_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$. Példa:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 3 & 2 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow A+B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

Tulajdonságok: zárt, kommutatív, asszociatív, van nullmátrix $(a_{ij} = 0)$

Kivonás: Csak azonos típusú A és B mátrixra értelmezzük, tehát $A, B \in \mathbb{R}^{n\times m}$! A kivonás elemenként történik, azaz $A-B \in \mathbb{R}^{n\times m}$ és $(A-B)_{ij} = a_{ij} - b_{ij}$. Példa:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 3 & 2 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow A-B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -3 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

Tulajdonságok: zárt, antikommutatív, van ellentett mátrix $(-A)_{ij} = -a_{ij}$

Mátrixok szorzása

Mátrix szorzása valós számmal: Legyen $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$ és $\lambda \in \mathbb{R}$, ekkor $(\lambda A)_{ij} := \lambda a_{ij}$, azaz a mátrix minden elemét szorozzuk λ-val.

Mátrixok szorzása

Mátrix szorzása valós számmal: Legyen $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$ és $\lambda \in \mathbb{R}$, ekkor $(\lambda A)_{ij} := \lambda a_{ij}$, azaz a mátrix minden elemét szorozzuk λ-val.
Tulajdonságok: zárt, kommutatív, asszociatív, egységelemes, disztributív

Mátrixok szorzása

Mátrix szorzása valós számmal: Legyen $A \in \mathbb{R}^{n\times m}$ és $\lambda \in \mathbb{R}$, ekkor $(\lambda A)_{ij} := \lambda a_{ij}$, azaz a mátrix minden elemét szorozzuk λ-val.
Tulajdonságok: zárt, kommutatív, asszociatív, egységelemes, disztributív

Tétel

Az $\mathbb{R}^{n\times m}$ halmaz az imént definiált összeadással és számmal való szorzással vektorteret alkot.

Mátrixok szorzása

Mátrix szorzása valós számmal: Legyen $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$ és $\lambda \in \mathbb{R}$, ekkor $(\lambda A)_{ij} := \lambda a_{ij}$, azaz a mátrix minden elemét szorozzuk λ-val.
Tulajdonságok: zárt, kommutatív, asszociatív, egységelemes, disztributív

Tétel

Az $\mathbb{R}^{n \times m}$ halmaz az imént definiált összeadással és számmal való szorzással vektorteret alkot.

Mátrixok közötti szorzás: Legyen $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$ és $B \in \mathbb{R}^{m \times l}$, ekkor értelmezhető az $A \cdot B$ szorzás, ahol $AB \in \mathbb{R}^{n \times l}$ és $(AB)_{ij} = \sum_{k=1}^{m} a_{ik} b_{kj}$

Tehát az elől lévő mátrixnak ugyanannyi oszlopa van, mint a hátúl lévőnek sora. A szorzat más esetben nem hajtható végre! Az eredménynek ugyanannyi sora van, mint az elől lévő mátrixnak és ugyanannyi oszlopa, mint a hátul lévőnek.

Mátrixszorzás

$$\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1j} & \dots & b_{1l} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2j} & \dots & b_{2l} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mj} & \dots & b_{ml} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{im} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} ab_{11} & ab_{12} & \dots & ab_{1j} & \dots & ab_{1l} \\ ab_{11} & ab_{12} & \dots & ab_{1j} & \dots & ab_{1l} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ ab_{i1} & ab_{i2} & \dots & ab_{ij} & \dots & ab_{il} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ ab_{n1} & ab_{n2} & \dots & ab_{nj} & \dots & ab_{nl} \end{bmatrix}$$

Mátrixszorzás

$$\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1j} & \dots & b_{1l} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2j} & \dots & b_{2l} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mj} & \dots & b_{ml} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{im} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} ab_{11} & ab_{12} & \dots & ab_{1j} & \dots & ab_{1l} \\ ab_{11} & ab_{12} & \dots & ab_{1j} & \dots & ab_{1l} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ ab_{i1} & ab_{i2} & \dots & \boxed{ab_{ij}} & \dots & ab_{il} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ ab_{n1} & ab_{n2} & \dots & ab_{nj} & \dots & ab_{nl} \end{bmatrix}$$

$$ab_{ij} = \sum_{k=1}^{m} a_{ik} b_{kj} = a_{i1} b_{1j} + a_{i2} b_{2j} + \dots + a_{im} b_{mj}$$

Mátrixszorzás

$$\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1j} & \dots & b_{1l} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2j} & \dots & b_{2l} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mj} & \dots & b_{ml} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{im} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} ab_{11} & ab_{12} & \dots & ab_{1j} & \dots & ab_{1l} \\ ab_{11} & ab_{12} & \dots & ab_{1j} & \dots & ab_{1l} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ ab_{i1} & ab_{i2} & \dots & \boxed{ab_{ij}} & \dots & ab_{il} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ ab_{n1} & ab_{n2} & \dots & ab_{nj} & \dots & ab_{nl} \end{bmatrix}$$

$$ab_{ij} = \sum_{k=1}^{m} a_{ik} b_{kj} = a_{i1} b_{1j} + a_{i2} b_{2j} + \dots + a_{im} b_{mj}$$

Mátrixszorzás

$$\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1j} & \dots & b_{1l} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2j} & \dots & b_{2l} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mj} & \dots & b_{ml} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{im} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} ab_{11} & ab_{12} & \dots & ab_{1j} & \dots & ab_{1l} \\ ab_{11} & ab_{12} & \dots & ab_{1j} & \dots & ab_{1l} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ ab_{i1} & ab_{i2} & \dots & ab_{ij} & \dots & ab_{il} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ ab_{n1} & ab_{n2} & \dots & ab_{nj} & \dots & ab_{nl} \end{bmatrix}$$

$$ab_{ij} = \sum_{k=1}^{m} a_{ik} b_{kj} = a_{i1} b_{1j} + a_{i2} b_{2j} + \dots + a_{im} b_{mj}$$

Példa

Adjuk meg az AB szorzatot, ahol

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \text{ és } B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Példa

Adjuk meg az AB szorzatot, ahol

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \text{ és } B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Az AB szorzás elvégezhető, mert az A mátrixnak 3 oszlopa, míg a B mátrixnak 3 sora van, az eredményünknek pedig 2 sora és 3 oszlopa lesz:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{bmatrix}$$

Példa

Adjuk meg az AB szorzatot, ahol

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \text{ és } B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Az AB szorzás elvégezhető, mert az A mátrixnak 3 oszlopa, míg a B mátrixnak 3 sora van, az eredményünknek pedig 2 sora és 3 oszlopa lesz:

$$\begin{bmatrix} \boxed{\begin{matrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{matrix}} & \begin{matrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{matrix} & \begin{matrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{matrix} \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} \boxed{1 \quad 2 \quad -1} \\ 0 \quad 1 \quad 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boxed{\dots} & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{bmatrix}$$

Példa

Adjuk meg az AB szorzatot, ahol

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \text{ és } B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Az AB szorzás elvégezhető, mert az A mátrixnak 3 oszlopa, míg a B mátrixnak 3 sora van, az eredményünknek pedig 2 sora és 3 oszlopa lesz:

$$\begin{bmatrix} \boxed{\begin{matrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{matrix}} & \begin{matrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{matrix} & \begin{matrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{matrix} \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} \boxed{1 \quad 2 \quad -1} \\ 0 \quad 1 \quad 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boxed{-4} & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{bmatrix}$$

Példa

Adjuk meg az AB szorzatot, ahol

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \text{ és } B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Az AB szorzás elvégezhető, mert az A mátrixnak 3 oszlopa, míg a B mátrixnak 3 sora van, az eredményünknek pedig 2 sora és 3 oszlopa lesz:

$$\begin{bmatrix} 1 & \boxed{0} & 2 \\ -1 & \boxed{2} & -1 \\ 3 & \boxed{0} & 2 \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} \boxed{1 \quad 2 \quad -1} \\ 0 \quad 1 \quad 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -4 & \boxed{\dots} & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{bmatrix}$$

Példa

Adjuk meg az AB szorzatot, ahol

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \text{ és } B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Az AB szorzás elvégezhető, mert az A mátrixnak 3 oszlopa, míg a B mátrixnak 3 sora van, az eredményünknek pedig 2 sora és 3 oszlopa lesz:

$$\begin{bmatrix} 1 & \boxed{0} & 2 \\ -1 & \boxed{2} & -1 \\ 3 & \boxed{0} & 2 \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} \boxed{1 \quad 2 \quad -1} \\ 0 \quad 1 \quad 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -4 & \boxed{4} & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{bmatrix}$$

Példa

Adjuk meg az AB szorzatot, ahol

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \text{ és } B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Az AB szorzás elvégezhető, mert az A mátrixnak 3 oszlopa, míg a B mátrixnak 3 sora van, az eredményünknek pedig 2 sora és 3 oszlopa lesz:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \boxed{2} \\ -1 & 2 & \boxed{-1} \\ 3 & 0 & \boxed{2} \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} \boxed{1 \quad 2 \quad -1} \\ 0 \quad 1 \quad 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -4 & 4 & \boxed{\dots} \\ \dots & \dots & \dots \end{bmatrix}$$

Példa

Adjuk meg az AB szorzatot, ahol

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \text{ és } B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Az AB szorzás elvégezhető, mert az A mátrixnak 3 oszlopa, míg a B mátrixnak 3 sora van, az eredményünknek pedig 2 sora és 3 oszlopa lesz:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \boxed{2} \\ -1 & 2 & \boxed{-1} \\ 3 & 0 & \boxed{2} \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} \boxed{1 \quad 2 \quad -1} \\ 0 \quad 1 \quad 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -4 & 4 & \boxed{-2} \\ \dots & \dots & \dots \end{bmatrix}$$

Példa

Adjuk meg az AB szorzatot, ahol

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \text{ és } B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Az AB szorzás elvégezhető, mert az A mátrixnak 3 oszlopa, míg a B mátrixnak 3 sora van, az eredményünknek pedig 2 sora és 3 oszlopa lesz:

$$\begin{bmatrix} \boxed{\begin{matrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{matrix}} & \begin{matrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{matrix} & \begin{matrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{matrix} \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ \boxed{0 \quad 1 \quad 3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -4 & 4 & -2 \\ \boxed{\dots} & \dots & \dots \end{bmatrix}$$

Példa

Adjuk meg az AB szorzatot, ahol

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \text{ és } B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Az AB szorzás elvégezhető, mert az A mátrixnak 3 oszlopa, míg a B mátrixnak 3 sora van, az eredményünknek pedig 2 sora és 3 oszlopa lesz:

$$\begin{bmatrix} \boxed{\begin{matrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{matrix}} & \begin{matrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{matrix} & \begin{matrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{matrix} \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ \boxed{0 \quad 1 \quad 3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -4 & 4 & -2 \\ \boxed{8} & \dots & \dots \end{bmatrix}$$

Példa

Adjuk meg az AB szorzatot, ahol

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \text{ és } B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Az AB szorzás elvégezhető, mert az A mátrixnak 3 oszlopa, míg a B mátrixnak 3 sora van, az eredményünknek pedig 2 sora és 3 oszlopa lesz:

$$\begin{bmatrix} 1 & \boxed{0} & 2 \\ -1 & \boxed{2} & -1 \\ 3 & \boxed{0} & 2 \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -4 & 4 & -2 \\ 8 & \boxed{\dots} & \dots \end{bmatrix}$$

Példa

Adjuk meg az AB szorzatot, ahol

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \text{ és } B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Az AB szorzás elvégezhető, mert az A mátrixnak 3 oszlopa, míg a B mátrixnak 3 sora van, az eredményünknek pedig 2 sora és 3 oszlopa lesz:

$$\begin{bmatrix} 1 & \boxed{0} & 2 \\ -1 & \boxed{2} & -1 \\ 3 & \boxed{0} & 2 \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ \boxed{0 \quad 1 \quad 3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -4 & 4 & -2 \\ 8 & \boxed{2} & \dots \end{bmatrix}$$

Példa

Adjuk meg az AB szorzatot, ahol

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \text{ és } B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Az AB szorzás elvégezhető, mert az A mátrixnak 3 oszlopa, míg a B mátrixnak 3 sora van, az eredményünknek pedig 2 sora és 3 oszlopa lesz:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \boxed{2} \\ -1 & 2 & \boxed{-1} \\ 3 & 0 & \boxed{2} \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ \boxed{0 \quad 1 \quad 3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -4 & 4 & -2 \\ 8 & 2 & \boxed{\ldots} \end{bmatrix}$$

Példa

Adjuk meg az AB szorzatot, ahol

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \text{ és } B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Az AB szorzás elvégezhető, mert az A mátrixnak 3 oszlopa, míg a B mátrixnak 3 sora van, az eredményünknek pedig 2 sora és 3 oszlopa lesz:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \boxed{2} \\ -1 & 2 & \boxed{-1} \\ 3 & 0 & \boxed{2} \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ \boxed{0 \quad 1 \quad 3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -4 & 4 & -2 \\ 8 & 2 & \boxed{5} \end{bmatrix}$$

Példa

Adjuk meg az AB szorzatot, ahol

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \text{ és } B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Az AB szorzás elvégezhető, mert az A mátrixnak 3 oszlopa, míg a B mátrixnak 3 sora van, az eredményünknek pedig 2 sora és 3 oszlopa lesz:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -4 & 4 & -2 \\ 8 & 2 & 5 \end{bmatrix}$$

Tulajdonságok

1. A szorzás sorrendje nem felcserélhető, az eredmény nem is biztos, hogy létezik.

Tulajdonságok

1. A szorzás sorrendje nem felcserélhető, az eredmény nem is biztos, hogy létezik.
2. Négyzetes mátrixok között sem cserélhető fel a sorrend:

$$\text{Ellenpélda: } \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Tulajdonságok

1. A szorzás sorrendje nem felcserélhető, az eredmény nem is biztos, hogy létezik.
2. Négyzetes mátrixok között sem cserélhető fel a sorrend:

$$\text{Ellenpélda: } \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

3. Nem nullosztómentes, azaz $A \cdot B = 0$ eset úgy is előfordulhat, hogy A, B egyik sem nullmátrix (pl.: előbbi példa).

Tulajdonságok

1. A szorzás sorrendje nem felcserélhető, az eredmény nem is biztos, hogy létezik.
2. Négyzetes mátrixok között sem cserélhető fel a sorrend:

$$\text{Ellenpélda: } \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

3. Nem nullosztómentes, azaz $A \cdot B = 0$ eset úgy is előfordulhat, hogy A, B egyik sem nullmátrix (pl.: előbbi példa).
4. A(z azonos méretű) négyzetes mátrixok között a szorzásnak van egységeleme, melyet E_n-el, vagy I_n-el jelölünk és $(E_n)_{ij} = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{ha } i = j \\ 0 & \text{ha } i \neq j \end{cases}$ azaz a főátlóban lévő elemek mindegyike 1, azon kívül pedig 0 (δ_{ij}-t szokás Kronecker-szimbólumnak nevezni).

Tulajdonságok

Tétel

Az $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$ *mátrixra* $AE_m = A$ *és* $E_nA = A$.

Tulajdonságok

Tétel

Az $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$ *mátrixra* $AE_m = A$ *és* $E_nA = A$.

Tétel (Asszociativitás)

Ha az $(AB)C$ *szorzás végrehajtható, akkor az* $A(BC)$ *szorzás is és* $(AB)C = A(BC)$.

Tulajdonságok

Tétel

Az $A \in \mathbb{R}^{n\times m}$ *mátrixra* $AE_m = A$ *és* $E_nA = A$.

Tétel (Asszociativitás)

Ha az $(AB)C$ *szorzás végrehajtható, akkor az* $A(BC)$ *szorzás is és* $(AB)C = A(BC)$.

Tétel (Disztributivitás)

Ha az A, B, C *mátrixokra az* $(A + B)C$ *művelet végrehajtható, akkor az* $AC + BC$ *is végrehajtható és*$(A + B)C = AC + BC$.
Hasonlóan, ha az A, B, C *mátrixokra az* $A(B + C)$ *művelet végrehajtható, akkor az* $AB + AC$ *is végrehajtható és* $A(B + C) = AB + AC$.

Kapcsolat a korábbiakban tanultakkal

- Minden vektor kétféleképpen is értelmezhető, mint mátrix. Ha $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$, akkor gondolhatjuk $\mathbf{v}$-t $1 \times n$-es és $n \times 1$-es mátrixnak is. Előbbi esetben $\mathbf{v}$-re azt mondjuk, hogy sorvektor, míg utóbbi esetben azt, hogy oszlopvektor.

Kapcsolat a korábbiakban tanultakkal

- Minden vektor kétféleképpen is értelmezhető, mint mátrix. Ha $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$, akkor gondolhatjuk $\mathbf{v}$-t $1 \times n$-es és $n \times 1$-es mátrixnak is. Előbbi esetben $\mathbf{v}$-re azt mondjuk, hogy sorvektor, míg utóbbi esetben azt, hogy oszlopvektor.
- Az $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$ mátrix soraiból és oszlopaiból is képezhetünk vektorokat. Minden $\mathbf{a}_i$ $(1 \leq i \leq n)$ sorvektor $\mathbb{R}^m$-beli és minden $\mathbf{a}^j$ $(1 \leq j \leq m)$ oszlopvektor $\mathbb{R}^n$-beli.

Kapcsolat a korábbiakban tanultakkal

- Minden vektor kétféleképpen is értelmezhető, mint mátrix. Ha $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$, akkor gondolhatjuk $\mathbf{v}$-t $1 \times n$-es és $n \times 1$-es mátrixnak is. Előbbi esetben $\mathbf{v}$-re azt mondjuk, hogy sorvektor, míg utóbbi esetben azt, hogy oszlopvektor.
- Az $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$ mátrix soraiból és oszlopaiból is képezhetünk vektorokat. Minden $\mathbf{a}_i$ $(1 \leq i \leq n)$ sorvektor $\mathbb{R}^m$-beli és minden $\mathbf{a}^j$ $(1 \leq j \leq m)$ oszlopvektor $\mathbb{R}^n$-beli.
- Látható az is, hogy $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$ és $B \in \mathbb{R}^{m \times l}$ esetén $AB \in \mathbb{R}^{n \times l}$ és $(AB)_{ij} = \langle \mathbf{a}_i, \mathbf{b}^j \rangle$

Kapcsolat a korábbiakban tanultakkal

- Minden vektor kétféleképpen is értelmezhető, mint mátrix. Ha $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$, akkor gondolhatjuk $\mathbf{v}$-t $1 \times n$-es és $n \times 1$-es mátrixnak is. Előbbi esetben $\mathbf{v}$-re azt mondjuk, hogy sorvektor, míg utóbbi esetben azt, hogy oszlopvektor.
- Az $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$ mátrix soraiból és oszlopaiból is képezhetünk vektorokat. Minden $\mathbf{a}_i$ $(1 \leq i \leq n)$ sorvektor $\mathbb{R}^m$-beli és minden $\mathbf{a}^j$ $(1 \leq j \leq m)$ oszlopvektor $\mathbb{R}^n$-beli.
- Látható az is, hogy $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$ és $B \in \mathbb{R}^{m \times l}$ esetén $AB \in \mathbb{R}^{n \times l}$ és $(AB)_{ij} = \langle \mathbf{a}_i, \mathbf{b}^j \rangle$
- Az egységmátrixban a természetes bázis vekotrai szerepelnek

Mátrix inverze

Tekintsük az $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ egyenletet, ahol $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ és $\mathbf{x}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$. Ha találnánk egy olyan $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mátrixot, amelyre $BA = E_n$, akkor az egésze egyenletet balról megszorozva B-vel, adódik, hogy $BA\mathbf{x} = E_n\mathbf{x} = \mathbf{x} = B\mathbf{b}$.

Mátrix inverze

Tekintsük az $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ egyenletet, ahol $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ és $\mathbf{x}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$. Ha találnánk egy olyan $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mátrixot, amelyre $BA = E_n$, akkor az egésze egyenletet balról megszorozva B-vel, adódik, hogy $BA\mathbf{x} = E_n\mathbf{x} = \mathbf{x} = B\mathbf{b}$. Ha ismernénk B-t, akkor az egyenletet egy szorzással meg tudnánk oldani.

Mátrix inverze

Tekintsük az $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ egyenletet, ahol $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ és $\mathbf{x}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$. Ha találnánk egy olyan $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mátrixot, amelyre $BA = E_n$, akkor az egésze egyenletet balról megszorozva B-vel, adódik, hogy $BA\mathbf{x} = E_n\mathbf{x} = \mathbf{x} = B\mathbf{b}$. Ha ismernénk B-t, akkor az egyenletet egy szorzással meg tudnánk oldani.

Definíció

Az $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mátrix balinverze $A_b^{-1} \in \mathbb{R}^{n\times n}$, ha $A_b^{-1}A = E_n$.

Mátrix inverze

Tekintsük az $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ egyenletet, ahol $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ és $\mathbf{x}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$. Ha találnánk egy olyan $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mátrixot, amelyre $BA = E_n$, akkor az egésze egyenletet balról megszorozva B-vel, adódik, hogy $BA\mathbf{x} = E_n\mathbf{x} = \mathbf{x} = B\mathbf{b}$. Ha ismernénk B-t, akkor az egyenletet egy szorzással meg tudnánk oldani.

Definíció

Az $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mátrix balinverze $A_b^{-1} \in \mathbb{R}^{n\times n}$, ha $A_b^{-1}A = E_n$.
Az $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mátrix jobbinverze $A_j^{-1} \in \mathbb{R}^{n\times n}$, ha $AA_j^{-1} = E_n$.

Mátrix inverze

Tekintsük az $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ egyenletet, ahol $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ és $\mathbf{x}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$. Ha találnánk egy olyan $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mátrixot, amelyre $BA = E_n$, akkor az egésze egyenletet balról megszorozva B-vel, adódik, hogy $BA\mathbf{x} = E_n\mathbf{x} = \mathbf{x} = B\mathbf{b}$. Ha ismernénk B-t, akkor az egyenletet egy szorzással meg tudnánk oldani.

Definíció

Az $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mátrix balinverze $A_b^{-1} \in \mathbb{R}^{n\times n}$, ha $A_b^{-1}A = E_n$.
Az $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mátrix jobbinverze $A_j^{-1} \in \mathbb{R}^{n\times n}$, ha $AA_j^{-1} = E_n$.

Tétel

Bármely $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mátrixra $A_b^{-1} = A_j^{-1}$, azaz az inverz egyértelmű.

Mátrix inverze

Tekintsük az $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ egyenletet, ahol $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ és $\mathbf{x}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$. Ha találnánk egy olyan $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mátrixot, amelyre $BA = E_n$, akkor az egésze egyenletet balról megszorozva B-vel, adódik, hogy $BA\mathbf{x} = E_n\mathbf{x} = \mathbf{x} = B\mathbf{b}$. Ha ismernénk B-t, akkor az egyenletet egy szorzással meg tudnánk oldani.

Definíció

Az $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mátrix balinverze $A_b^{-1} \in \mathbb{R}^{n\times n}$, ha $A_b^{-1}A = E_n$.
Az $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mátrix jobbinverze $A_j^{-1} \in \mathbb{R}^{n\times n}$, ha $AA_j^{-1} = E_n$.

Tétel

Bármely $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mátrixra $A_b^{-1} = A_j^{-1}$, azaz az inverz egyértelmű.

Biz.: $A_b^{-1}AA_j^{-1} = A_b^{-1}(AA_j^{-1}) = A_b^{-1}E_n = A_b^{-1}$, de
$A_b^{-1}AA_j^{-1} = (A_b^{-1}A)A_j^{-1} = E_nA_j^{-1} = A_j^{-1}$, tehát $A_b^{-1} = A_j^{-1}$.

Inverz megkeresése

1. példa Keressük meg az $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & 2 & 3 \\ -6 & -1 & 2 \end{bmatrix}$ mátrix inverzét.

Inverz megkeresése

1. példa Keressük meg az $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & 2 & 3 \\ -6 & -1 & 2 \end{bmatrix}$ mátrix inverzét.

Legyen $A^{-1} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{bmatrix}$ mátrix és végezzük el az AA^{-1} szorzást és tegyük egyenlővé az egységmátrixszal:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & 2 & 3 \\ -6 & -1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ez alapján van 9 db egyenletünk és 9 ismeretlenünk, amit 3 db 3-as csoportba tudunk osztani azonos együtthatómátrixszal:

$$\begin{array}{rclrclrcl} x_1 - y_1 - 2z_1 & = & 1 & x_2 - y_2 - 2z_2 & = & 0 & x_3 - y_3 - 2z_3 & = & 0 \\ 2y_1 + 3z_1 & = & 0 & 2y_2 + 3z_2 & = & 1 & 2y_3 + 3z_3 & = & 0 \\ -6x_1 - y_1 + 2z_1 & = & 0 & -6x_2 - y_2 + 2z_2 & = & 0 & -6x_3 - y_3 + 2z_3 & = & 1 \end{array}$$

Példa – folytatás

Az előző egyenletekből a következő mátrixos alakokat írhatjuk fel:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & 0 \\ -6 & -1 & 2 & 0 \end{array}\right] \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 1 \\ -6 & -1 & 2 & 0 \end{array}\right] \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 0 \\ -6 & -1 & 2 & 1 \end{array}\right]$$

Észrevétel:

Példa – folytatás

Az előző egyenletekből a következő mátrixos alakokat írhatjuk fel:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & 0 \\ -6 & -1 & 2 & 0 \end{array}\right] \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 1 \\ -6 & -1 & 2 & 0 \end{array}\right] \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 0 \\ -6 & -1 & 2 & 1 \end{array}\right]$$

Észrevétel: A Gauss-Jordan eliminációt csak az együtthatómátrix alapján végezzük, csak az eljárás végén érdekes, mi van a $|$ után. Ezért akár végezhetjük egyszerre is, ez a szimultán egyenletrendszer megoldás:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ -6 & -1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Példa – folytatás

Az előző egyenletekből a következő mátrixos alakokat írhatjuk fel:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & 0 \\ -6 & -1 & 2 & 0 \end{array}\right] \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 1 \\ -6 & -1 & 2 & 0 \end{array}\right] \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 0 \\ -6 & -1 & 2 & 1 \end{array}\right]$$

Észrevétel: A Gauss-Jordan eliminációt csak az együtthatómátrix alapján végezzük, csak az eljárás végén érdekes, mi van a $|$ után. Ezért akár végezhetjük egyszerre is, ez a szimultán egyenletrendszer megoldás:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ -6 & -1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \overset{s_3 + 6s_1}{\sim}$$

Példa – folytatás

Az előző egyenletekből a következő mátrixos alakokat írhatjuk fel:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & 0 \\ -6 & -1 & 2 & 0 \end{array}\right] \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 1 \\ -6 & -1 & 2 & 0 \end{array}\right] \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 0 \\ -6 & -1 & 2 & 1 \end{array}\right]$$

Észrevétel: A Gauss-Jordan eliminációt csak az együtthatómátrix alapján végezzük, csak az eljárás végén érdekes, mi van a $|$ után. Ezért akár végezhetjük egyszerre is, ez a szimultán egyenletrendszer megoldás:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ -6 & -1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \overset{s_3+6s_1}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -7 & -10 & 6 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Példa – folytatás

Az előző egyenletekből a következő mátrixos alakokat írhatjuk fel:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & 0 \\ -6 & -1 & 2 & 0 \end{array}\right] \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 1 \\ -6 & -1 & 2 & 0 \end{array}\right] \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 0 \\ -6 & -1 & 2 & 1 \end{array}\right]$$

Észrevétel: A Gauss-Jordan eliminációt csak az együtthatómátrix alapján végezzük, csak az eljárás végén érdekes, mi van a $|$ után. Ezért akár végezhetjük egyszerre is, ez a szimultán egyenletrendszer megoldás:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ -6 & -1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \overset{s_3+6s_1}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -7 & -10 & 6 & 0 & 1 \end{array}\right] \overset{s_3+4s_2}{\sim}$$

Példa – folytatás

Az előző egyenletekből a következő mátrixos alakokat írhatjuk fel:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & 0 \\ -6 & -1 & 2 & 0 \end{array}\right] \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 1 \\ -6 & -1 & 2 & 0 \end{array}\right] \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 0 \\ -6 & -1 & 2 & 1 \end{array}\right]$$

Észrevétel: A Gauss-Jordan eliminációt csak az együtthatómátrix alapján végezzük, csak az eljárás végén érdekes, mi van a $|$ után. Ezért akár végezhetjük egyszerre is, ez a szimultán egyenletrendszer megoldás:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ -6 & -1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \overset{s_3+6s_1}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -7 & -10 & 6 & 0 & 1 \end{array}\right] \overset{s_3+4s_2}{\sim}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 6 & 4 & 1 \end{array}\right]$$

Példa – folytatás

Az előző egyenletekből a következő mátrixos alakokat írhatjuk fel:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & 0 \\ -6 & -1 & 2 & 0 \end{array}\right] \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 1 \\ -6 & -1 & 2 & 0 \end{array}\right] \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 0 \\ -6 & -1 & 2 & 1 \end{array}\right]$$

Észrevétel: A Gauss-Jordan eliminációt csak az együtthatómátrix alapján végezzük, csak az eljárás végén érdekes, mi van a $|$ után. Ezért akár végezhetjük egyszerre is, ez a szimultán egyenletrendszer megoldás:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ -6 & -1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \overset{s_3+6s_1}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -7 & -10 & 6 & 0 & 1 \end{array}\right] \overset{s_3+4s_2}{\sim}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 6 & 4 & 1 \end{array}\right] \underset{s_2-2s_3}{\overset{s_1+s_3}{\sim}}$$

Példa – folytatás

Az előző egyenletekből a következő mátrixos alakokat írhatjuk fel:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & 0 \\ -6 & -1 & 2 & 0 \end{array}\right] \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 1 \\ -6 & -1 & 2 & 0 \end{array}\right] \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 0 \\ -6 & -1 & 2 & 1 \end{array}\right]$$

Észrevétel: A Gauss-Jordan eliminációt csak az együtthatómátrix alapján végezzük, csak az eljárás végén érdekes, mi van a $|$ után. Ezért akár végezhetjük egyszerre is, ez a szimultán egyenletrendszer megoldás:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ -6 & -1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \overset{s_3+6s_1}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -7 & -10 & 6 & 0 & 1 \end{array}\right] \overset{s_3+4s_2}{\sim}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 6 & 4 & 1 \end{array}\right] \underset{s_2-2s_3}{\overset{s_1+s_3}{\sim}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 7 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -12 & -7 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 6 & 4 & 1 \end{array}\right]$$

Példa – folytatás

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 7 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -12 & -7 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 6 & 4 & 1 \end{array}\right]$$

Példa – folytatás

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 7 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -12 & -7 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 6 & 4 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{c} s_2 \cdot (-1) \\ \sim \\ s_2 \leftrightarrow s_3 \end{array}$$

Példa – folytatás

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 7 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -12 & -7 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 6 & 4 & 1 \end{array}\right] \underset{s_2 \leftrightarrow s_3}{\overset{s_2 \cdot (-1)}{\sim}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 7 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 6 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 12 & 7 & 2 \end{array}\right]$$

Példa – folytatás

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 7 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -12 & -7 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 6 & 4 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{c} s_2 \cdot (-1) \\ \sim \\ s_2 \leftrightarrow s_3 \end{array} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 7 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 6 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 12 & 7 & 2 \end{array}\right] \begin{array}{c} s_2 - 2s_3 \\ \sim \\ \end{array}$$

Példa – folytatás

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 7 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -12 & -7 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 6 & 4 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{c} s_2 \cdot (-1) \\ \sim \\ s_2 \leftrightarrow s_3 \end{array} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 7 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 6 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 12 & 7 & 2 \end{array}\right] \begin{array}{c} s_2 - 2s_3 \\ \sim \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 7 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -18 & -10 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 12 & 7 & 2 \end{array}\right]$$

Példa – folytatás

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 7 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -12 & -7 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 6 & 4 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{c} s_2 \cdot (-1) \\ \sim \\ s_2 \leftrightarrow s_3 \end{array} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 7 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 6 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 12 & 7 & 2 \end{array}\right] \begin{array}{c} s_2 - 2s_3 \\ \sim \\ \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 7 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -18 & -10 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 12 & 7 & 2 \end{array}\right] \Rightarrow A^{-1} = \begin{bmatrix} 7 & 4 & 1 \\ -18 & -10 & -3 \\ 12 & 7 & 2 \end{bmatrix}$$

Példa – folytatás

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 7 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -12 & -7 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 6 & 4 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{c} s_2 \cdot (-1) \\ \sim \\ s_2 \leftrightarrow s_3 \end{array} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 7 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 6 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 12 & 7 & 2 \end{array}\right] \begin{array}{c} s_2 - 2s_3 \\ \sim \\ \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 7 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -18 & -10 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 12 & 7 & 2 \end{array}\right] \Rightarrow A^{-1} = \begin{bmatrix} 7 & 4 & 1 \\ -18 & -10 & -3 \\ 12 & 7 & 2 \end{bmatrix}$$

2. példa Oldjuk meg az inverz segítségével az alábbi egyenletrendszert:

$$\begin{aligned} x - y - 2z &= 6 \\ 2y + 3z &= 2 \\ -6x - y + 2z &= 1 \end{aligned}$$

Példa – folytatás

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 7 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -12 & -7 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 6 & 4 & 1 \end{array}\right] \underset{s_2 \leftrightarrow s_3}{\overset{s_2\cdot(-1)}{\sim}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 7 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 6 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 12 & 7 & 2 \end{array}\right] \overset{s_2-2s_3}{\sim}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 7 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -18 & -10 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 12 & 7 & 2 \end{array}\right] \Rightarrow A^{-1} = \begin{bmatrix} 7 & 4 & 1 \\ -18 & -10 & -3 \\ 12 & 7 & 2 \end{bmatrix}$$

2. példa Oldjuk meg az inverz segítségével az alábbi egyenletrendszert:

$$\begin{aligned} x - y - 2z &= 6 \\ 2y + 3z &= 2 \\ -6x - y + 2z &= 1 \end{aligned}$$

A fenti egyenletrendszer egüytthatómátrixa éppen az első példabeli A mátrix, aminek az inverze A^{-1}, és eredményvektora $\mathbf{b} = (6, 2, 1)$. Tehát:

$$\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 7 & 4 & 1 \\ -18 & -10 & -3 \\ 12 & 7 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 6 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} =$$

Példa – folytatás

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 7 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -12 & -7 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 6 & 4 & 1 \end{array}\right] \underset{s_2 \leftrightarrow s_3}{\overset{s_2 \cdot (-1)}{\sim}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 7 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 6 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 12 & 7 & 2 \end{array}\right] \overset{s_2 - 2s_3}{\sim}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 7 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -18 & -10 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 12 & 7 & 2 \end{array}\right] \Rightarrow A^{-1} = \begin{bmatrix} 7 & 4 & 1 \\ -18 & -10 & -3 \\ 12 & 7 & 2 \end{bmatrix}$$

2. példa Oldjuk meg az inverz segítségével az alábbi egyenletrendszert:

$$\begin{aligned} x - y - 2z &= 6 \\ 2y + 3z &= 2 \\ -6x - y + 2z &= 1 \end{aligned}$$

A fenti egyenletrendszer egüytthatómátrixa éppen az első példabeli A mátrix, aminek az inverze A^{-1}, és eredményvektora $\mathbf{b} = (6, 2, 1)$. Tehát:

$$\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 7 & 4 & 1 \\ -18 & -10 & -3 \\ 12 & 7 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 6 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 51 \\ -131 \\ 88 \end{bmatrix}$$

Példa

3. példa Adjuk meg a $B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 2 \\ 3 & -3 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ mátrix inverzét.

Példa

3. példa Adjuk meg a $B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 2 \\ 3 & -3 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ mátrix inverzét.

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & -3 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Példa

3. példa Adjuk meg a $B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 2 \\ 3 & -3 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ mátrix inverzét.

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & -3 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{c} s_2 - 2s_1 \\ \sim \\ s_3 - 3s_1 \end{array}$$

Példa

3. példa Adjuk meg a $B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 2 \\ 3 & -3 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ mátrix inverzét.

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & -3 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{c} s_2 - 2s_1 \\ \sim \\ s_3 - 3s_1 \end{array} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Példa

3. példa Adjuk meg a $B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 2 \\ 3 & -3 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ mátrix inverzét.

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & -3 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{c} s_2 - 2s_1 \\ \sim \\ s_3 - 3s_1 \end{array} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{c} s_1 - s_4 \\ s_3 + 4s_4 \\ \sim \\ s_2/3 \end{array}$$

Példa

3. példa Adjuk meg a $B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 2 \\ 3 & -3 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ mátrix inverzét.

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & -3 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{c} s_2 - 2s_1 \\ \sim \\ s_3 - 3s_1 \end{array} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{c} s_1 - s_4 \\ s_3 + 4s_4 \\ \sim \\ s_2/3 \end{array} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -3 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Példa

3. példa Adjuk meg a $B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 2 \\ 3 & -3 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ mátrix inverzét.

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & -3 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{c} s_2 - 2s_1 \\ \sim \\ s_3 - 3s_1 \end{array} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{c} s_1 - s_4 \\ s_3 + 4s_4 \\ \sim \\ s_2/3 \end{array} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -3 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{c} s_1 + s_2 \\ \sim \end{array}$$

Példa

3. példa Adjuk meg a $B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 2 \\ 3 & -3 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ mátrix inverzét.

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & -3 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{c} s_2 - 2s_1 \\ \sim \\ s_3 - 3s_1 \end{array} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{c} s_1 - s_4 \\ s_3 + 4s_4 \\ \sim \\ s_2/3 \end{array} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -3 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{c} s_1 + s_2 \\ \sim \end{array} \left[\begin{array}{c|cccc} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & -1 \\ E_4 & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ & -3 & 0 & 1 & 4 \\ & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Rangfogalmak

Emlék: Vektorok lineráis függetlenségének ellenőrzését homogén lineáris egyenletrendszerrel végezük. Ha volt szabad változó, akkor függőek, ha nem volt, akkor függetlenek.

Rangfogalmak

Emlék: Vektorok lineráis függetlenségének ellenőrzését homogén lineáris egyenletrendszerrel végezük. Ha volt szabad változó, akkor függőek, ha nem volt, akkor függetlenek.

Kérdés: Hány lineárisan független vektor választható ki $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$-ből?

Definíció

A $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ vektorrendszer rangja a belőlük kiválasztható lineárisan független vektorok maximális száma.

Rangfogalmak

Emlék: Vektorok lineráis függetlenségének ellenőrzését homogén lineáris egyenletrendszerrel végezük. Ha volt szabad változó, akkor függőek, ha nem volt, akkor függetlenek.
Kérdés: Hány lineárisan független vektor választható ki $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$-ből?

Definíció

A $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ vektorrendszer rangja a belőlük kiválasztható lineárisan független vektorok maximális száma.
Az $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ mátrix oszloprangja a mátrix oszlopvektoraiból kiválasztható lineárisan független vektorok maximális száma.

Rangfogalmak

Emlék: Vektorok lineráis függetlenségének ellenőrzését homogén lineáris egyenletrendszerrel végezük. Ha volt szabad változó, akkor függőek, ha nem volt, akkor függetlenek.

Kérdés: Hány lineárisan független vektor választható ki $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$-ből?

Definíció

A $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ vektorrendszer rangja a belőlük kiválasztható lineárisan független vektorok maximális száma.

Az $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ mátrix oszloprangja a mátrix oszlopvektoraiból kiválasztható lineárisan független vektorok maximális száma.

Az $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ mátrix sorrangja a mátrix sorvektoraiból kiválasztható lineárisan független vektorok maximális száma.

Rangfogalmak

Emlék: Vektorok lineráis függetlenségének ellenőrzését homogén lineáris egyenletrendszerrel végezük. Ha volt szabad változó, akkor függőek, ha nem volt, akkor függetlenek.

Kérdés: Hány lineárisan független vektor választható ki $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$-ből?

Definíció

A $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ vektorrendszer rangja a belőlük kiválasztható lineárisan független vektorok maximális száma.

Az $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ mátrix oszloprangja a mátrix oszlopvektoraiból kiválasztható lineárisan független vektorok maximális száma.

Az $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ mátrix sorrangja a mátrix sorvektoraiból kiválasztható lineárisan független vektorok maximális száma.

Tétel

Az $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ mátrix sorrangja és oszloprangja megegyezik. Jelölés: $r(A)$

Rangfogalmak

Emlék: Vektorok lineráis függetlenségének ellenőrzését homogén lineáris egyenletrendszerrel végezük. Ha volt szabad változó, akkor függőek, ha nem volt, akkor függetlenek.
Kérdés: Hány lineárisan független vektor választható ki $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$-ből?

Definíció

A $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ vektorrendszer rangja a belőlük kiválasztható lineárisan független vektorok maximális száma.
Az $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ mátrix oszloprangja a mátrix oszlopvektoraiból kiválasztható lineárisan független vektorok maximális száma.
Az $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ mátrix sorrangja a mátrix sorvektoraiból kiválasztható lineárisan független vektorok maximális száma.

Tétel

Az $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ mátrix sorrangja és oszloprangja megegyezik. Jelölés: $r(A)$

Következmény: $r(A) = r(A^T)$ és $r(A) \leq \min(m, n)$

Egyenletrendszer mátrixrangos vizsgálata

Észrevétel: Az elemi sorműveletek és oszlopműveletek nem változtatják meg a mátrix rangját!

Egyenletrendszer mátrixrangos vizsgálata

Észrevétel: Az elemi sorműveletek és oszlopműveletek nem változtatják meg a mátrix rangját!

Rang kiszámítása: Az A mátrix rangja megegyezik a

- Gauss-Jordan elimináció után a vezéregyesek számával.

Egyenletrendszer mátrixrangos vizsgálata

Észrevétel: Az elemi sorműveletek és oszlopműveletek nem változtatják meg a mátrix rangját!

Rang kiszámítása: Az A mátrix rangja megegyezik a

- Gauss-Jordan elimináció után a vezéregyesek számával.
- elemi sor-és oszlopműveletek után a mátrixban található nem 0 elemek minimális számával.

Egyenletrendszer mátrixrangos vizsgálata

Észrevétel: Az elemi sorműveletek és oszlopműveletek nem változtatják meg a mátrix rangját!

Rang kiszámítása: Az A mátrix rangja megegyezik a

- Gauss-Jordan elimináció után a vezéregyesek számával.
- elemi sor-és oszlopműveletek után a mátrixban található nem 0 elemek minimális számával.

Az utóbbi azt jelenti, hogy minden sorban és oszlopban legfeljebb 1 darab nem nulla szám (tipikusan 1-es) áll.

Tétel (Kronecker-Capelli)

Legyen $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$. Ekkor az $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ egyenletrendszernek

- *nincs megoldása, ha $r(A) < r(A|b)$,*

Egyenletrendszer mátrixrangos vizsgálata

Észrevétel: Az elemi sorműveletek és oszlopműveletek nem változtatják meg a mátrix rangját!

Rang kiszámítása: Az A mátrix rangja megegyezik a

- Gauss-Jordan elimináció után a vezéregyesek számával.
- elemi sor-és oszlopműveletek után a mátrixban található nem 0 elemek minimális számával.

Az utóbbi azt jelenti, hogy minden sorban és oszlopban legfeljebb 1 darab nem nulla szám (tipikusan 1-es) áll.

Tétel (Kronecker-Capelli)

Legyen $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$. *Ekkor az* $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ *egyenletrendszernek*

- *nincs megoldása, ha* $r(A) < r(A|b)$,
- *egyértelmű megoldása van, ha* $r(A) = r(A|b) = n$,

Egyenletrendszer mátrixrangos vizsgálata

Észrevétel: Az elemi sorműveletek és oszlopműveletek nem változtatják meg a mátrix rangját!

Rang kiszámítása: Az A mátrix rangja megegyezik a

- Gauss-Jordan elimináció után a vezéregyesek számával.
- elemi sor-és oszlopműveletek után a mátrixban található nem 0 elemek minimális számával.

Az utóbbi azt jelenti, hogy minden sorban és oszlopban legfeljebb 1 darab nem nulla szám (tipikusan 1-es) áll.

Tétel (Kronecker-Capelli)

Legyen $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$. *Ekkor az* $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ *egyenletrendszernek*

- *nincs megoldása, ha* $r(A) < r(A|b)$,
- *egyértelmű megoldása van, ha* $r(A) = r(A|b) = n$,
- ∞ *sok megoldása van, ha* $r(A) = r(A|b) < n$ *és a szabad változók száma* $n - r(A)$.

Egyenletrendszer mátrixrangos vizsgálata

Észrevétel: Az elemi sorműveletek és oszlopműveletek nem változtatják meg a mátrix rangját!

Rang kiszámítása: Az A mátrix rangja megegyezik a

- Gauss-Jordan elimináció után a vezéregyesek számával.
- elemi sor-és oszlopműveletek után a mátrixban található nem 0 elemek minimális számával.

Az utóbbi azt jelenti, hogy minden sorban és oszlopban legfeljebb 1 darab nem nulla szám (tipikusan 1-es) áll.

Tétel (Kronecker-Capelli)

Legyen $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$. *Ekkor az* $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ *egyenletrendszernek*

- *nincs megoldása, ha* $r(A) < r(A|b)$,
- *egyértelmű megoldása van, ha* $r(A) = r(A|b) = n$,
- ∞ *sok megoldása van, ha* $r(A) = r(A|b) < n$ *és a szabad változók száma* $n - r(A)$.

Példa

4. példa Számítsuk ki az $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & 5 \\ -2 & 5 & -3 & 7 \\ 4 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$ mátrix rangját.

Példa

4. példa Számítsuk ki az $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & 5 \\ -2 & 5 & -3 & 7 \\ 4 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$ mátrix rangját.

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & 5 \\ -2 & 5 & -3 & 7 \\ 4 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

Példa

4. példa Számítsuk ki az $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & 5 \\ -2 & 5 & -3 & 7 \\ 4 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$ mátrix rangját.

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & 5 \\ -2 & 5 & -3 & 7 \\ 4 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} \overset{o_1 \leftrightarrow o_3}{\sim}$$

Példa

4. példa Számítsuk ki az $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & 5 \\ -2 & 5 & -3 & 7 \\ 4 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$ mátrix rangját.

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & 5 \\ -2 & 5 & -3 & 7 \\ 4 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} \overset{o_1 \leftrightarrow o_3}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 5 \\ -3 & 5 & -2 & 7 \\ 3 & 2 & 4 & 4 \end{bmatrix}$$

Példa

4. példa Számítsuk ki az $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & 5 \\ -2 & 5 & -3 & 7 \\ 4 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$ mátrix rangját.

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & 5 \\ -2 & 5 & -3 & 7 \\ 4 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{matrix} o_1 \leftrightarrow o_3 \\ \sim \\ \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 5 \\ -3 & 5 & -2 & 7 \\ 3 & 2 & 4 & 4 \end{bmatrix} \begin{matrix} s_2 + 3s_1 \\ \sim \\ s_3 - 3s_1 \end{matrix}$$

Példa

4. példa Számítsuk ki az $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & 5 \\ -2 & 5 & -3 & 7 \\ 4 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$ mátrix rangját.

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & 5 \\ -2 & 5 & -3 & 7 \\ 4 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{matrix} o_1 \leftrightarrow o_3 \\ \sim \\ \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 5 \\ -3 & 5 & -2 & 7 \\ 3 & 2 & 4 & 4 \end{bmatrix} \begin{matrix} s_2 + 3s_1 \\ \sim \\ s_3 - 3s_1 \end{matrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 5 \\ 0 & 14 & 4 & 22 \\ 0 & -7 & -2 & -11 \end{bmatrix}$$

Példa

4. példa Számítsuk ki az $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & 5 \\ -2 & 5 & -3 & 7 \\ 4 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$ mátrix rangját.

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & 5 \\ -2 & 5 & -3 & 7 \\ 4 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{matrix} o_1 \leftrightarrow o_3 \\ \sim \\ \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 5 \\ -3 & 5 & -2 & 7 \\ 3 & 2 & 4 & 4 \end{bmatrix} \begin{matrix} s_2 + 3s_1 \\ \sim \\ s_3 - 3s_1 \end{matrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 5 \\ 0 & 14 & 4 & 22 \\ 0 & -7 & -2 & -11 \end{bmatrix} \begin{matrix} o_2 - 3o_1 \\ \sim \\ o_3 - 2_1 \\ o_4 - 5o_1 \end{matrix}$$

Példa

4. példa Számítsuk ki az $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & 5 \\ -2 & 5 & -3 & 7 \\ 4 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$ mátrix rangját.

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & 5 \\ -2 & 5 & -3 & 7 \\ 4 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} \underset{}{\overset{o_1 \leftrightarrow o_3}{\sim}} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 5 \\ -3 & 5 & -2 & 7 \\ 3 & 2 & 4 & 4 \end{bmatrix} \underset{s_3 - 3s_1}{\overset{s_2 + 3s_1}{\sim}}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 5 \\ 0 & 14 & 4 & 22 \\ 0 & -7 & -2 & -11 \end{bmatrix} \underset{\substack{o_3 - 2_1 \\ o_4 - 5o_1}}{\overset{o_2 - 3o_1}{\sim}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 14 & 4 & 22 \\ 0 & -7 & -2 & -11 \end{bmatrix}$$

Példa

4. példa Számítsuk ki az $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & 5 \\ -2 & 5 & -3 & 7 \\ 4 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$ mátrix rangját.

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & 5 \\ -2 & 5 & -3 & 7 \\ 4 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{array}{c} o_1 \leftrightarrow o_3 \\ \sim \\ \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 5 \\ -3 & 5 & -2 & 7 \\ 3 & 2 & 4 & 4 \end{bmatrix} \begin{array}{c} s_2 + 3s_1 \\ \sim \\ s_3 - 3s_1 \end{array}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 5 \\ 0 & 14 & 4 & 22 \\ 0 & -7 & -2 & -11 \end{bmatrix} \begin{array}{c} o_2 - 3o_1 \\ \sim \\ o_3 - 2_1 \\ o_4 - 5o_1 \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 14 & 4 & 22 \\ 0 & -7 & -2 & -11 \end{bmatrix} \begin{array}{c} s_2 - 2s_3 \\ \sim \end{array}$$

Példa

4. példa Számítsuk ki az $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & 5 \\ -2 & 5 & -3 & 7 \\ 4 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$ mátrix rangját.

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & 5 \\ -2 & 5 & -3 & 7 \\ 4 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{matrix} o_1 \leftrightarrow o_3 \\ \sim \\ \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 5 \\ -3 & 5 & -2 & 7 \\ 3 & 2 & 4 & 4 \end{bmatrix} \begin{matrix} s_2 + 3s_1 \\ \sim \\ s_3 - 3s_1 \end{matrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 5 \\ 0 & 14 & 4 & 22 \\ 0 & -7 & -2 & -11 \end{bmatrix} \begin{matrix} o_2 - 3o_1 \\ \sim \\ o_3 - 2_1 \\ o_4 - 5o_1 \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 14 & 4 & 22 \\ 0 & -7 & -2 & -11 \end{bmatrix} \begin{matrix} s_2 - 2s_3 \\ \sim \\ \end{matrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & -2 & -11 \end{bmatrix}$$

Példa

4. példa Számítsuk ki az $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & 5 \\ -2 & 5 & -3 & 7 \\ 4 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$ mátrix rangját.

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & 5 \\ -2 & 5 & -3 & 7 \\ 4 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} \overset{o_1 \leftrightarrow o_3}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 5 \\ -3 & 5 & -2 & 7 \\ 3 & 2 & 4 & 4 \end{bmatrix} \begin{matrix} s_2 + 3s_1 \\ \sim \\ s_3 - 3s_1 \end{matrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 5 \\ 0 & 14 & 4 & 22 \\ 0 & -7 & -2 & -11 \end{bmatrix} \begin{matrix} o_2 - 3o_1 \\ \sim \\ o_3 - 2_1 \\ o_4 - 5o_1 \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 14 & 4 & 22 \\ 0 & -7 & -2 & -11 \end{bmatrix} \begin{matrix} s_2 - 2s_3 \\ \sim \end{matrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & -2 & -11 \end{bmatrix} \begin{matrix} \frac{o_2}{-7} \\ \sim \end{matrix}$$

Példa

4. példa Számítsuk ki az $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & 5 \\ -2 & 5 & -3 & 7 \\ 4 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$ mátrix rangját.

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & 5 \\ -2 & 5 & -3 & 7 \\ 4 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} \overset{o_1 \leftrightarrow o_3}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 5 \\ -3 & 5 & -2 & 7 \\ 3 & 2 & 4 & 4 \end{bmatrix} \begin{array}{c} s_2 + 3s_1 \\ \sim \\ s_3 - 3s_1 \end{array}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 5 \\ 0 & 14 & 4 & 22 \\ 0 & -7 & -2 & -11 \end{bmatrix} \begin{array}{c} o_2 - 3o_1 \\ \sim \\ o_3 - 2_1 \\ o_4 - 5o_1 \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 14 & 4 & 22 \\ 0 & -7 & -2 & -11 \end{bmatrix} \overset{s_2 - 2s_3}{\sim}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & -2 & -11 \end{bmatrix} \overset{\frac{o_2}{-7}}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -11 \end{bmatrix}$$

Példa

4. példa Számítsuk ki az $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & 5 \\ -2 & 5 & -3 & 7 \\ 4 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$ mátrix rangját.

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & 5 \\ -2 & 5 & -3 & 7 \\ 4 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{matrix} o_1 \leftrightarrow o_3 \\ \sim \\ \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 5 \\ -3 & 5 & -2 & 7 \\ 3 & 2 & 4 & 4 \end{bmatrix} \begin{matrix} s_2 + 3s_1 \\ \sim \\ s_3 - 3s_1 \end{matrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 5 \\ 0 & 14 & 4 & 22 \\ 0 & -7 & -2 & -11 \end{bmatrix} \begin{matrix} o_2 - 3o_1 \\ \sim \\ o_3 - 2_1 \\ o_4 - 5o_1 \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 14 & 4 & 22 \\ 0 & -7 & -2 & -11 \end{bmatrix} \begin{matrix} s_2 - 2s_3 \\ \sim \\ \end{matrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & -2 & -11 \end{bmatrix} \begin{matrix} \frac{o_2}{-7} \\ \sim \\ \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -11 \end{bmatrix} \begin{matrix} o_3 + 2o_2 \\ \sim \\ o_4 + 11o_2 \end{matrix}$$

Példa

4. példa Számítsuk ki az $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & 5 \\ -2 & 5 & -3 & 7 \\ 4 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$ mátrix rangját.

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & 5 \\ -2 & 5 & -3 & 7 \\ 4 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} \overset{o_1 \leftrightarrow o_3}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 5 \\ -3 & 5 & -2 & 7 \\ 3 & 2 & 4 & 4 \end{bmatrix} \underset{s_3 - 3s_1}{\overset{s_2 + 3s_1}{\sim}}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 5 \\ 0 & 14 & 4 & 22 \\ 0 & -7 & -2 & -11 \end{bmatrix} \underset{\substack{o_3 - 2_1 \\ o_4 - 5o_1}}{\overset{o_2 - 3o_1}{\sim}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 14 & 4 & 22 \\ 0 & -7 & -2 & -11 \end{bmatrix} \overset{s_2 - 2s_3}{\sim}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & -2 & -11 \end{bmatrix} \overset{\frac{o_2}{-7}}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -11 \end{bmatrix} \underset{o_4 + 11o_2}{\overset{o_3 + 2o_2}{\sim}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Példa

4. példa Számítsuk ki az $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & 5 \\ -2 & 5 & -3 & 7 \\ 4 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$ mátrix rangját.

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & 5 \\ -2 & 5 & -3 & 7 \\ 4 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} \overset{o_1 \leftrightarrow o_3}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 5 \\ -3 & 5 & -2 & 7 \\ 3 & 2 & 4 & 4 \end{bmatrix} \underset{s_3 - 3s_1}{\overset{s_2 + 3s_1}{\sim}}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 5 \\ 0 & 14 & 4 & 22 \\ 0 & -7 & -2 & -11 \end{bmatrix} \underset{\substack{o_3 - 2_1 \\ o_4 - 5o_1}}{\overset{o_2 - 3o_1}{\sim}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 14 & 4 & 22 \\ 0 & -7 & -2 & -11 \end{bmatrix} \overset{s_2 - 2s_3}{\sim}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & -2 & -11 \end{bmatrix} \overset{\frac{o_2}{-7}}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -11 \end{bmatrix} \underset{o_4 + 11o_2}{\overset{o_3 + 2o_2}{\sim}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Tehát az A mátrix rangja 2. (A 4 oszlopvektor egy síkban van!)