Numerikus sorok

Matematika A2 műszaki menedzser

2020 tavasz

Definíciók

Definíció

Legyen a_n egy sorozat, ekkor az $s_n := \sum_{i=1}^{n} a_i = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ *sorozatot részletösszeg-sorozatnak nevezzük.*

Definíciók

Definíció

Legyen a_n egy sorozat, ekkor az $s_n := \sum_{i=1}^{n} a_i = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ sorozatot részletösszeg-sorozatnak nevezzük.

Definíció

Az a_n sorozathoz tartozó numerikus sornak nevezzük a $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ összeget.

Definíciók

Definíció

Legyen a_n egy sorozat, ekkor az $s_n := \sum_{i=1}^{n} a_i = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ sorozatot részletösszeg-sorozatnak nevezzük.

Definíció

Az a_n sorozathoz tartozó numerikus sornak nevezzük a $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ összeget.

Definíció

A $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ sor konvergens, ha a hozzá tartozó s_n részletösszeg-sorozat konvergens és a határértéke lesz a sor összege. A sor divergens, ha nem konvergens.

Példa

1. példa Állapítsuk meg az $a_n := \dfrac{1}{2^n}$ részletösszeg-sorozatát és döntsük el, hogy a $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i$ sor konvergens-e.

Példa

1. példa Állapítsuk meg az $a_n := \dfrac{1}{2^n}$ részletösszeg-sorozatát és döntsük el, hogy a $\displaystyle\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ sor konvergens-e.

Az első pár tag:

n	a_n	s_n
1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
2	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$
3	$\frac{1}{8}$	$\frac{7}{8}$
4	$\frac{1}{16}$	$\frac{15}{16}$
n	$\frac{1}{2^n}$	$1 - \frac{1}{2^n}$

Tehát a részletöszeg sorozat $s_n = 1 - \frac{1}{2^n}$

Példa

1. példa Állapítsuk meg az $a_n := \dfrac{1}{2^n}$ részletösszeg-sorozatát és döntsük el, hogy a $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i$ sor konvergens-e.

Az első pár tag:

n	a_n	s_n
1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
2	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$
3	$\frac{1}{8}$	$\frac{7}{8}$
4	$\frac{1}{16}$	$\frac{15}{16}$
n	$\frac{1}{2^n}$	$1 - \frac{1}{2^n}$

Tehát a részletöszeg sorozat $s_n = 1 - \frac{1}{2^n}$, ami konvergens, mert

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} 1 - \frac{1}{2^n} = 1,$$

tehát a $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \dfrac{1}{2^i}$ sor konvergens és $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \dfrac{1}{2^i} = 1.$

Példa

1. példa Állapítsuk meg az $a_n := \frac{1}{2^n}$ részletösszeg-sorozatát és döntsük el, hogy a $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ sor konvergens-e.

Az első pár tag:

n	a_n	s_n
1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
2	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$
3	$\frac{1}{8}$	$\frac{7}{8}$
4	$\frac{1}{16}$	$\frac{15}{16}$
n	$\frac{1}{2^n}$	$1-\frac{1}{2^n}$

Tehát a részletöszeg sorozat $s_n = 1 - \frac{1}{2^n}$, ami konvergens, mert

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} 1 - \frac{1}{2^n} = 1,$$

tehát a $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i}$ sor konvergens és $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} = 1$.

Gondolhatunk arra, hogy egy egész tortának csak a felét esszük meg, aztán a maradék felét, aztán annak a felét és így tovább.

Mértani/Geometriai sor

Emlékeztető:

- Mértani sorozat: $a_n = a_0 \cdot q^n$, ahol a_0 a kiindulási elem és q a kvóciens.

Mértani/Geometriai sor

Emlékeztető:

- Mértani sorozat: $a_n = a_0 \cdot q^n$, ahol a_0 a kiindulási elem és q a kvóciens.
- Mértani sorozat összegképlete: $s_n = a_0 \cdot \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$
  Ez úgy jön ki, hogy $s_n = a_0 + a_0 \cdot q + \cdots + a_0 \cdot q^n$ és $s_n \cdot q = a_0 \cdot q + a_0 \cdot q^2 + \cdots + a_0 \cdot q^{n+1}$ és ha kivonjuk egymásból a két egyenletet, akkor majdnem minden kiesik: $s_n - s_n \cdot q = s_n(1 - q) = a_0 - a_0 \cdot q^{n+1}$, amiből $(1 - q)$-val való osztás után adódik a formula. Ha $q = 1$, akkor $s_n = (n + 1) \cdot a_0$.

Mértani/Geometriai sor

Emlékeztető:

- Mértani sorozat: $a_n = a_0 \cdot q^n$, ahol a_0 a kiindulási elem és q a kvóciens.
- Mértani sorozat összegképlete: $s_n = a_0 \cdot \dfrac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$
  Ez úgy jön ki, hogy $s_n = a_0 + a_0 \cdot q + \cdots + a_0 \cdot q^n$ és $s_n \cdot q = a_0 \cdot q + a_0 \cdot q^2 + \cdots + a_0 \cdot q^{n+1}$ és ha kivonjuk egymásból a két egyenletet, akkor majdnem minden kiesik: $s_n - s_n \cdot q = s_n(1 - q) = a_0 - a_0 \cdot q^{n+1}$, amiből $(1 - q)$-val való osztás után adódik a formula. Ha $q = 1$, akkor $s_n = (n + 1) \cdot a_0$.

Ha tekintjük az a_0 kezdeti értékű és $q \neq 1$ kvóciensű mértani sort ($q = 1$ esetén $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = \pm\infty$), akkor ez pontosan akkor lesz konvergens, ha az összegképletének számlálójában lévő q^{n+1} exponenciális kifejezésnek véges a határértéke, azaz ha $|q| < 1$. Tehát $\sum\limits_{i=0}^{\infty} a \cdot q^i = \dfrac{a}{1 - q}$, ha $|q| < 1$.

Példa

2. példa Számítsuk ki a $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2^{3n+2}}{3^{2n-1}}$ sor összegét, ha az véges.

Példa

2\. példa Számítsuk ki a $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2^{3n+2}}{3^{2n-1}}$ sor összegét, ha az véges.

A geometriai sor összegképletét szeretnénk alkalmazni, ehhez olyan alakúra kell hoznunk az összegezendő kifejezést.

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2^{3n+2}}{3^{2n-1}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{3(n+2)+2}}{3^{2(n+2)-1}} =$$

Első lépésben a szummának 0-tól kel indulnia, ezért átindexeljük.

Példa

2. példa Számítsuk ki a $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2^{3n+2}}{3^{2n-1}}$ sor összegét, ha az véges.

A geometriai sor összegképletét szeretnénk alkalmazni, ehhez olyan alakúra kell hoznunk az összegezendő kifejezést.

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2^{3n+2}}{3^{2n-1}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{3(n+2)+2}}{3^{2(n+2)-1}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{3n+8}}{3^{2n+3}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{8}}{3^{3}} \cdot \frac{8^n}{9^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{256}{27} \cdot \left(\frac{8}{9}\right)^n$$

Első lépésben a szummának 0-tól kel indulnia, ezért átindexeljük. Majd a hatványozás azonosságait alkalmazzuk.

Példa

2. példa Számítsuk ki a $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2^{3n+2}}{3^{2n-1}}$ sor összegét, ha az véges.

A geometriai sor összegképletét szeretnénk alkalmazni, ehhez olyan alakúra kell hoznunk az összegezendő kifejezést.

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2^{3n+2}}{3^{2n-1}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{3(n+2)+2}}{3^{2(n+2)-1}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{3n+8}}{3^{2n+3}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^8}{3^3} \cdot \frac{8^n}{9^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{256}{27} \cdot \left(\frac{8}{9}\right)^n$$

Első lépésben a szummának 0-tól kel indulnia, ezért átindexeljük. Majd a hatványozás azonosságait alkalmazzuk. Végül alkalmazzuk a megometriai sor összegképletét $a = \frac{256}{27}$ és $q = \frac{8}{9} < 1$-re:

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2^{3n+2}}{3^{2n-1}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{256}{27} \cdot \left(\frac{8}{9}\right)^n = \frac{\frac{256}{27}}{1-\frac{8}{9}} = \frac{\frac{256}{27}}{\frac{1}{9}} = \frac{256}{3}$$

Teleszkópikus összegek

3. példa Számítsuk ki a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ sor összegét.

Teleszkópikus összegek

3. példa Számítsuk ki a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ sor összegét.

Bontsuk parciális törtekre az $\frac{1}{n(n+1)}$ törtet:

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{A}{n} + \frac{B}{n+1} = \frac{A(n+1)+Bn}{n(n+1)} = \frac{(A+B)n+A}{n(n+1)}$$

Teleszkópikus összegek

3. példa Számítsuk ki a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ sor összegét.

Bontsuk parciális törtekre az $\frac{1}{n(n+1)}$ törtet:

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{A}{n} + \frac{B}{n+1} = \frac{A(n+1)+Bn}{n(n+1)} = \frac{(A+B)n+A}{n(n+1)} \Rightarrow A = 1,$$

Teleszkópikus összegek

3. példa Számítsuk ki a $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ sor összegét.

Bontsuk parciális törtekre az $\dfrac{1}{n(n+1)}$ törtet:

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{A}{n} + \frac{B}{n+1} = \frac{A(n+1)+Bn}{n(n+1)} = \frac{(A+B)n+A}{n(n+1)} \Rightarrow A=1, B=-1$$

Teleszkópikus összegek

3. példa Számítsuk ki a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ sor összegét.

Bontsuk parciális törtekre az $\frac{1}{n(n+1)}$ törtet:

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{A}{n} + \frac{B}{n+1} = \frac{A(n+1)+Bn}{n(n+1)} = \frac{(A+B)n+A}{n(n+1)} \Rightarrow A = 1, B = -1$$

A zárójeles kifejezésben lévő negatív előjelű rész mindig kiesik az utána jövő tag pozitív részével. Így csak az első tag pozitív és az utolsó tag negatív része marad bent az összegzésben, minden más összecsúszik, mint a teleszkóp.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left[\left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \right.$$

$$\left. \ldots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) \right] =$$

Teleszkópikus összegek

3. példa Számítsuk ki a $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ sor összegét.

Bontsuk parciális törtekre az $\dfrac{1}{n(n+1)}$ törtet:

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{A}{n} + \frac{B}{n+1} = \frac{A(n+1)+Bn}{n(n+1)} = \frac{(A+B)n+A}{n(n+1)} \Rightarrow A=1, B=-1$$

A zárójeles kifejezésben lévő negatív előjelű rész mindig kiesik az utána jövő tag pozitív részével. Így csak az első tag pozitív és az utolsó tag negatív része marad bent az összegzésben, minden más összecsúszik, mint a teleszkóp.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left[\left(1-\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right) + \right.$$

$$\left. \ldots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)\right] = \lim_{n\to\infty} 1 - \frac{1}{n+1} = 1.$$

Numerikus sor konvergenciájának szükséges feltétele

Néhány ritka eset (geometriai és teleszkópikus sorok) kivételével a konkrét összeg nem állapítható meg, azonban a konvergencia ténye kritériumok segítségével igen. Először nézzük a konvergencia egy szükséges feltételét:

Numerikus sor konvergenciájának szükséges feltétele

Néhány ritka eset (geometriai és teleszkópikus sorok) kivételével a konkrét összeg nem állapítható meg, azonban a konvergencia ténye kritériumok segítségével igen. Először nézzük a konvergencia egy szükséges feltételét:

Tétel

A $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *sor konvergenciájának szükséges feltétele, hogy* $\lim_{n\to\infty} a_n = 0.$

Nem bizonyítjuk, de az állítás hihető, mert ha egy sorozat nem 0-hoz, mondjuk 2-höz tartana, akkor végtelen sok 2-höz közeli számot adnánk össze, ami nem lehet véges. Így a sor konvergenciájának vizsgálatánál amolyan 0. lépés gyanánt érdemes megnézni az öszegezendő sorozat határértékét. Ha nem 0, akkor biztosan nem lehet konvergens az összeg, ha 0, akkor vizsgálódhatunk tovább.

Nemnegatív tagú sorok

Definíció

Nem negatív tagú sornak nevezzük a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *sort, ha minden* n*-re* $0 \leq a_n$.

Nemnegatív tagú sorok

Definíció

Nem negatív tagú sornak nevezzük a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *sort, ha minden n-re* $0 \leq a_n$.

Tétel

Ha a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *nem negatív tagú sor divergens, akkor összege* ∞.

Emiatt a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ nem negatív tagú sornál a konvergencia vagy divergencia helyett elég csak azt írnunk, hogy $\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty$, vagy $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \infty$.

Összehasonlító kritériumok

Tétel (Majoráns kritérium)

Legyen $0 \leq a_n \leq b_n$ *igaz minden* $n \in \mathbb{N}^+$*-ra. Ekkor ha* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *konvergens, akkor* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *is konvergens továbbá* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \leq \sum_{n=1}^{\infty} b_n$*.*

Összehasonlító kritériumok

Tétel (Majoráns kritérium)

Legyen $0 \le a_n \le b_n$ *igaz minden* $n \in \mathbb{N}^+$*-ra. Ekkor ha* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *konvergens, akkor* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *is konvergens továbbá* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \le \sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

Tétel (Minoráns kritérium)

Legyen $0 \le b_n \le a_n$ *igaz minden* $n \in \mathbb{N}^+$*-ra. Ekkor ha* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *divergens, akkor* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *is divergens.*

Példa

4. példa Vizsgáljuk meg a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ sor konvergenciáját.

Példa

4. példa Vizsgáljuk meg a $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ sor konvergenciáját.

Alkalmazzuk az alábbi becslést:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{8}+\frac{1}{9}+\ldots\frac{1}{16}+\ldots$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\geq 1+\frac{1}{2}+\underbrace{\frac{1}{4}+\frac{1}{4}}_{\frac{1}{2}}+\underbrace{\frac{1}{8}+\cdots+\frac{1}{8}}_{\frac{1}{2}}+\underbrace{\frac{1}{16}+\ldots\frac{1}{16}}_{\frac{1}{2}}+\ldots$$

Példa

4. példa Vizsgáljuk meg a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ sor konvergenciáját.

Alkalmazzuk az alábbi becslést:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \ldots \frac{1}{16} + \ldots$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \geq 1 + \frac{1}{2} + \underbrace{\frac{1}{4} + \frac{1}{4}}_{\frac{1}{2}} + \underbrace{\frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{8}}_{\frac{1}{2}} + \underbrace{\frac{1}{16} + \ldots \frac{1}{16}}_{\frac{1}{2}} + \ldots$$

Azt látjuk tehát, hogy a kisebb sorban is minden 2-hatványra jut egy $\frac{1}{2}$, így ez a sor nem lehet véges. Alkalmazva a minoráns kritériumot látjuk, hogy a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ úgynevezett harmonikus sor divergens, azaz $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty$.

Példa

5. példa Vizsgáljuk meg a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ sor konvergenciáját.

Példa

5. példa Vizsgáljuk meg a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ sor konvergenciáját.

Alkalmazzuk az alábbi becslést:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 1 + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

Az öszegezendő kifejezésről leválasztjuk az első tagot,

Példa

5. példa Vizsgáljuk meg a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ sor konvergenciáját.

Alkalmazzuk az alábbi becslést:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 1 + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2} \leq 1 + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(n-1)}$$

Az öszegezendő kifejezésről leválasztjuk az első tagot, a többit pedig a nevező csökkentésével ($n \to (n-1)$) növeljük.

Példa

5. példa Vizsgáljuk meg a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ sor konvergenciáját.

Alkalmazzuk az alábbi becslést:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 1 + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2} \leq 1 + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(n-1)} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)n}$$

Az öszegezendő kifejezésről leválasztjuk az első tagot, a többit pedig a nevező csökkentésével ($n \to (n-1)$) növeljük. Átindexelve a sort, a teleszkópikus összegnél látott példát kapjuk,

Példa

5. példa Vizsgáljuk meg a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ sor konvergenciáját.

Alkalmazzuk az alábbi becslést:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 1 + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2} \leq 1 + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(n-1)} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)n} = 1 + 1 = 2$$

Az öszegezendő kifejezésről leválasztjuk az első tagot, a többit pedig a nevező csökkentésével $(n \to (n-1))$ növeljük. Átindexelve a sort, a teleszkópikus összegnél látott példát kapjuk, ami összegezhető és 1 volt az összeg. Alkalmazhatjuk tehát a majoráns kritériumot és ezért $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \leq 2 < \infty$ konvergens.

Példa

5. példa Vizsgáljuk meg a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ sor konvergenciáját.

Alkalmazzuk az alábbi becslést:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 1 + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2} \leq 1 + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(n-1)} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)n} = 1 + 1 = 2$$

Az öszegezendő kifejezésről leválasztjuk az első tagot, a többit pedig a nevező csökkentésével $(n \to (n-1))$ növeljük. Átindexelve a sort, a teleszkópikus összegnél látott példát kapjuk, ami összegezhető és 1 volt az összeg. Alkalmazhatjuk tehát a majoráns kritériumot és ezért

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \leq 2 < \infty$ konvergens. Valójában $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$!

Hiperharmonikus sorok

Definíció

A $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$ *alakú sorokat hiperharmonikus soroknak nevezzük.*

Az előző két példa során megvizsgáltuk az $\alpha = 1$ és $\alpha = 2$ eseteket és azt láttuk, hogy $\alpha = 1$-re divergens, de $\alpha = 2$-re már konvergens.

Hiperharmonikus sorok

Definíció

A $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ *alakú sorokat hiperharmonikus soroknak nevezzük.*

Az előző két példa során megvizsgáltuk az $\alpha = 1$ és $\alpha = 2$ eseteket és azt láttuk, hogy $\alpha = 1$-re divergens, de $\alpha = 2$-re már konvergens.

Kérdés: Milyen α értékre lesz a hiperharmónius sor konvergens?

Hiperharmonikus sorok

Definíció

A $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ *alakú sorokat hiperharmonikus soroknak nevezzük.*

Az előző két példa során megvizsgáltuk az $\alpha = 1$ és $\alpha = 2$ eseteket és azt láttuk, hogy $\alpha = 1$-re divergens, de $\alpha = 2$-re már konvergens.
Kérdés: Milyen α értékre lesz a hiperharmónius sor konvergens?
Az összehasnlító kritériumok miatt tudjuk, hogy minden $\alpha < 1$-re divergens és $\alpha > 2$-re konvergens, tehát a választópont valahol a kettő között van, de hol?

Hiperharmonikus sorok

Definíció

A $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ *alakú sorokat hiperharmonikus soroknak nevezzük.*

Az előző két példa során megvizsgáltuk az $\alpha = 1$ és $\alpha = 2$ eseteket és azt láttuk, hogy $\alpha = 1$-re divergens, de $\alpha = 2$-re már konvergens.
Kérdés: Milyen α értékre lesz a hiperharmónius sor konvergens?
Az összehasnlító kritériumok miatt tudjuk, hogy minden $\alpha < 1$-re divergens és $\alpha > 2$-re konvergens, tehát a választópont valahol a kettő között van, de hol?

Tétel

A $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ *hiperharmonikus sor pontosan akkor konvergens, ha* $\alpha > 1$.

Példa

6. példa Vizsgáljuk meg a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+3}{n^2+n}$ sor konvergenciáját.

Példa

6. példa Vizsgáljuk meg a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+3}{n^2+n}$ sor konvergenciáját.

Vizsgáljuk meg a nagyságrendeket. A számláló elsőfokú, nevező másodfokú, tehát egyszerűsítés után ez egy olyan sor lenne, melynek számlálója konstans, nevezője pedig elsőfokú. És az előbbi tétel miatt azt az a sejtésünk, hogy ez a sor

Példa

6. példa Vizsgáljuk meg a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+3}{n^2+n}$ sor konvergenciáját.

Vizsgáljuk meg a nagyságrendeket. A számláló elsőfokú, nevező másodfokú, tehát egyszerűsítés után ez egy olyan sor lenne, melynek számlálója konstans, nevezője pedig elsőfokú. És az előbbi tétel miatt azt az a sejtésünk, hogy ez a sor divergens. Ennek bizonyításához pedig

Példa

6. példa Vizsgáljuk meg a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+3}{n^2+n}$ sor konvergenciáját.

Vizsgáljuk meg a nagyságrendeket. A számláló elsőfokú, nevező másodfokú, tehát egyszerűsítés után ez egy olyan sor lenne, melynek számlálója konstans, nevezője pedig elsőfokú. És az előbbi tétel miatt azt az a sejtésünk, hogy ez a sor divergens. Ennek bizonyításához pedig minoráns kritériumot használunk. A becsléseiknél mindig oda kell figyelni, hogy a tört számlálójának és nevezőjének nagyságrendjét sose módosítsuk:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+3}{n^2+n} \geq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2+n} \geq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2+n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n} = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty.$$

Ahol az első egyenlőtlenségnél a számlálót csökkentettük, a másodiknál pedig a nevezőt növeltük. Mindkét esetben csökkent az összegezendő törtek értéke és még így is végtelen az összeg, tehát eredetileg sem lehetett véges.

Példa

7. példa Vizsgáljuk meg a $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-1}{n^3-n^2+1}$ sor konvergenciáját.

Példa

7. példa Vizsgáljuk meg a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-1}{n^3-n^2+1}$ sor konvergenciáját.

Vizsgáljuk meg a nagyságrendeket. A számláló elsőfokú, nevező harmadfokú, tehát egyszerűsítés után ez egy olyan sor lenne, melynek számlálója konstans, nevezője pedig másodfokú. És az előbbi tétel miatt azt az a sejtésünk, hogy ez a sor

Példa

7. példa Vizsgáljuk meg a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-1}{n^3-n^2+1}$ sor konvergenciáját.

Vizsgáljuk meg a nagyságrendeket. A számláló elsőfokú, nevező harmadfokú, tehát egyszerűsítés után ez egy olyan sor lenne, melynek számlálója konstans, nevezője pedig másodfokú. És az előbbi tétel miatt azt az a sejtésünk, hogy ez a sor konvergens. Ennek bizonyításához pedig

Példa

7. példa Vizsgáljuk meg a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-1}{n^3-n^2+1}$ sor konvergenciáját.

Vizsgáljuk meg a nagyságrendeket. A számláló elsőfokú, nevező harmadfokú, tehát egyszerűsítés után ez egy olyan sor lenne, melynek számlálója konstans, nevezője pedig másodfokú. És az előbbi tétel miatt azt az a sejtésünk, hogy ez a sor konvergens. Ennek bizonyításához pedig majoráns kritériumot használunk. A becsléseiknél mindig oda kell figyelni, hogy a tört számlálójának és nevezőjének nagyságrendjét sose módosítsuk:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-1}{n^3-n^2+1} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^3-n^2+1} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^3-\frac{1}{2}n^3} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{n^3} = 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty.$$

Ahol az első egyenlőtlenségnél a számlálót növeltük, a másodiknál pedig a nevezőt csökkentettük. Mindkét esetben nőt az összegezendő törtek értéke és még így is véges az összeg, tehát eredetileg sem lehetett végtelen.

Műveletek konvergens numerikus sorokkal

Tétel

Legyen $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *és* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *konvergens sorok, továbbá* $c \in \mathbb{R}$. *Ekkor*

- $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$ *konvergens, továbbá* $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n$,
- $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n - b_n)$ *konvergens, továbbá* $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n - b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n - \sum_{n=1}^{\infty} b_n$,
- $\sum_{n=1}^{\infty} (c \cdot a_n)$ *konvergens, továbbá* $\sum_{n=1}^{\infty} (c \cdot a_n) = c \sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Gyökkritérium

Tétel

Legyen $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *nemnegatív tagú sor. Ekkor ha*

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = q \begin{cases} < 1 & \Rightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty \\ = 1 & \Rightarrow \quad \text{semmi} \\ > 1 & \Rightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \infty \end{cases}$$

Gyökkritérium

Tétel

Legyen $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *nemnegatív tagú sor. Ekkor ha*

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = q \begin{cases} < 1 & \Rightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty \\ = 1 & \Rightarrow \quad \text{semmi} \\ > 1 & \Rightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \infty \end{cases}$$

Megjegyzés: Ha a_n nem nemnegatív tagú sor, akkor $|a_n|$-et kell vizsgálni!

Hányados kritérium

Tétel

Legyen $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *nemnegatív tagú sor. Ekkor ha*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q \begin{cases} < 1 & \Rightarrow & \sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty \\ = 1 & \Rightarrow & \text{semmi} \\ > 1 & \Rightarrow & \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \infty \end{cases}$$

Hányados kritérium

Tétel

Legyen $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *nemnegatív tagú sor. Ekkor ha*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q \begin{cases} < 1 & \Rightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty \\ = 1 & \Rightarrow \quad \text{semmi} \\ > 1 & \Rightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \infty \end{cases}$$

Megjegyzés: Ha a_n nem nemnegatív tagú sor, akkor $|a_n|$-et kell vizsgálni!

Gyök-és Hányados kritérium

A két tétel szerkezete nagyon hasonló, olyannyira, hogy a bennük szereplő q ugyanaz a szám. Ebből következik, hogy a két kritérium egyszerre működik ($q \neq 1$), vagy nem működik ($q = 1$). Ha egy adott feladatnál q értékét az egyik kritériummal 1-nek állapítottuk meg, akkor nem érdemes a másikkal próbálkozni, mert az is 1-et fog adni (ilyenkor más típusú kritériumot kell majd használnunk, pl. minoráns, majoráns). Ezért csupán kényelmi kérdés, hogy egy konkrét feladatnál melyik kritériumot érdemes használni. Ökölszabály például, hogy ha faktoriális szerepel a sorban, akkor a hányados kritériumot érdemes használni, mert a gyökkel nem működik.

Példák

8. példa Vizsgáljuk meg a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$ sor konvergenciáját.

Alkalmazzuk a gyökkritériumot:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n}{2^n}} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n}}{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{2^n}} = \frac{1}{2} = q < 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n} < \infty.$$

Példák

8. példa Vizsgáljuk meg a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$ sor konvergenciáját.

Alkalmazzuk a gyökkritériumot:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n}{2^n}} = \frac{\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n}}{\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{2^n}} = \frac{1}{2} = q < 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n} < \infty.$$

9. példa Vizsgáljuk meg a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n!}$ sor konvergenciáját.

Példák

8. példa Vizsgáljuk meg a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$ sor konvergenciáját.

Alkalmazzuk a gyökkritériumot:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n}{2^n}} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n}}{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{2^n}} = \frac{1}{2} = q < 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n} < \infty.$$

9. példa Vizsgáljuk meg a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n!}$ sor konvergenciáját.

Alkalmazzuk a hányados kritériumot:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{3^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{3^n}{n!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{3^{n+1} n!}{3^n (n+1)!} = \lim_{n\to\infty} \frac{3 \cdot 3^n n!}{3^n (n+1) n!} =$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3}{n+1} = 0 = q < 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n!} < \infty.$$

Leibniz-sor

Definíció

A $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *sor Leibniz-sor, vagy Leibniz típusú sor, ha*

- a_n *sorozat váltakozó előjelű, azaz alternáló*
- $|a_n|$ *monoton csökkenő sorozat*
- $\lim_{n\to\infty} |a_n| = 0$

Leibniz-sor

Definíció

A $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *sor Leibniz-sor, vagy Leibniz típusú sor, ha*

- a_n *sorozat váltakozó előjelű, azaz alternáló*
- $|a_n|$ *monoton csökkenő sorozat*
- $\lim_{n\to\infty} |a_n| = 0$

Tétel

Minden Leibniz-sor konvergens.

Leibniz-sor

Definíció

A $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *sor Leibniz-sor, vagy Leibniz típusú sor, ha*

- a_n *sorozat váltakozó előjelű, azaz alternáló*
- $|a_n|$ *monoton csökkenő sorozat*
- $\lim_{n\to\infty} |a_n| = 0$

Tétel

Minden Leibniz-sor konvergens.

A Leibniz-sorok akkor kerülnek elő, ha a sorozatban van valami, ami miatt folyamatosan változik az előjel (tipikusan van benne például egy $(-1)^n$). Ilyenkor gyanakodhatunk arra, hogy egy sor Leibniz tipusú és ellenőrizzük a definícióban szereplő másik két feltételt.

Példa

10. példa Vizsgáljuk meg a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ sor konvergenciáját.

Példa

10. példa Vizsgáljuk meg a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ sor konvergenciáját.

Mivel az összegezni kívánt sorozat váltakozó előjelű, ezért megvizsgáljuk, hogy Leibniz-sor-e.

Példa

10. példa Vizsgáljuk meg a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ sor konvergenciáját.

Mivel az összegezni kívánt sorozat váltakozó előjelű, ezért megvizsgáljuk, hogy Leibniz-sor-e. Ehhez azt kell belátnunk, hogy abszolút értékben monoton csökken és 0-hoz tart. $|a_n| = \frac{1}{n}$, ami nullához tart és monoton csökken is, tehát $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ sor konvergens.

Példa

10. példa Vizsgáljuk meg a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ sor konvergenciáját.

Mivel az összegezni kívánt sorozat váltakozó előjelű, ezért megvizsgáljuk, hogy Leibniz-sor-e. Ehhez azt kell belátnunk, hogy abszolút értékben monoton csökken és 0-hoz tart. $|a_n| = \frac{1}{n}$, ami nullához tart és monoton csökken is, tehát $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ sor konvergens.

11. példa Vizsgáljuk meg a $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n+3}{n-1}$ sor konvergenciáját.

Példa

10. példa Vizsgáljuk meg a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ sor konvergenciáját.

Mivel az összegezni kívánt sorozat váltakozó előjelű, ezért megvizsgáljuk, hogy Leibniz-sor-e. Ehhez azt kell belátnunk, hogy abszolút értékben monoton csökken és 0-hoz tart. $|a_n| = \frac{1}{n}$, ami nullához tart és monoton csökken is, tehát $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ sor konvergens.

11. példa Vizsgáljuk meg a $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n+3}{n-1}$ sor konvergenciáját.

Megint látjuk, hogy a sorozat alternál, így vizsgáljuk az abszolút értékét: $|a_n| = \frac{n+3}{n-1}$, amire $\lim_{n\to\infty} |a_n| = \lim_{n\to\infty} \frac{n+3}{n-1} = 1 \neq 0$, tehát nem teljesül a Leibniz-sor kritériumai, ezért $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n+3}{n-1}$ sor nem lesz konvergens.

Abszolút-és feltételes konvergencia

Definíció

A $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *sor* ***abszolút konvergens***, *ha* $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ *konvergens.*

Abszolút-és feltételes konvergencia

Definíció

A $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *sor* *abszolút konvergens*, *ha* $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ *konvergens.*

Tétel

Minden abszolút konvergens sor konvergens.

Abszolút-és feltételes konvergencia

Definíció

A $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *sor* *abszolút konvergens*, *ha* $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ *konvergens.*

Tétel

Minden abszolút konvergens sor konvergens.

Definíció

A $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *sor* *feltételesen konvergens*, *ha konvergens, de nem abszolút konvergens.*

Abszolút-és feltételes konvergencia

Definíció

A $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *sor* *abszolút konvergens*, *ha* $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ *konvergens.*

Tétel

Minden abszolút konvergens sor konvergens.

Definíció

A $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *sor* *feltételesen konvergens*, *ha konvergens, de nem abszolút konvergens.*

Például a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ sor konvergens, de nem abszolút konvergens, ezért feltételesen konvergen.