# Sorozatok

Matematika A2 műszaki menedzser

2020 tavasz

# Definíció

## Definíció

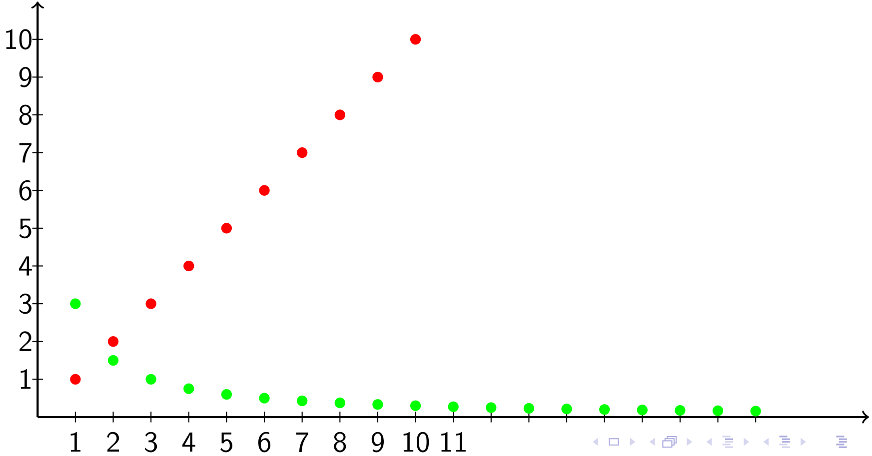
*Az $a : \mathbb{N}^+ \mapsto \mathbb{R}$ függvényt valós számsorozatnak (röviden sorozatnak) nevezünk.*

Egy tetszőleges $n \in \mathbb{N}^+$ esetén az $a(n)$ jelölés helyett az $a_n$ jelölést használjuk, és azt mondjuk, hogy $a_n$ a sorozat $n$-edik eleme. Ha egyszerre több sorozatról beszélünk, akkor csak az egyiket jelölhetjük $a$-el, a többit $b$, $c$ betűkkel. Láttuk, hogy $a_n$ az $a$ sorozat $n$-edik elemét jelöli, de ha ez nem okoz félreértést, az egész sorozatot is jelölheti. Néha a sorozat értelmezési tartománya nem a teljes $\mathbb{N}$, hanem valamilyen $k$ értéktől kezdődik pl $\{8, 9, 10, \dots\}$. Ezt nem mindig jelezzük külön.

# Sorozat szemléltetése

Egy sorozat első néhány eleme sosem határozza meg a sorozatot, de jól szemléltetheti azt.

1. példa Ábrázoljuk az $a_n = n$ és $b_n = \frac{3}{n}$ sorozat első 10 tagját.



# Sorozat korlátossága

## Definíció

*Azt mondjuk, hogy az $a_n$ sorozat*

- *felülről korlátos, ha $\exists K \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N} : a_n \leq K$*
- *alulról korlátos, ha $\exists k \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N} : a_n \geq k$*
- *korlátos, ha alulról és felülről is korlátos.*
- *legkisebb felső korlátja $L$, ha $\forall n : a_n \leq L$, de $\forall C < L, \exists n : a_n > C$*
- *legnagyobb alsó korlátja $l$, ha $\forall n : a_n \geq l$, de $\forall c > l, \exists n : a_n < c$*

Az előző példában lévő $a_n$ sorozat alulról korlátos, de felülrol nem, ezért nem korlátos.
Az $b_n$-nek a 3 felso korlát, és mivel a sorozat minden eleme pozitív a 0 alsó korlát, tehát $b_n$ korlátos.
Nem minden esetben érdemes megkeresni a legkisebb felső és legnagyobb alsó korlátot. Nekünk általában csak az kell, hogy egyet találjunk.

# Sorozat monotonitása

## Definíció

*Azt mondjuk, hogy az $a_n$ sorozat*

- *monoton növő, ha* $\forall n \in \mathbb{N} : a_n \leq a_{n+1}$
- *monoton csökkenő, ha* $\forall n \in \mathbb{N} : a_n \geq a_{n+1}$
- *szigorúan monoton növő, ha* $\forall n \in \mathbb{N} : a_n < a_{n+1}$
- *szigorúan monoton csökkenő, ha* $\forall n \in \mathbb{N} : a_n > a_{n+1}$

Az előző példában szereplő $a_n$ szigorúan monoton növő, $b_n$ pedig szigorúan monoton csökkenő.
A monotonitásnál mindig két szomszédos elem kapcsolatát kell tehát megvizsgálni. Ezt feladattól függően több módon is megtehetjük:

$$a_n \lesseqgtr a_{n+1} \Leftrightarrow a_n - x_{n+1} \lesseqgtr 0 \Leftrightarrow \frac{a_n}{a_{n+1}} \lesseqgtr 1 (a_n \cdot a_{n+1} > 0)$$

# Sorozat határértéke

## Definíció

*Az $a_n$ sorozat konvergens és határértéke $A \in \mathbb{R}$, ha*

$$\forall \epsilon > 0, \exists N(\epsilon) \in \mathbb{N}, \forall n > N(\epsilon) : |a_n - A| < \epsilon$$

*Jelölés:* $\lim_{n\to\infty} a_n = A$, $\lim a_n = A$ *vagy* $a_n \to A$

# Sorozat határértéke

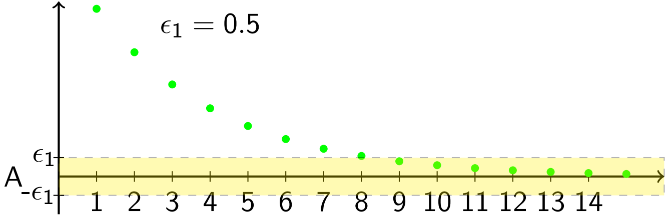
## Definíció

*Az $a_n$ sorozat konvergens és határértéke $A \in \mathbb{R}$, ha*

$$\forall \epsilon > 0, \exists N(\epsilon) \in \mathbb{N}, \forall n > N(\epsilon) : |a_n - A| < \epsilon$$

*Jelölés:* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$, $\lim a_n = A$ *vagy* $a_n \to A$

Azaz minden pozitív $\epsilon$ számhoz tudunk találni egy küszöbindexet, hogy onnantól kezdve a sorozat és a határérték eltérése legfeljebb $\epsilon$.



# Sorozat határértéke

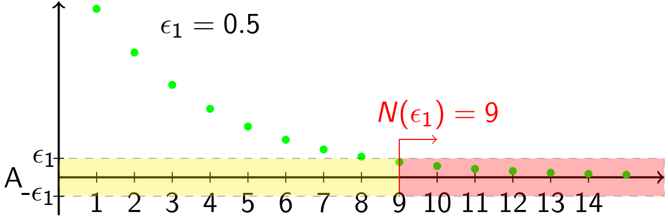
## Definíció

*Az $a_n$ sorozat konvergens és határértéke $A \in \mathbb{R}$, ha*

$$\forall \epsilon > 0, \exists N(\epsilon) \in \mathbb{N}, \forall n > N(\epsilon) : |a_n - A| < \epsilon$$

*Jelölés:* $\lim_{n\to\infty} a_n = A$, $\lim a_n = A$ *vagy* $a_n \to A$

Azaz minden pozitív $\epsilon$ számhoz tudunk találni egy küszöbindexet, hogy onnantól kezdve a sorozat és a határérték eltérése legfeljebb $\epsilon$.



# Sorozat határértéke

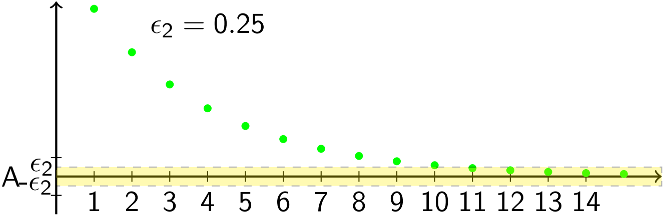
## Definíció

*Az $a_n$ sorozat konvergens és határértéke $A \in \mathbb{R}$, ha*

$$\forall \epsilon > 0, \exists N(\epsilon) \in \mathbb{N}, \forall n > N(\epsilon) : |a_n - A| < \epsilon$$

*Jelölés:* $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = A$, $\lim a_n = A$ *vagy* $a_n \to A$

Azaz minden pozitív $\epsilon$ számhoz tudunk találni egy küszöbindexet, hogy onnantól kezdve a sorozat és a határérték eltérése legfeljebb $\epsilon$.



# Sorozat határértéke

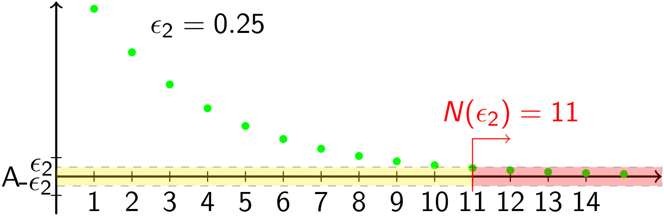
## Definíció

*Az $a_n$ sorozat konvergens és határértéke $A \in \mathbb{R}$, ha*

$$\forall \epsilon > 0, \exists N(\epsilon) \in \mathbb{N}, \forall n > N(\epsilon) : |a_n - A| < \epsilon$$

*Jelölés:* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$, $\lim a_n = A$ *vagy* $a_n \to A$

Azaz minden pozitív $\epsilon$ számhoz tudunk találni egy küszöbindexet, hogy onnantól kezdve a sorozat és a határérték eltérése legfeljebb $\epsilon$.



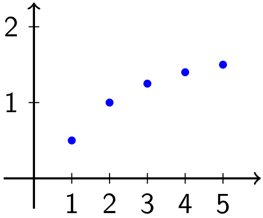
# Példa

1. példa Vizsgáljuk az $a_n = \dfrac{2n-1}{n+1}$ sorozatot korlátosság, monotonitás és határérték szempontjából.

# Példa

1. példa Vizsgáljuk az $a_n = \dfrac{2n-1}{n+1}$ sorozatot korlátosság, monotonitás és határérték szempontjából.

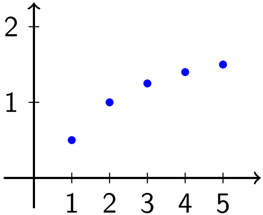
A sorozat első néhány eleme:
$0.5, 1, 1.25, 1.4, 1.5, \ldots$



# Példa

1. példa Vizsgáljuk az $a_n = \dfrac{2n-1}{n+1}$ sorozatot korlátosság, monotonitás és határérték szempontjából.

A sorozat első néhány eleme:
$0.5, 1, 1.25, 1.4, 1.5, \ldots$

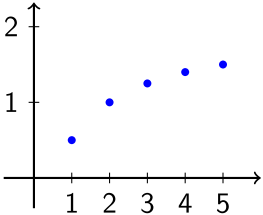



Legyen most $n$ elég nagy. Ekkor a számláló 2n értékéből levonjuk-e az 1-et vagy sem, az nem nagyon számít. Ugyanúgy a nevezőnél sem számít sokat az a $+1$. Ennek alapján nagy $n$ értékre a számláló kb kétszer akkora, mint a nevező. A sorozat első pár tagja és az előbbi gondolat után megfogalmazhatjuk az alábbi sejtéseket:

# Példa

1. példa Vizsgáljuk az $a_n = \dfrac{2n-1}{n+1}$ sorozatot korlátosság, monotonitás és határérték szempontjából.

A sorozat első néhány eleme:
$0.5, 1, 1.25, 1.4, 1.5, \ldots$



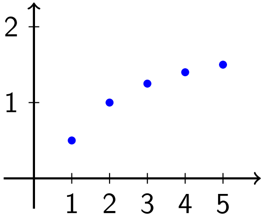

Legyen most $n$ elég nagy. Ekkor a számláló 2n értékéből levonjuk-e az 1-et vagy sem, az nem nagyon számít. Ugyanúgy a nevezőnél sem számít sokat az a $+1$. Ennek alapján nagy $n$ értékre a számláló kb kétszer akkora, mint a nevező. A sorozat első pár tagja és az előbbi gondolat után megfogalmazhatjuk az alábbi sejtéseket:

- szigorúan monoton növő;

# Példa

1. példa Vizsgáljuk az $a_n = \dfrac{2n-1}{n+1}$ sorozatot korlátosság, monotonitás és határérték szempontjából.

A sorozat első néhány eleme:
$0.5, 1, 1.25, 1.4, 1.5, \ldots$



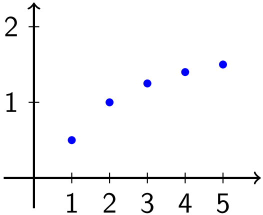

Legyen most $n$ elég nagy. Ekkor a számláló 2n értékéből levonjuk-e az 1-et vagy sem, az nem nagyon számít. Ugyanúgy a nevezőnél sem számít sokat az a $+1$. Ennek alapján nagy $n$ értékre a számláló kb kétszer akkora, mint a nevező. A sorozat első pár tagja és az előbbi gondolat után megfogalmazhatjuk az alábbi sejtéseket:

- szigorúan monoton növő;
- konvergens és $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 2$

# Példa

1. példa Vizsgáljuk az $a_n = \dfrac{2n-1}{n+1}$ sorozatot korlátosság, monotonitás és határérték szempontjából.

A sorozat első néhány eleme:
$0.5, 1, 1.25, 1.4, 1.5, \ldots$




Legyen most $n$ elég nagy. Ekkor a számláló 2n értékéből levonjuk-e az 1-et vagy sem, az nem nagyon számít. Ugyanúgy a nevezőnél sem számít sokat az a $+1$. Ennek alapján nagy $n$ értékre a számláló kb kétszer akkora, mint a nevező. A sorozat első pár tagja és az előbbi gondolat után megfogalmazhatjuk az alábbi sejtéseket:

- szigorúan monoton növő;
- konvergens és $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 2$
- korlátos, alsó korlátja 0.5, a felső pedig a 2

# Példa

Most bebizonyítjuk, hogy a sorozat határértéke 2.

# Példa

Most bebizonyítjuk, hogy a sorozat határértéke 2.
Defininínió szerinti határérték-számításnál mindig az $|a_n - A| < \epsilon$ egyenlőtlenségből indulunk, és ekvivalens átalakítások során át belátjuk, hogy minden $\epsilon$-ra találunk olyan $N(\epsilon)$ értéket, ahonnan kezdve már igaz lesz:

$$\left|\frac{2n-1}{n+1} - 2\right| < \epsilon \Leftrightarrow$$

# Példa

Most bebizonyítjuk, hogy a sorozat határértéke 2.
Definínió szerinti határérték-számításnál mindig az $|a_n - A| < \epsilon$ egyenlőtlenségből indulunk, és ekvivalens átalakítások során át belátjuk, hogy minden $\epsilon$-ra találunk olyan $N(\epsilon)$ értéket, ahonnan kezdve már igaz lesz:

$$\left|\frac{2n-1}{n+1} - 2\right| < \epsilon \Leftrightarrow \left|\frac{2n-1-2(n+1)}{n+1}\right| < \epsilon \Leftrightarrow$$

# Példa

Most bebizonyítjuk, hogy a sorozat határértéke 2.
Defininió szerinti határérték-számításnál mindig az $|a_n - A| < \epsilon$ egyenlőtlenségből indulunk, és ekvivalens átalakítások során át belátjuk, hogy minden $\epsilon$-ra találunk olyan $N(\epsilon)$ értéket, ahonnan kezdve már igaz lesz:

$$\left|\frac{2n-1}{n+1} - 2\right| < \epsilon \Leftrightarrow \left|\frac{2n-1-2(n+1)}{n+1}\right| < \epsilon \Leftrightarrow \frac{3}{n+1} < \epsilon \Leftrightarrow$$

# Példa

Most bebizonyítjuk, hogy a sorozat határértéke 2.
Definínió szerinti határérték-számításnál mindig az $|a_n - A| < \epsilon$ egyenlőtlenségből indulunk, és ekvivalens átalakítások során át belátjuk, hogy minden $\epsilon$-ra találunk olyan $N(\epsilon)$ értéket, ahonnan kezdve már igaz lesz:

$$\left|\frac{2n-1}{n+1} - 2\right| < \epsilon \Leftrightarrow \left|\frac{2n-1-2(n+1)}{n+1}\right| < \epsilon \Leftrightarrow \frac{3}{n+1} < \epsilon \Leftrightarrow \frac{3}{\epsilon} - 1 < n$$

Legyen tehát $N(\epsilon) = \left\lfloor \frac{3}{\epsilon} - 1 \right\rfloor + 1 = \left\lfloor \frac{3}{\epsilon} \right\rfloor$, ahol $\lfloor \cdot \rfloor$ az alsó egészrész függvény. Azért adunk hozzá egyet, hogy biztosan jó küszöböt kapjunk. Itt sem a legkisebb küszöböt szükséges megállapítani. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 2$.

# Példa

Most bebizonyítjuk, hogy a sorozat határértéke 2.
Definínió szerinti határérték-számításnál mindig az $|a_n - A| < \epsilon$ egyenlőtlenségből indulunk, és ekvivalens átalakítások során át belátjuk, hogy minden $\epsilon$-ra találunk olyan $N(\epsilon)$ értéket, ahonnan kezdve már igaz lesz:

$$\left|\frac{2n-1}{n+1} - 2\right| < \epsilon \Leftrightarrow \left|\frac{2n-1-2(n+1)}{n+1}\right| < \epsilon \Leftrightarrow \frac{3}{n+1} < \epsilon \Leftrightarrow \frac{3}{\epsilon} - 1 < n$$

Legyen tehát $N(\epsilon) = \left\lfloor \frac{3}{\epsilon} - 1 \right\rfloor + 1 = \left\lfloor \frac{3}{\epsilon} \right\rfloor$, ahol $\lfloor \cdot \rfloor$ az alsó egészrész függvény. Azért adunk hozzá egyet, hogy biztosan jó küszöböt kapjunk. Itt sem a legkisebb küszöböt szükséges megállapítani. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 2$.
A monotonitás vizsgálatának egyik módja, ha kivonjuk a határértékből a sorozatot: $2 - \frac{2n-1}{n+1} = \cdots = \frac{3}{n+1}$, ami egyre kisebb, ahogy $n \to \infty$, ezért egyre közelebb kerülünk a 2-hoz $\Rightarrow$ $a_n$ szigorúan monoton nő.

# Példa

Megvizsgálhatjuk a monotonitást hagyományos módszerekkel is:

$$a_n \overset{?}{<} a_{n+1}$$

# Példa

Megvizsgálhatjuk a monotonitást hagyományos módszerekkel is:

$$\frac{2n-1}{n+1} = a_n \overset{?}{<} a_{n+1} = \frac{2(n+1)-1}{(n+1)+1} = \frac{2n+1}{n+2}$$

Keresztbe szorzás után:

# Példa

Megvizsgálhatjuk a monotonitást hagyományos módszerekkel is:

$$\frac{2n-1}{n+1} = a_n \overset{?}{<} a_{n+1} = \frac{2(n+1)-1}{(n+1)+1} = \frac{2n+1}{n+2}$$

Keresztbe szorzás után: $(n+2)(2n-1) \overset{?}{<} (2n+1)(n+1)$

Kibontva a zárójeleket:

# Példa

Megvizsgálhatjuk a monotonitást hagyományos módszerekkel is:

$$\frac{2n-1}{n+1} = a_n \overset{?}{<} a_{n+1} = \frac{2(n+1)-1}{(n+1)+1} = \frac{2n+1}{n+2}$$

Keresztbe szorzás után: $(n+2)(2n-1) \overset{?}{<} (2n+1)(n+1)$

Kibontva a zárójeleket: $2n^2+3n-2 \overset{?}{<} 2n^2+3n+1$

Mindkét oldalból kivonva $(2n^2+3n)$-et:

# Példa

Megvizsgálhatjuk a monotonitást hagyományos módszerekkel is:

$$\frac{2n-1}{n+1} = a_n \overset{?}{<} a_{n+1} = \frac{2(n+1)-1}{(n+1)+1} = \frac{2n+1}{n+2}$$

Keresztbe szorzás után: $(n+2)(2n-1) \overset{?}{<} (2n+1)(n+1)$

Kibontva a zárójeleket: $2n^2+3n-2 \overset{?}{<} 2n^2+3n+1$

Mindkét oldalból kivonva $(2n^2+3n)$-et: $-2 \overset{?}{<} 1$, ami $n$-től függetlenül igaz, ezért a kérdőjel eltűnik: $\forall n : a_n < a_{n+1} \Rightarrow a_n$ szigorúan monoton nő.

# Példa

Megvizsgálhatjuk a monotonitást hagyományos módszerekkel is:

$$\frac{2n-1}{n+1} = a_n \overset{?}{<} a_{n+1} = \frac{2(n+1)-1}{(n+1)+1} = \frac{2n+1}{n+2}$$

Keresztbe szorzás után: $(n+2)(2n-1) \overset{?}{<} (2n+1)(n+1)$

Kibontva a zárójeleket: $2n^2+3n-2 \overset{?}{<} 2n^2+3n+1$

Mindkét oldalból kivonva $(2n^2+3n)$-et: $-2 \overset{?}{<} 1$, ami $n$-től függetlenül igaz, ezért a kérdőjel eltűnik: $\forall n : a_n < a_{n+1} \Rightarrow$ $a_n$ szigorúan monoton nő.

A korlátosságnál így már egyszerű a dolgunk, mert monoton növekedő sorozat mindig alulról korlátos, az első tag jó alsó korlátnak: $\forall n : \frac{1}{2} \leq a_n$.

# Példa

Megvizsgálhatjuk a monotonitást hagyományos módszerekkel is:

$$\frac{2n-1}{n+1} = a_n \overset{?}{<} a_{n+1} = \frac{2(n+1)-1}{(n+1)+1} = \frac{2n+1}{n+2}$$

Keresztbe szorzás után: $(n+2)(2n-1) \overset{?}{<} (2n+1)(n+1)$

Kibontva a zárójeleket: $2n^2+3n-2 \overset{?}{<} 2n^2+3n+1$

Mindkét oldalból kivonva $(2n^2+3n)$-et: $-2 \overset{?}{<} 1$, ami $n$-től függetlenül igaz, ezért a kérdőjel eltűnik: $\forall n : a_n < a_{n+1} \Rightarrow$ $a_n$ szigorúan monoton nő.
A korlátosságnál így már egyszerű a dolgunk, mert monoton növekedő sorozat mindig alulról korlátos, az első tag jó alsó korlátnak: $\forall n : \frac{1}{2} \leq a_n$.
Most belátjuk, hogy a határértéket nem lépheti túl $a_n$ a monotonitás miatt. Ugyanis ha lenne olyan $a_L$ tagja a sorozatnak, ami nagyobb, mint 2, akkor az összes többi tag innentől kezdve nagyobb lesz mint $a_L$ és az $\epsilon = a_L - 2$ értékhez nem találunk megfelelő küszöböt, ami ellentmondana a határérték definíciójának, ezért: $\forall n : a_n < 2$, tehát $a_n$ korlátos.

# Korlátosság – monotonitás – határérték

Az előbbi példa során már lényegében láttuk az alábbi tételek indoklását:

**Tétel (Elégséges feltétel)**

*Ha az $a_n$ sorozat monoton és korlátos, akkor konvergens.*

A fenti tételt szokás "mozgólépcső" szabálynak is nevezni. Monoton növő sorozatoknál felfelé megyünk és a határérték a legkisebb felső korlát lesz, míg monoton csökkenés esetén lefelé megyünk és a határérték a legnagyobb alsó korlát.

## Korlátosság – monotonitás – határérték

Az előbbi példa során már lényegében láttuk az alábbi tételek indoklását:

**Tétel (Elégséges feltétel)**

*Ha az $a_n$ sorozat monoton és korlátos, akkor konvergens.*

A fenti tételt szokás "mozgólépcső" szabálynak is nevezni. Monoton növő sorozatoknál felfelé megyünk és a határérték a legkisebb felső korlát lesz, míg monoton csökkenés esetén lefelé megyünk és a határérték a legnagyobb alsó korlát.

**Tétel (Szükséges feltétel)**

*Ha az $a_n$ sorozat konvergens, akkor korlátos.*

Ha van határérték, akkor annak bármilyen, mondjuk 1 sugarú környezetébe esik véges sok tagtól eltekintve az összes. A maradék véges sok tag pedig biztosan korlátos halmaz lesz.

# Határérték tulajdonságai

## Tétel

*Legyen $a_n$ és $b_n$ két sorozat, úgy, hogy $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A \in \mathbb{R}$ és $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = B \in \mathbb{R}$, tovább $c \in \mathbb{R}$. Ekkor*

- $\lim\limits_{n\to\infty} a_n + b_n = A + B$

# Határérték tulajdonságai

## Tétel

*Legyen* $a_n$ *és* $b_n$ *két sorozat, úgy, hogy* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A \in \mathbb{R}$ *és* $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = B \in \mathbb{R}$*, tovább* $c \in \mathbb{R}$*. Ekkor*

- $\lim\limits_{n\to\infty} a_n + b_n = A + B$
- $\lim\limits_{n\to\infty} a_n - b_n = A - B$

# Határérték tulajdonságai

## Tétel

*Legyen* $a_n$ *és* $b_n$ *két sorozat, úgy, hogy* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A \in \mathbb{R}$ *és* $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = B \in \mathbb{R}$*, tovább* $c \in \mathbb{R}$*. Ekkor*

- $\lim\limits_{n\to\infty} a_n + b_n = A + B$
- $\lim\limits_{n\to\infty} a_n - b_n = A - B$
- $\lim\limits_{n\to\infty} c \cdot a_n = c \cdot A$

# Határérték tulajdonságai

## Tétel

*Legyen* $a_n$ *és* $b_n$ *két sorozat, úgy, hogy* $\lim_{n\to\infty} a_n = A \in \mathbb{R}$ *és* $\lim_{n\to\infty} b_n = B \in \mathbb{R}$*, tovább* $c \in \mathbb{R}$*. Ekkor*

- $\lim_{n\to\infty} a_n + b_n = A + B$
- $\lim_{n\to\infty} a_n - b_n = A - B$
- $\lim_{n\to\infty} c \cdot a_n = c \cdot A$
- $\lim_{n\to\infty} a_n \cdot b_n = A \cdot B$

# Határérték tulajdonságai

## Tétel

*Legyen* $a_n$ *és* $b_n$ *két sorozat, úgy, hogy* $\lim_{n\to\infty} a_n = A \in \mathbb{R}$ *és* $\lim_{n\to\infty} b_n = B \in \mathbb{R}$*, tovább* $c \in \mathbb{R}$*. Ekkor*

- $\lim_{n\to\infty} a_n + b_n = A + B$
- $\lim_{n\to\infty} a_n - b_n = A - B$
- $\lim_{n\to\infty} c \cdot a_n = c \cdot A$
- $\lim_{n\to\infty} a_n \cdot b_n = A \cdot B$
- $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{A}{B}$ $(B \neq 0)$

Ezen állítások tetszőleges véges számú kombinációját is vehetjük, ami hasznos lesz a nem definíció szerinti határérték-számításnál.

# Végtelen határértékek

## Definíció

*Ha az $a_n$ sorozat nem konvergens, akkor divergensnek nevezzük.*

# Végtelen határértékek

## Definíció

*Ha az $a_n$ sorozat nem konvergens, akkor divergensnek nevezzük.*
*Azt mondjuk, hogy az $a_n$ sorozat határértéke $\infty$, ha*

$$\forall K \in \mathbb{R}, \exists N(K) \in \mathbb{N}, \forall n > N(K) : a_n > K.$$

# Végtelen határértékek

## Definíció

*Ha az $a_n$ sorozat nem konvergens, akkor divergensnek nevezzük.*
*Azt mondjuk, hogy az $a_n$ sorozat határértéke $\infty$, ha*

$$\forall K \in \mathbb{R}, \exists N(K) \in \mathbb{N}, \forall n > N(K) : a_n > K.$$

*Azt mondjuk, hogy az $a_n$ sorozat határértéke $-\infty$, ha*

$$\forall k \in \mathbb{R}, \exists N(k) \in \mathbb{N}, \forall n > N(k) : a_n < k.$$

# Végtelen határértékek

## Definíció

*Ha az $a_n$ sorozat nem konvergens, akkor divergensnek nevezzük.*
*Azt mondjuk, hogy az $a_n$ sorozat határértéke $\infty$, ha*

$$\forall K \in \mathbb{R}, \exists N(K) \in \mathbb{N}, \forall n > N(K) : a_n > K.$$

*Azt mondjuk, hogy az $a_n$ sorozat határértéke $-\infty$, ha*

$$\forall k \in \mathbb{R}, \exists N(k) \in \mathbb{N}, \forall n > N(k) : a_n < k.$$

*Ezeket rendre úgy is mondhatjuk, hogy $a_n$ tart vagy divergál $\infty$-hez illetve $-\infty$-hez, és így jelöljük:* $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$, *vagy* $a_n \to \infty$, *illetve* $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$ *vagy* $a_n \to \infty$

Vagyis minden $K/k$ korlátra létezik egy olyan küszöbindex, hogy a sorozat küszöbindex utáni tagjai már $K/k$ értékeit felül/alulmúlják.

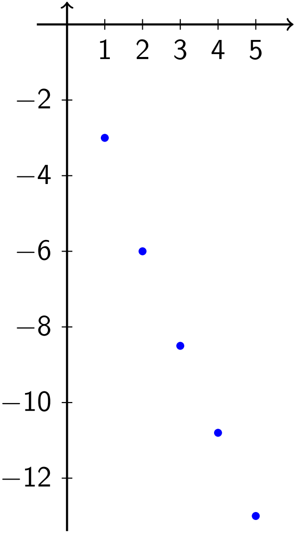
# Példa

2. példa Vizsgáljuk az $b_n = \dfrac{-2n^2 - 6n + 2}{n+1}$ sorozatot korlátosság, monotonitás és határérték szempontjából.

# Példa

2. példa Vizsgáljuk az $b_n = \dfrac{-2n^2 - 6n + 2}{n+1}$ sorozatot korlátosság, monotonitás és határérték szempontjából.

Nézzük meg (most utóljára) a sorozat első néhány elemét, hogy sejtéseket foglamazhassunk meg (később máshogy csináljuk): $-3, -6, -8.5, -10.8, -13, \ldots$
Sejtések:

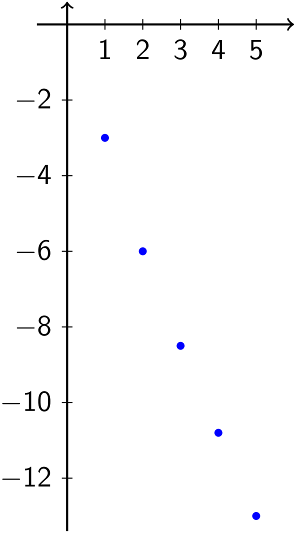


# Példa

2. példa Vizsgáljuk az $b_n = \dfrac{-2n^2 - 6n + 2}{n+1}$ sorozatot korlátosság, monotonitás és határérték szempontjából.

Nézzük meg (most utóljára) a sorozat első néhány elemét, hogy sejtéseket foglamazhassunk meg (később máshogy csináljuk): $-3, -6, -8.5, -10.8, -13, \dots$
Sejtések:

- szigorúan monoton csökken;



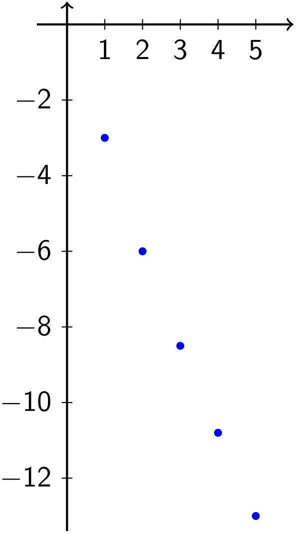
# Példa

2. példa Vizsgáljuk az $b_n = \dfrac{-2n^2 - 6n + 2}{n+1}$ sorozatot korlátosság, monotonitás és határérték szempontjából.

Nézzük meg (most utóljára) a sorozat első néhány elemét, hogy sejtéseket foglamazhassunk meg (később máshogy csináljuk): $-3, -6, -8.5, -10.8, -13, \ldots$

Sejtések:

- szigorúan monoton csökken;
- divergens és $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = -\infty$



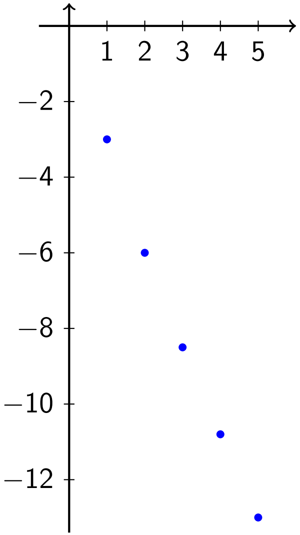
# Példa

2. példa Vizsgáljuk az $b_n = \dfrac{-2n^2 - 6n + 2}{n+1}$ sorozatot korlátosság, monotonitás és határérték szempontjából.

Nézzük meg (most utóljára) a sorozat első néhány elemét, hogy sejtéseket foglamazhassunk meg (később máshogy csináljuk): $-3, -6, -8.5, -10.8, -13, \ldots$

Sejtések:

- szigorúan monoton csökken;
- divergens és $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = -\infty$
- felső korlátotja $-3$, alsó korlátja nincs



# Példa

Belátjuk, hogy $b_n$ sorozat tart $-\infty$-be. Ehhez minden $k \in \mathbb{R}$ korláthoz kell tudni mondani egy küszömindexet, amitől kezdve $b_n < k$.

# Példa

Belátjuk, hogy $b_n$ sorozat tart $-\infty$-be. Ehhez minden $k \in \mathbb{R}$ korláthoz kell tudni mondani egy küszömindexet, amitől kezdve $b_n < k$. A későbbiekben szükségünk lesz rá, ezért már most elkezdjük a becslés technikáját, amúgy egy paraméteres másodfokú egyenlőtlenséget kellene megoldani:

$$b_n = \frac{-2n^2 - 6n + 2}{n+1} = \frac{-2n^2 - 2n - (4n-2)}{n+1} \leq \frac{-2n(n+1)}{n+1} = -2n < k$$

Amiből $n > -\dfrac{k}{2} \Rightarrow N(k) = \left\lfloor -\dfrac{k}{2} \right\rfloor + 1$

# Példa

Belátjuk, hogy $b_n$ sorozat tart $-\infty$-be. Ehhez minden $k \in \mathbb{R}$ korláthoz kell tudni mondani egy küszömindexet, amitől kezdve $b_n < k$. A későbbiekben szükségünk lesz rá, ezért már most elkezdjük a becslés technikáját, amúgy egy paraméteres másodfokú egyenlőtlenséget kellene megoldani:

$$b_n = \frac{-2n^2 - 6n + 2}{n+1} = \frac{-2n^2 - 2n - (4n-2)}{n+1} \leq \frac{-2n(n+1)}{n+1} = -2n < k$$

Amiből $n > -\frac{k}{2} \Rightarrow N(k) = \left\lfloor -\frac{k}{2} \right\rfloor + 1 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} b_n = -\infty$
A $b_n$-nél mondunk egy nagyobb kifejezést és ha az is kisebb, mint $k$, akkor $b_n$ is. Egy törtet úgy növelünk, hogy vagy a számlálót növeljük, vagy a nevezőt csökkentjük. Itt a számlálóban kevesebbet vonunk le, mert a $(4n-2)$ mindig pozitív.

# Példa

Belátjuk, hogy $b_n$ sorozat tart $-\infty$-be. Ehhez minden $k \in \mathbb{R}$ korláthoz kell tudni mondani egy küszömindexet, amitől kezdve $b_n < k$. A későbbiekben szükségünk lesz rá, ezért már most elkezdjük a becslés technikáját, amúgy egy paraméteres másodfokú egyenlőtlenséget kellene megoldani:

$$b_n = \frac{-2n^2 - 6n + 2}{n+1} = \frac{-2n^2 - 2n - (4n-2)}{n+1} \leq \frac{-2n(n+1)}{n+1} = -2n < k$$

Amiből $n > -\frac{k}{2} \Rightarrow N(k) = \left\lfloor -\frac{k}{2} \right\rfloor + 1 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} b_n = -\infty$

A $b_n$-nél mondunk egy nagyobb kifejezést és ha az is kisebb, mint $k$, akkor $b_n$ is. Egy törtet úgy növelünk, hogy vagy a számlálót növeljük, vagy a nevezőt csökkentjük. Itt a számlálóban kevesebbet vonunk le, mert a $(4n-2)$ mindig pozitív.

Mivel a sorozat minden értéket alul tud múlni, ezért egyúttal azt is beláttuk, hogy alulról nem korlátos.

## Példa

Belátjuk, hogy $b_n$ sorozat szigorúan monoton csökken:

$$b_n \overset{?}{>} b_{n+1}$$

# Példa

Belátjuk, hogy $b_n$ sorozat szigorúan monoton csökken:

$$\frac{-2n^2-6n+2}{n+1} = b_n \overset{?}{>} b_{n+1} = \frac{-2(n+1)^2-6(n+1)+2}{(n+1)+1} = \frac{-2n^2-10n-6}{n+2}$$

Keresztbe szorzás után:

# Példa

Belátjuk, hogy $b_n$ sorozat szigorúan monoton csökken:

$$\frac{-2n^2-6n+2}{n+1} = b_n \overset{?}{>} b_{n+1} = \frac{-2(n+1)^2-6(n+1)+2}{(n+1)+1} = \frac{-2n^2-10n-6}{n+2}$$

Keresztbe szorzás után: $(n+2)(-2n^2-6n+2) \overset{?}{>} (-2n^2-10n-6)(n+1)$

Kibontva a zárójeleket:

# Példa

Belátjuk, hogy $b_n$ sorozat szigorúan monoton csökken:

$$\frac{-2n^2-6n+2}{n+1} = b_n \overset{?}{>} b_{n+1} = \frac{-2(n+1)^2-6(n+1)+2}{(n+1)+1} = \frac{-2n^2-10n-6}{n+2}$$

Keresztbe szorzás után: $(n+2)(-2n^2-6n+2) \overset{?}{>} (-2n^2-10n-6)(n+1)$

Kibontva a zárójeleket: $-2n^3-10n^2-10n+4 \overset{?}{>} -2n^3-12n^2-16n-6$

Mindkét oldalhoz hozzáadva $2n^3+12n^2+16n+6$-ot:

# Példa

Belátjuk, hogy $b_n$ sorozat szigorúan monoton csökken:

$$\frac{-2n^2 - 6n + 2}{n+1} = b_n \overset{?}{>} b_{n+1} = \frac{-2(n+1)^2 - 6(n+1) + 2}{(n+1)+1} = \frac{-2n^2 - 10n - 6}{n+2}$$

Keresztbe szorzás után: $(n+2)(-2n^2 - 6n + 2) \overset{?}{>} (-2n^2 - 10n - 6)(n+1)$

Kibontva a zárójeleket: $-2n^3 - 10n^2 - 10n + 4 \overset{?}{>} -2n^3 - 12n^2 - 16n - 6$

Mindkét oldalhoz hozzáadva $2n^3 + 12n^2 + 16n + 6$-ot: $2n^2 + 6n + 10 \overset{?}{>} 0$, aminek a bal oldala egy pozitív főegyütthatójú, negatív diszkriminánsú másodfokú ($D = 36 - 4 \cdot 2 \cdot 10 = -44$), ami $n$-től függetlenül pozitív, tehát a kérdőjel eltűnik: $\forall n : b_n > b_{n+1} \Rightarrow$, $b_n$ szigorúan monoton csökken.

# Példa

Belátjuk, hogy $b_n$ sorozat szigorúan monoton csökken:

$$\frac{-2n^2-6n+2}{n+1} = b_n \overset{?}{>} b_{n+1} = \frac{-2(n+1)^2-6(n+1)+2}{(n+1)+1} = \frac{-2n^2-10n-6}{n+2}$$

Keresztbe szorzás után: $(n+2)(-2n^2-6n+2) \overset{?}{>} (-2n^2-10n-6)(n+1)$

Kibontva a zárójeleket: $-2n^3-10n^2-10n+4 \overset{?}{>} -2n^3-12n^2-16n-6$

Mindkét oldalhoz hozzáadva $2n^3+12n^2+16n+6$-ot: $2n^2+6n+10 \overset{?}{>} 0$, aminek a bal oldala egy pozitív főegyütthatójú, negatív diszkriminánsú másodfokú ($D = 36-4\cdot 2\cdot 10 = -44$), ami $n$-től függetlenül pozitív, tehát a kérdőjel eltűnik: $\forall n : b_n > b_{n+1} \Rightarrow$, $b_n$ szigorúan monoton csökken. Mivel szigorúan monoton csökken, ezért $b_n$ felülről korlátos és az első tagja jó lesz felső korlátnak, tehát $\forall n : -3 \geq b_n$

# Példa

Belátjuk, hogy $b_n$ sorozat szigorúan monoton csökken:

$$\frac{-2n^2-6n+2}{n+1} = b_n \overset{?}{>} b_{n+1} = \frac{-2(n+1)^2-6(n+1)+2}{(n+1)+1} = \frac{-2n^2-10n-6}{n+2}$$

Keresztbe szorzás után: $(n+2)(-2n^2-6n+2) \overset{?}{>} (-2n^2-10n-6)(n+1)$
Kibontva a zárójeleket: $-2n^3-10n^2-10n+4 \overset{?}{>} -2n^3-12n^2-16n-6$
Mindkét oldalhoz hozzáadva $2n^3+12n^2+16n+6$-ot: $2n^2+6n+10 \overset{?}{>} 0$, aminek a bal oldala egy pozitív főegyütthatójú, negatív diszkriminánsú másodfokú ($D = 36-4\cdot 2\cdot 10 = -44$), ami $n$-től függetlenül pozitív, tehát a kérdőjel eltűnik: $\forall n : b_n > b_{n+1} \Rightarrow$, $b_n$ szigorúan monoton csökken.
Mivel szigorúan monoton csökken, ezért $b_n$ felülről korlátos és az első tagja jó lesz felső korlátnak, tehát $\forall n : -3 \geq b_n$
A $b_n$ sorozat felülről korlátos, de alulról nem, ezért $b_n$ nem korlátos.

# Nevezetes határértékek – hatvány

## Tétel

*Legyen* $\alpha \in \mathbb{R}$, *ekkor*

$$\lim_{n\to\infty} n^{\alpha} = \begin{cases} \infty, & \text{ha } \alpha > 0, \\ 1, & \text{ha } \alpha = 0, \\ 0, & \text{ha } \alpha < 0. \end{cases}$$

# Nevezetes határértékek – hatvány

## Tétel

*Legyen* $\alpha \in \mathbb{R}$, *ekkor*

$$\lim_{n\to\infty} n^\alpha = \begin{cases} \infty, & \text{ha } \alpha > 0, \\ 1, & \text{ha } \alpha = 0, \\ 0, & \text{ha } \alpha < 0. \end{cases}$$

## Tétel

*Minden legalább elsőfokú polinom határértéke* $\infty$, *vagy* $-\infty$, *ahol a* $\infty$ *előjele megegyezik a főegyüttható előjelével.*

# Nevezetes határértékek – hatvány

**Tétel**

*Legyen $\alpha \in \mathbb{R}$, ekkor*

$$\lim_{n\to\infty} n^\alpha = \begin{cases} \infty, & \text{ha } \alpha > 0, \\ 1, & \text{ha } \alpha = 0, \\ 0, & \text{ha } \alpha < 0. \end{cases}$$

**Tétel**

*Minden legalább elsőfokú polinom határértéke $\infty$, vagy $-\infty$, ahol a $\infty$ előjele megegyezik a főegyüttható előjelével.*

3. példa $\lim_{n\to\infty} 2n^2 - 3n + 1 = \lim_{n\to\infty} n^2 \left(2 - \frac{3}{n} + \frac{1}{n^2}\right) = \infty$, mert a zárójelben lévő kifejezések rendre 2-höz, 0-hoz és 0-hoz tartanak, így alkalmazva a határértékre vonatkozó műveleti szabályokat, a zárójelen belüli kifejezés 2-höz tart, amit megszorzunk egy $\infty$-hez tartóval.

# Nevezetes határértékek – racionális törtfüggvény

Mi a határértéke egy racionális törtfüggvénynek:

# Nevezetes határértékek – racionális törtfüggvény

Mi a határértéke egy racionális törtfüggvénynek:

**Tétel**

*Legyen $p(n)$ és $q(n)$ az $n$ két polinomja, ekkor*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{p(n)}{q(n)} = \begin{cases} \pm\infty, & \text{ha } \deg(p) > \deg(q), \\ \text{főegyütthatók hányados}, & \text{ha } \deg(p) = \deg(q), \\ 0, & \text{ha } \deg(p) < \deg(q), \end{cases}$$

*ahol divergencia esetén a $\infty$ előjele a főegyütthatók szorzatának előjele.*

# Nevezetes határértékek – racionális törtfüggvény

Mi a határértéke egy racionális törtfüggvénynek:

**Tétel**

*Legyen $p(n)$ és $q(n)$ az $n$ két polinomja, ekkor*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{p(n)}{q(n)}=\begin{cases}\pm\infty, & \text{ha } \deg(p)>\deg(q),\\ \text{főegyütthatók hányados}, & \text{ha } \deg(p)=\deg(q),\\ 0, & \text{ha } \deg(p)<\deg(q),\end{cases}$$

*ahol divergencia esetén a $\infty$ előjele a főegyütthatók szorzatának előjele.*

4. példa $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n-1}{n+1}=2$, mert két elsőfokú polinom van elosztva egymással és a főegyütthatók hányadosa: $\frac{2}{1}=2$

# Nevezetes határértékek – racionális törtfüggvény

Mi a határértéke egy racionális törtfüggvénynek:

## Tétel

*Legyen $p(n)$ és $q(n)$ az $n$ két polinomja, ekkor*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{p(n)}{q(n)}=\begin{cases}\pm\infty, & \text{ha } \deg(p)>\deg(q),\\ \text{főegyütthatók hányados}, & \text{ha } \deg(p)=\deg(q),\\ 0, & \text{ha } \deg(p)<\deg(q),\end{cases}$$

*ahol divergencia esetén a $\infty$ előjele a főegyütthatók szorzatának előjele.*

4. példa $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n-1}{n+1}=2$, mert két elsőfokú polinom van elosztva egymással és a főegyütthatók hányadosa: $\frac{2}{1}=2$

$\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{-2n^2-6n+2}{n+1}=-\infty$, mert a számláló fokszáma nagyobb, mint a nevező fokszáma és a főegyütthatók különböző előjelűek.

# Példa

5. példa Határozzuk meg az $a_n = \sqrt{n^2 + n + 1} - n$ sorozat határértékét.

# Példa

5\. példa Határozzuk meg az $a_n = \sqrt{n^2+n+1} - n$ sorozat határértékét. Két $\infty$-hez tartó sorozat összegéről tudjuk, hogy $\infty$, de két $\infty$ különbsége bármi lehet. Ilyen estre nincs általános módszer, de itt gyökteleníthetünk:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{n^2+n+1} - n = \lim_{n\to\infty} (\sqrt{n^2+n+1} - n)\frac{\sqrt{n^2+n+1}+n}{\sqrt{n^2+n+1}+n} =$$

# Példa

5. példa Határozzuk meg az $a_n = \sqrt{n^2+n+1} - n$ sorozat határértékét. Két $\infty$-hez tartó sorozat összegéről tudjuk, hogy $\infty$, de két $\infty$ különbsége bármi lehet. Ilyen estre nincs általános módszer, de itt gyökteleníthetünk:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{n^2+n+1} - n = \lim_{n\to\infty} (\sqrt{n^2+n+1} - n)\frac{\sqrt{n^2+n+1}+n}{\sqrt{n^2+n+1}+n} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n^2+n+1-n^2}{\sqrt{n^2+n+1}+n} =$$

# Példa

5. példa Határozzuk meg az $a_n = \sqrt{n^2+n+1} - n$ sorozat határértékét. Két $\infty$-hez tartó sorozat összegéről tudjuk, hogy $\infty$, de két $\infty$ különbsége bármi lehet. Ilyen estre nincs általános módszer, de itt gyökteleníthetünk:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{n^2+n+1} - n = \lim_{n\to\infty} (\sqrt{n^2+n+1} - n)\frac{\sqrt{n^2+n+1}+n}{\sqrt{n^2+n+1}+n} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n^2+n+1-n^2}{\sqrt{n^2+n+1}+n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{\sqrt{n^2+n+1}+n}$$

A tört számlálója elsőfokú, a nevezőben pedig egy másodfokú négyzetgyöke (tehát elsőfokú) és egy elsőfokú összege szerepel. A legerősebb tényező tehát elsőfokú.

# Példa

5. példa Határozzuk meg az $a_n = \sqrt{n^2+n+1} - n$ sorozat határértékét.
Két $\infty$-hez tartó sorozat összegéről tudjuk, hogy $\infty$, de két $\infty$ különbsége bármi lehet. Ilyen estre nincs általános módszer, de itt gyökteleníthetünk:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{n^2+n+1} - n = \lim_{n\to\infty} (\sqrt{n^2+n+1} - n) \frac{\sqrt{n^2+n+1}+n}{\sqrt{n^2+n+1}+n} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n^2+n+1-n^2}{\sqrt{n^2+n+1}+n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{\sqrt{n^2+n+1}+n}$$

A tört számlálója elsőfokú, a nevezőben pedig egy másodfokú négyzetgyöke (tehát elsőfokú) és egy elsőfokú összege szerepel. A legerősebb tényező tehát elsőfokú.
Számlálót és nevezőt is egyszerűsítve $n$-el:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{\sqrt{n^2+n+1}+n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1+\frac{1}{n}}{\sqrt{1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}+1} =$$

# Példa

5. példa Határozzuk meg az $a_n = \sqrt{n^2+n+1} - n$ sorozat határértékét.
Két $\infty$-hez tartó sorozat összegéről tudjuk, hogy $\infty$, de két $\infty$ különbsége bármi lehet. Ilyen estre nincs általános módszer, de itt gyökteleníthetünk:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{n^2+n+1} - n = \lim_{n\to\infty} (\sqrt{n^2+n+1} - n)\frac{\sqrt{n^2+n+1}+n}{\sqrt{n^2+n+1}+n} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n^2+n+1-n^2}{\sqrt{n^2+n+1}+n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{\sqrt{n^2+n+1}+n}$$

A tört számlálója elsőfokú, a nevezőben pedig egy másodfokú négyzetgyöke (tehát elsőfokú) és egy elsőfokú összege szerepel. A legerősebb tényező tehát elsőfokú.
Számlálót és nevezőt is egyszerűsítve $n$-el:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{\sqrt{n^2+n+1}+n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1+\frac{1}{n}}{\sqrt{1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}+1} = \frac{1+0}{\sqrt{1+0+0}+1} =$$

# Példa

5. példa Határozzuk meg az $a_n = \sqrt{n^2+n+1} - n$ sorozat határértékét. Két $\infty$-hez tartó sorozat összegéről tudjuk, hogy $\infty$, de két $\infty$ különbsége bármi lehet. Ilyen estre nincs általános módszer, de itt gyökteleníthetünk:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{n^2+n+1} - n = \lim_{n\to\infty} (\sqrt{n^2+n+1} - n)\frac{\sqrt{n^2+n+1}+n}{\sqrt{n^2+n+1}+n} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n^2+n+1-n^2}{\sqrt{n^2+n+1}+n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{\sqrt{n^2+n+1}+n}$$

A tört számlálója elsőfokú, a nevezőben pedig egy másodfokú négyzetgyöke (tehát elsőfokú) és egy elsőfokú összege szerepel. A legerősebb tényező tehát elsőfokú.
Számlálót és nevezőt is egyszerűsítve $n$-el:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{\sqrt{n^2+n+1}+n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1+\frac{1}{n}}{\sqrt{1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}+1} = \frac{1+0}{\sqrt{1+0+0}+1} = \frac{1}{2}.$$

# Nevezetes határértékek – exponenciális kifejezés

Vizsgáljuk meg az exponenciális sorozat határértékét:

### Tétel

*A $q^n$ $(q \in \mathbb{R})$ exponenciális sorozat határértéke $q$ függvényében:*

$$\lim_{n\to\infty} q^n = \begin{cases} \infty, & \text{ha } q > 1, \\ 1, & \text{ha } q = 1 \\ 0, & \text{ha } -1 < q < 1, \\ \text{nincs határérték}, & \text{ha } q \le -1 \end{cases}$$

# Nevezetes határértékek – exponenciális kifejezés

Vizsgáljuk meg az exponenciális sorozat határértékét:

**Tétel**

*A $q^n$ $(q \in \mathbb{R})$ exponenciális sorozat határértéke $q$ függvényében:*

$$\lim_{n\to\infty} q^n = \begin{cases} \infty, & \text{ha } q > 1, \\ 1, & \text{ha } q = 1 \\ 0, & \text{ha } -1 < q < 1, \\ \text{nincs határérték}, & \text{ha } q \leq -1 \end{cases}$$

A legtöbb eset adja magát, de a $q \leq -1$ érdekes.
Ha $q \neq -1$, akkor hatvány abszolút értéke egyre nagyobb, tehát $|q^n|$ divergens, de $q^n$ váltakozó előjelű. Az ilyen típusú sorozatokat osszcillálva divergálónak nevezzük.

# Nevezetes határértékek – exponenciális kifejezés

Vizsgáljuk meg az exponenciális sorozat határértékét:

## Tétel

*A $q^n$ $(q \in \mathbb{R})$ exponenciális sorozat határértéke $q$ függvényében:*

$$\lim_{n\to\infty} q^n = \begin{cases} \infty, & \text{ha } q > 1, \\ 1, & \text{ha } q = 1 \\ 0, & \text{ha } -1 < q < 1, \\ \text{nincs határérték}, & \text{ha } q \leq -1 \end{cases}$$

A legtöbb eset adja magát, de a $q \leq -1$ érdekes.
Ha $q \neq -1$, akkor hatvány abszolút értéke egyre nagyobb, tehát $|q^n|$ divergens, de $q^n$ váltakozó előjelű. Az ilyen típusú sorozatokat osszcillálva divergálónak nevezzük.
Ha $q = -1$, akkor a $\pm 1$ között váltakozik, oszcillál a sorozat, aminek így nem lehet határértékke, tehát divergens.

# Példa

6. példa Határozzuk meg a $\dfrac{3^n}{2^n + \left(\frac{1}{2}\right)^n}$ sorozat határértékét.

# Példa

6. példa Határozzuk meg a $\dfrac{3^n}{2^n + \left(\frac{1}{2}\right)^n}$ sorozat határértékét.

A számláló és a nevező is végtelenhez tart, így $\infty/\infty$ típusú határozatlan értéket kapunk. Most a $3^n$ a nevezőben a domináns tag, ezért ezzel egyszerűsítünk:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3^n}{2^n + \left(\frac{1}{2}\right)^n} =$$

# Példa

6. példa Határozzuk meg a $\dfrac{3^n}{2^n + \left(\frac{1}{2}\right)^n}$ sorozat határértékét.

A számláló és a nevező is végtelenhez tart, így $\infty/\infty$ típusú határozatlan értéket kapunk. Most a $3^n$ a nevezőben a domináns tag, ezért ezzel egyszerűsítünk:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3^n}{2^n + \left(\frac{1}{2}\right)^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\left(\frac{2}{3}\right)^n + \left(\frac{1}{6}\right)^n}$$

# Példa

6. példa Határozzuk meg a $\dfrac{3^n}{2^n + \left(\frac{1}{2}\right)^n}$ sorozat határértékét.

A számláló és a nevező is végtelenhez tart, így $\infty/\infty$ típusú határozatlan értéket kapunk. Most a $3^n$ a nevezőben a domináns tag, ezért ezzel egyszerűsítünk:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3^n}{2^n + \left(\frac{1}{2}\right)^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\left(\frac{2}{3}\right)^n + \left(\frac{1}{6}\right)^n} = \infty$$

A nevezőben két 1-nél kisebb alapú exponenciális kifejezés szerepel, melyeknek az előbbi tétel alapján 0 lesz a határértékük. A számlálónk pedig 1, így egy korlátos kifejezést osztunk egyre kisebb, 0-hoz tartó számok összegével. Az eredmény egyre nagyobb lesz, így a határérték $\infty$.

# Nevezetes határértékek – gyökös kifejezések

**Tétel**

*Legyen adott* $0 < c \in \mathbb{R}$, *ekkor* $\lim\limits_{n \to \infty} \sqrt[n]{c} = 1$

# Nevezetes határértékek – gyökös kifejezések

**Tétel**

*Legyen adott* $0 < c \in \mathbb{R}$, *ekkor* $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{c} = 1$

A bizonyítás több módja is van:

Vehetjük $\sqrt[n]{c}$ logaritmusát: $\log \sqrt[n]{c} = \log c^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{n} \log c = \frac{\log c}{n}$, ahol egy korlátos kifejezés van osztva egy végtelenhez tartóval, amiről már láttuk, hogy tart 0-hoz és ha $\lim\limits_{n\to\infty} \log a_n = 0 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1$.

# Nevezetes határértékek – gyökös kifejezések

## Tétel

*Legyen adott* $0 < c \in \mathbb{R}$, *ekkor* $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{c} = 1$

A bizonyítás több módja is van:

Vehetjük $\sqrt[n]{c}$ logaritmusát: $\log \sqrt[n]{c} = \log c^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{n} \log c = \frac{\log c}{n}$, ahol egy korlátos kifejezés van osztva egy végtelenhez tartóval, amiről már láttuk, hogy tart 0-hoz és ha $\lim\limits_{n\to\infty} \log a_n = 0 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1$.

## Tétel

$\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$

# Nevezetes határértékek – gyökös kifejezések

## Tétel

*Legyen adott* $0 < c \in \mathbb{R}$, *ekkor* $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{c} = 1$

A bizonyítás több módja is van:

Vehetjük $\sqrt[n]{c}$ logaritmusát: $\log \sqrt[n]{c} = \log c^{\frac{1}{n}} = \dfrac{1}{n} \log c = \dfrac{\log c}{n}$, ahol egy korlátos kifejezés van osztva egy végtelenhez tartóval, amiről már láttuk, hogy tart 0-hoz és ha $\lim\limits_{n\to\infty} \log a_n = 0 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1$.

## Tétel

$\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$

Itt már kicsit nehezebb az indoklás, ugyanúgy logaritmust véve a $\dfrac{\log n}{n}$ hányadost kapjuk. Ezt pedig a függvényhatárértékekből tudjuk, hogy 0-hoz tart.

# Rendőrelv

## Tétel (Rendőrelv)

*Ha* $b_n \leq a_n \leq c_n$ *valamilyen* $N \leq n \in \mathbb{N}$ *esetén, továbbá* $b_n$ *és* $c_n$ *konvergens úgy, hogy*

$$\lim_{n\to\infty} b_n = A = \lim_{n\to\infty} c_n,$$

*akkor* $a_n$ *is konvergens és* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$.

# Rendőrelv

## Tétel (Rendőrelv)

*Ha $b_n \le a_n \le c_n$ valamilyen $N \le n \in \mathbb{N}$ esetén, továbbá $b_n$ és $c_n$ konvergens úgy, hogy*

$$\lim_{n\to\infty} b_n = A = \lim_{n\to\infty} c_n,$$

*akkor $a_n$ is konvergens és $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$.*

Azaz ha egy bűnöző ($a_n$) élete során valamikortól ($N$) mindkét oldalára kerül egy-egy rendőr ($b_n$ és $c_n$), akik bemennek a börtönbe ($A$), akkor a bűnözőnek is be kell mennie a börtönba ($A$).

# Rendőrelv

## Tétel (Rendőrelv)

*Ha* $b_n \leq a_n \leq c_n$ *valamilyen* $N \leq n \in \mathbb{N}$ *esetén, továbbá* $b_n$ *és* $c_n$ *konvergens úgy, hogy*

$$\lim_{n\to\infty} b_n = A = \lim_{n\to\infty} c_n,$$

*akkor* $a_n$ *is konvergens és* $\lim_{n\to\infty} a_n = A$.

Azaz ha egy bűnöző ($a_n$) élete során valamikortól ($N$) mindkét oldalára kerül egy-egy rendőr ($b_n$ és $c_n$), akik bemennek a börtönbe ($A$), akkor a bűnözőnek is be kell mennie a börtönba ($A$).

## Tétel (Speciális rendőrelv)

*Ha* $b_n \leq a_n$ *valamilyen* $N \leq n \in \mathbb{N}$ *esetén*

- $\lim_{n\to\infty} b_n = \infty \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = \infty$

# Rendőrelv

## Tétel (Rendőrelv)

*Ha* $b_n \leq a_n \leq c_n$ *valamilyen* $N \leq n \in \mathbb{N}$ *esetén, továbbá* $b_n$ *és* $c_n$ *konvergens úgy, hogy*

$$\lim_{n\to\infty} b_n = A = \lim_{n\to\infty} c_n,$$

*akkor* $a_n$ *is konvergens és* $\lim_{n\to\infty} a_n = A$.

Azaz ha egy bűnöző ($a_n$) élete során valamikortól ($N$) mindkét oldalára kerül egy-egy rendőr ($b_n$ és $c_n$), akik bemennek a börtönbe ($A$), akkor a bűnözőnek is be kell mennie a börtönba ($A$).

## Tétel (Speciális rendőrelv)

*Ha* $b_n \leq a_n$ *valamilyen* $N \leq n \in \mathbb{N}$ *esetén*

- $\lim_{n\to\infty} b_n = \infty \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = \infty$
- $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty \Rightarrow \lim_{n\to\infty} b_n = -\infty$

# Rendőrelv

## Tétel (Rendőrelv)

*Ha* $b_n \leq a_n \leq c_n$ *valamilyen* $N \leq n \in \mathbb{N}$ *esetén, továbbá* $b_n$ *és* $c_n$ *konvergens úgy, hogy*

$$\lim_{n\to\infty} b_n = A = \lim_{n\to\infty} c_n,$$

*akkor* $a_n$ *is konvergens és* $\lim_{n\to\infty} a_n = A$.

Azaz ha egy bűnöző ($a_n$) élete során valamikortól ($N$) mindkét oldalára kerül egy-egy rendőr ($b_n$ és $c_n$), akik bemennek a börtönbe ($A$), akkor a bűnözőnek is be kell mennie a börtönba ($A$).

## Tétel (Speciális rendőrelv)

*Ha* $b_n \leq a_n$ *valamilyen* $N \leq n \in \mathbb{N}$ *esetén*

- $\lim_{n\to\infty} b_n = \infty \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = \infty$
- $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty \Rightarrow \lim_{n\to\infty} b_n = -\infty$

# Példa

7. példa Határozzuk meg a $\sqrt[n]{2n^2 - n + 4}$ sorozat határértékét.

# Példa

7. példa Határozzuk meg a $\sqrt[n]{2n^2 - n + 4}$ sorozat határértékét.
A rendőrelvet fogjuk alkalmazni:

$$\sqrt[n]{n} \cdot \sqrt[n]{n} = \sqrt[n]{n^2} \overset{3 \leq n}{\leq} \sqrt[n]{2n^2 - n + 4} \overset{4 \leq n}{\leq} \sqrt[n]{2n^2} = \sqrt[n]{2} \cdot \sqrt[n]{n} \cdot \sqrt[n]{n}$$

Az első egyenlőtlenség azért igaz, mert $2n^2$-ből $n - 4$ helyett $n^2$-et vonunk le, ami $n = 3$-tól kezdve nagyobb levonást jelent.

# Példa

7. példa Határozzuk meg a $\sqrt[n]{2n^2 - n + 4}$ sorozat határértékét.
A rendőrelvet fogjuk alkalmazni:

$$\sqrt[n]{n} \cdot \sqrt[n]{n} = \sqrt[n]{n^2} \overset{3 \leq n}{\leq} \sqrt[n]{2n^2 - n + 4} \overset{4 \leq n}{\leq} \sqrt[n]{2n^2} = \sqrt[n]{2} \cdot \sqrt[n]{n} \cdot \sqrt[n]{n}$$

Az első egyenlőtlenség azért igaz, mert $2n^2$-ből $n - 4$ helyett $n^2$-et vonunk le, ami $n = 3$-tól kezdve nagyobb levonást jelent.
A második egyenlőtlenség azért igaz, mert $n - 4$ helyett nem vonunk le semmit, ami $n = 4$-től kezdve növelést jelent.

# Példa

7. példa Határozzuk meg a $\sqrt[n]{2n^2 - n + 4}$ sorozat határértékét.
A rendőrelvet fogjuk alkalmazni:

$$\sqrt[n]{n} \cdot \sqrt[n]{n} = \sqrt[n]{n^2} \overset{3 \leq n}{\leq} \sqrt[n]{2n^2 - n + 4} \overset{4 \leq n}{\leq} \sqrt[n]{2n^2} = \sqrt[n]{2} \cdot \sqrt[n]{n} \cdot \sqrt[n]{n}$$

Az első egyenlőtlenség azért igaz, mert $2n^2$-ből $n - 4$ helyett $n^2$-et vonunk le, ami $n = 3$-tól kezdve nagyobb levonást jelent.
A második egyenlőtlenség azért igaz, mert $n - 4$ helyett nem vonunk le semmit, ami $n = 4$-től kezdve növelést jelent.
A bal és jobb oldalon is mindkét kifejezésben véges sok 1-hez tartó sorozat szorzata van (2 és 3 db), ami 1-hez tart, így a rendőrelv miatt a köztük lévő, feladatban adott sorozat is 1-hez tart.

# Példa

7. példa Határozzuk meg a $\sqrt[n]{2n^2 - n + 4}$ sorozat határértékét.
A rendőrelvet fogjuk alkalmazni:

$$\sqrt[n]{n} \cdot \sqrt[n]{n} = \sqrt[n]{n^2} \overset{3 \le n}{\le} \sqrt[n]{2n^2 - n + 4} \overset{4 \le n}{\le} \sqrt[n]{2n^2} = \sqrt[n]{2} \cdot \sqrt[n]{n} \cdot \sqrt[n]{n}$$

Az első egyenlőtlenség azért igaz, mert $2n^2$-ből $n - 4$ helyett $n^2$-et vonunk le, ami $n = 3$-tól kezdve nagyobb levonást jelent.
A második egyenlőtlenség azért igaz, mert $n - 4$ helyett nem vonunk le semmit, ami $n = 4$-től kezdve növelést jelent.
A bal és jobb oldalon is mindkét kifejezésben véges sok 1-hez tartó sorozat szorzata van (2 és 3 db), ami 1-hez tart, így a rendőrelv miatt a köztük lévő, feladatban adott sorozat is 1-hez tart.

# Példa

8. példa Határozzuk meg az $\sqrt[n]{\dfrac{2^n+5^n}{3^n+4^n}}$ sorozat határértékét.

# Példa

8. példa Határozzuk meg az $\sqrt[n]{\dfrac{2^n+5^n}{3^n+4^n}}$ sorozat határértékét.

A rendőrelvet fogjuk alkalmazni:

$$\sqrt[n]{\frac{1}{2}}\cdot\frac{5}{4}=\sqrt[n]{\frac{5^n}{4^n+4^n}} \quad\le\quad \sqrt[n]{\frac{2^n+5^n}{3^n+4^n}} \quad\le\quad \sqrt[n]{\frac{5^n+5^n}{4^n}}=\sqrt[n]{2}\cdot\frac{5}{4}$$

# Példa

8. példa Határozzuk meg az $\sqrt[n]{\dfrac{2^n+5^n}{3^n+4^n}}$ sorozat határértékét.

A rendőrelvet fogjuk alkalmazni:

$$\sqrt[n]{\frac{1}{2}}\cdot\frac{5}{4}=\sqrt[n]{\frac{5^n}{4^n+4^n}}\quad\leq\quad\sqrt[n]{\frac{2^n+5^n}{3^n+4^n}}\quad\leq\quad\sqrt[n]{\frac{5^n+5^n}{4^n}}=\sqrt[n]{2}\cdot\frac{5}{4}$$

A becslésnél mindig figyelni kell arra, hogy a legnagyobb nagyságrendek maradjanak meg. Számlálóban $5^n$-en, nevezebőn $4^n$-en. Csak az együtthatók valtozhatnak, mert azt az $\sqrt[n]{\cdot}$ megeszi.

# Példa

8. példa Határozzuk meg az $\sqrt[n]{\dfrac{2^n+5^n}{3^n+4^n}}$ sorozat határértékét.

A rendőrelvet fogjuk alkalmazni:

$$\sqrt[n]{\frac{1}{2}}\cdot\frac{5}{4}=\sqrt[n]{\frac{5^n}{4^n+4^n}} \quad\leq\quad \sqrt[n]{\frac{2^n+5^n}{3^n+4^n}} \quad\leq\quad \sqrt[n]{\frac{5^n+5^n}{4^n}}=\sqrt[n]{2}\cdot\frac{5}{4}$$

A becslésnél mindig figyelni kell arra, hogy a legnagyobb nagyságrendek maradjanak meg. Számlálóban $5^n$-en, nevezebőn $4^n$-en. Csak az együtthatók valtozhatnak, mert azt az $\sqrt[n]{\cdot}$ megeszi.
A bal oldali egyenlőtlenség igaz, mert az gyökjelen belül lévő tört számlálóját csökkentettük ($2^n$ elhagyva), nevezőjét növeltük($3^n$ helyett $4^n$).

# Példa

8. példa Határozzuk meg az $\sqrt[n]{\dfrac{2^n+5^n}{3^n+4^n}}$ sorozat határértékét.

A rendőrelvet fogjuk alkalmazni:

$$\sqrt[n]{\frac{1}{2}}\cdot\frac{5}{4}=\sqrt[n]{\frac{5^n}{4^n+4^n}}\quad\leq\quad\sqrt[n]{\frac{2^n+5^n}{3^n+4^n}}\quad\leq\quad\sqrt[n]{\frac{5^n+5^n}{4^n}}=\sqrt[n]{2}\cdot\frac{5}{4}$$

A becslésnél mindig figyelni kell arra, hogy a legnagyobb nagyságrendek maradjanak meg. Számlálóban $5^n$-en, nevezebőn $4^n$-en. Csak az együtthatók valtozhatnak, mert azt az $\sqrt[n]{\cdot}$ megeszi.

A bal oldali egyenlőtlenség igaz, mert az gyökjelen belül lévő tört számlálóját csökkentettük ($2^n$ elhagyva), nevezőjét növeltük($3^n$ helyett $4^n$).

A jobb oldai egyenlőtlenség igaz, mert az gyökjelen belül lévő tört számlálóját növeltük ($2^n$ helyett $5^n$), nevezőjét csökkentettük($2^n$ elhagyva).

# Példa

8. példa Határozzuk meg az $\sqrt[n]{\dfrac{2^n+5^n}{3^n+4^n}}$ sorozat határértékét.

A rendőrelvet fogjuk alkalmazni:

$$\sqrt[n]{\frac{1}{2}}\cdot\frac{5}{4}=\sqrt[n]{\frac{5^n}{4^n+4^n}} \quad\leq\quad \sqrt[n]{\frac{2^n+5^n}{3^n+4^n}} \quad\leq\quad \sqrt[n]{\frac{5^n+5^n}{4^n}}=\sqrt[n]{2}\cdot\frac{5}{4}$$

A becslésnél mindig figyelni kell arra, hogy a legnagyobb nagyságrendek maradjanak meg. Számlálóban $5^n$-en, nevezebőn $4^n$-en. Csak az együtthatók valtozhatnak, mert azt az $\sqrt[n]{\cdot}$ megeszi.

A bal oldali egyenlőtlenség igaz, mert az gyökjelen belül lévő tört számlálóját csökkentettük ($2^n$ elhagyva), nevezőjét növeltük($3^n$ helyett $4^n$).

A jobb oldai egyenlőtlenség igaz, mert az gyökjelen belül lévő tört számlálóját növeltük ($2^n$ helyett $5^n$), nevezőjét csökkentettük($2^n$ elhagyva).

A bal és jobb oldalon is mindkét kifejezésben véges két 1-hez tartó sorozat van szorozva $\frac{5}{4}$-el, ami $\frac{5}{4}$-hez tart, így a rendőrelv miatt a köztük lévő, feladatban adott sorozat is $\frac{5}{4}$-hez tart.

# Nagyságrendek

A következő nagyságrendek használatával is meghatározhatjuk egyes sorozatok határértékét:

$$\log n << \sqrt[k]{n} << n << n^k << k^n << n! << n^n$$

ahol $n$ a sorozat indexe és $1 < k \in \mathbb{N}$.

# Nagyságrendek

A következő nagyságrendek használatával is meghatározhatjuk egyes sorozatok határértékét:

$$\log n << \sqrt[k]{n} << n << n^k << k^n << n! << n^n$$

ahol $n$ a sorozat indexe és $1 < k \in \mathbb{N}$.
Ha két különböző nagyságrendű sorozat van elosztva egymással, akkor a nagyobb nagyságrend mindig legyőzi a kisebbet és gyorsabban tart $\infty$-hez.

# Nagyságrendek

A következő nagyságrendek használatával is meghatározhatjuk egyes sorozatok határértékét:

$$\log n << \sqrt[k]{n} << n << n^k << k^n << n! << n^n$$

ahol $n$ a sorozat indexe és $1 < k \in \mathbb{N}$.
Ha két különböző nagyságrendű sorozat van elosztva egymással, akkor a nagyobb nagyságrend mindig legyőzi a kisebbet és gyorsabban tart $\infty$-hez.

9. példa Határozzuk meg a $\dfrac{2^n + n!}{n^{2020} + n^n}$ sorozat határértékét.

# Nagyságrendek

A következő nagyságrendek használatával is meghatározhatjuk egyes sorozatok határértékét:

$$\log n << \sqrt[k]{n} << n << n^k << k^n << n! << n^n$$

ahol $n$ a sorozat indexe és $1 < k \in \mathbb{N}$.
Ha két különböző nagyságrendű sorozat van elosztva egymással, akkor a nagyobb nagyságrend mindig legyőzi a kisebbet és gyorsabban tart $\infty$-hez.

9. példa Határozzuk meg a $\dfrac{2^n + n!}{n^{2020} + n^n}$ sorozat határértékét.

A nagyságrendi sor szerint $n^n$ a legerősebb a sorozatban szereplő tagok közül, ezért ezzel egyszerűsítve:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2^n + n!}{n^{2020} + n^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{2^n}{n^n} + \frac{n!}{n^n}}{\frac{n^{2020}}{n^n} + 1} = \frac{0+0}{0+1} = 0.$$

## Nevezetes határértékek – hatvány + exponenciális

Vizsgáljuk meg a $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ határértéket!

# Nevezetes határértékek – hatvány + exponenciális

Vizsgáljuk meg a $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ határértéket!

Kérdés: Melyik az igaz az alábbi logikák közül?

- A hatvány alapjában az $\frac{1}{n}$ mindig pozitív, tehát az alap 1-nél nagyobb. 1-nél nagyobb kifejezés hatványa pedig $\infty$-be tart.

## Nevezetes határértékek – hatvány + exponenciális

Vizsgáljuk meg a $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ határértéket!

Kérdés: Melyik az igaz az alábbi logikák közül?

- A hatvány alapjában az $\frac{1}{n}$ mindig pozitív, tehát az alap 1-nél nagyobb. 1-nél nagyobb kifejezés hatványa pedig $\infty$-be tart.
- A hatvány alapja igaz, hogy 1-nél nagyobb, de azért 1-hez tart, és az 1 bármelyik hatványa 1-hez tart.

Válasz:

## Nevezetes határértékek – hatvány + exponenciális

Vizsgáljuk meg a $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ határértéket!

Kérdés: Melyik az igaz az alábbi logikák közül?

- A hatvány alapjában az $\frac{1}{n}$ mindig pozitív, tehát az alap 1-nél nagyobb. 1-nél nagyobb kifejezés hatványa pedig $\infty$-be tart.
- A hatvány alapja igaz, hogy 1-nél nagyobb, de azért 1-hez tart, és az 1 bármelyik hatványa 1-hez tart.

Válasz: EGYIK SEM, az alap 1-hez, a kitevő meg $\infty$-hez tart, de ezek egyszerre történnek, nem egymás után valamilyen sorrendben, ahogy fent szerepel.

# Nevezetes határértékek – hatvány + exponenciális

Vizsgáljuk meg a $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$ határértéket!

Kérdés: Melyik az igaz az alábbi logikák közül?

- A hatvány alapjában az $\frac{1}{n}$ mindig pozitív, tehát az alap 1-nél nagyobb. 1-nél nagyobb kifejezés hatványa pedig $\infty$-be tart.
- A hatvány alapja igaz, hogy 1-nél nagyobb, de azért 1-hez tart, és az 1 bármelyik hatványa 1-hez tart.

Válasz: EGYIK SEM, az alap 1-hez, a kitevő meg $\infty$-hez tart, de ezek egyszerre történnek, nem egymás után valamilyen sorrendben, ahogy fent szerepel.

Kérdés 2: De akkor van-e határérték és ha igen, akkor mi?

# Nevezetes határértékek – hatvány + exponenciális

Vizsgáljuk meg a $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ határértéket!

Kérdés: Melyik az igaz az alábbi logikák közül?

- A hatvány alapjában az $\frac{1}{n}$ mindig pozitív, tehát az alap 1-nél nagyobb. 1-nél nagyobb kifejezés hatványa pedig $\infty$-be tart.
- A hatvány alapja igaz, hogy 1-nél nagyobb, de azért 1-hez tart, és az 1 bármelyik hatványa 1-hez tart.

Válasz: EGYIK SEM, az alap 1-hez, a kitevő meg $\infty$-hez tart, de ezek egyszerre történnek, nem egymás után valamilyen sorrendben, ahogy fent szerepel.

Kérdés 2: De akkor van-e határérték és ha igen, akkor mi?

Válasz 2: Van határérték, belátjuk, hogy a sorozat monoton és korlátos:

**Definíció**

$$e := \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \approx 2.7182818285.$$

# Az $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ sorozat monotonitása

**Tétel (Számtani-mértani közép közti egyenlőtlenség)**

*Legyen adott* $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}^+$*, ekkor* $\sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n} \leq \dfrac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}$.

# Az $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ sorozat monotonitása

**Tétel (Számtani-mértani közép közti egyenlőtlenség)**

*Legyen adott* $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}^+$, *ekkor* $\sqrt[n]{x_1 x_2 \ldots x_n} \leq \dfrac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}$.

Legyen $\forall i = 1, \ldots, n : x_i = 1 + \frac{1}{n}$ és $x_{n+1} = 1$, alkalmazva az előbbi tételt:

$$\sqrt[n+1]{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \cdot 1} \leq \frac{n\left(1 + \frac{1}{n}\right) + 1}{n+1}$$

# Az $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ sorozat monotonitása

**Tétel (Számtani-mértani közép közti egyenlőtlenség)**

*Legyen adott* $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}^+$*, ekkor* $\sqrt[n]{x_1 x_2 \ldots x_n} \leq \dfrac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}$.

Legyen $\forall i = 1, \ldots, n : x_i = 1 + \frac{1}{n}$ és $x_{n+1} = 1$, alkalmazva az előbbi tételt:

$$\sqrt[n+1]{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \cdot 1} \leq \frac{n\left(1 + \frac{1}{n}\right) + 1}{n+1} = \frac{n+1+1}{n+1} = 1 + \frac{1}{n+1}$$

# Az $a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ sorozat monotonitása

**Tétel (Számtani-mértani közép közti egyenlőtlenség)**

*Legyen adott* $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}^+$*, ekkor* $\sqrt[n]{x_1 x_2 \ldots x_n} \leq \dfrac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}$.

Legyen $\forall i = 1, \ldots, n : x_i = 1 + \frac{1}{n}$ és $x_{n+1} = 1$, alkalmazva az előbbi tételt:

$$\sqrt[n+1]{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \cdot 1} \leq \frac{n\left(1+\frac{1}{n}\right)+1}{n+1} = \frac{n+1+1}{n+1} = 1 + \frac{1}{n+1}$$

Véve mindkét oldal $n+1$-edik hatványát:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \leq \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1},$$

tehát $a_n \leq a_{n+1}$, vagyis $a_n$ sorozat szigorúan monoton nő.

# Az $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ sorozat korlátossága

Legyen $\forall i = 1, \ldots, n : x_i = 1 + \frac{1}{n}$ és $x_{n+1} = x_{n+2} = \frac{1}{2}$, alkalmazva az előbbi tételt:

$$\sqrt[n+2]{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}} \leq \frac{n\left(1 + \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}}{n+2}$$

# Az $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ sorozat korlátossága

Legyen $\forall i = 1, \ldots, n : x_i = 1 + \frac{1}{n}$ és $x_{n+1} = x_{n+2} = \frac{1}{2}$, alkalmazva az előbbi tételt:

$$\sqrt[n+2]{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}} \leq \frac{n\left(1 + \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}}{n+2} = \frac{n+1+1}{n+2} = 1$$

# Az $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ sorozat korlátossága

Legyen $\forall i = 1, \ldots, n : x_i = 1 + \frac{1}{n}$ és $x_{n+1} = x_{n+2} = \frac{1}{2}$, alkalmazva az előbbi tételt:

$$\sqrt[n+2]{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}} \leq \frac{n\left(1 + \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}}{n+2} = \frac{n+1+1}{n+2} = 1$$

Véve mindkét oldal $n+2$-edik hatványát:

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \cdot \frac{1}{4} \leq 1$$

# Az $a_n = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$ sorozat korlátossága

Legyen $\forall i = 1, \ldots, n : x_i = 1 + \frac{1}{n}$ és $x_{n+1} = x_{n+2} = \frac{1}{2}$, alkalmazva az előbbi tételt:

$$\sqrt[n+2]{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}} \leq \frac{n\left(1+\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}}{n+2} = \frac{n+1+1}{n+2} = 1$$

Véve mindkét oldal $n+2$-edik hatványát:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \cdot \frac{1}{4} \leq 1$$

Átszorozva 4-el, kapjuk, hogy

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \leq 4,$$

tehát $\forall n : a_n \leq 4$ és a monotonitásból következik, hogy $2 = a_1 \leq a_n$, vagyis $a_n$ korlátos.

# Tétel(ek) "sorozat a sorozatodikon" típusú határértékre

## Tétel

$\lim\limits_{n\to\infty}(1+a_n)^{b_n} = e^c,\ ha$

1. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$
2. $\lim\limits_{n\to\infty} |b_n| = \infty$
3. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \cdot b_n = c.$

# Tétel(ek) "sorozat a sorozatodikon" típusú határértékre

## Tétel

$\lim_{n\to\infty}(1+a_n)^{b_n} = e^c$, *ha*

1. $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$
2. $\lim_{n\to\infty} |b_n| = \infty$
3. $\lim_{n\to\infty} a_n \cdot b_n = c$.

Az első két pont csak a setup, azt hivatott elérni, hogy az alap 1-hez tartson, a kitevő pedig végtelen abszolút értékű legyen. Tehát az $1^\infty$ típusú határérték a bennük szereplő sorozatok szorzatának határértékétől ($c$) függnek.

# Tétel(ek) "sorozat a sorozatodikon" típusú határértékre

## Tétel

$\lim_{n\to\infty}(1+a_n)^{b_n}=e^c$, *ha*

1. $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$
2. $\lim_{n\to\infty} |b_n| = \infty$
3. $\lim_{n\to\infty} a_n \cdot b_n = c$.

Az első két pont csak a setup, azt hivatott elérni, hogy az alap 1-hez tartson, a kitevő pedig végtelen abszolút értékű legyen. Tehát az $1^\infty$ típusú határérték a bennük szereplő sorozatok szorzatának határértékétől ($c$) függnek. Ez kicsivel több, mint az alábbi, szintén alkalmazható tétel:

## Tétel

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = e^x$$

# Példa

10. példa Határozzuk meg az $a_n = \left(\frac{3n+2}{3n-1}\right)^{2n-1}$ sorozat határértékét.

# Példa

10. példa Határozzuk meg az $a_n = \left(\frac{3n+2}{3n-1}\right)^{2n-1}$ sorozat határértékét.

Az alap és a kitevő is függ $n$-től, ezért próbáljuk meg alkalmaznia az előbbi tételt. Alapból a sorozat nem $(1+a_n)^{b_n}$ típusú, ezért kis ügyeskedéssel át kell alakítanunk:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3n+2}{3n-1}\right)^{2n-1} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{3n-1+3}{3n-1}\right)^{2n-1} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{3}{3n-1}\right)^{2n-1}$$

Tehát szereposztás szerint $a_n = \frac{3}{3n-1}$ és $b_n = 2n-1$. Vizsgáljuk meg a tétel feltételeit:

# Példa

10. példa Határozzuk meg az $a_n = \left(\frac{3n+2}{3n-1}\right)^{2n-1}$ sorozat határértékét.

Az alap és a kitevő is függ $n$-től, ezért próbáljuk meg alkalmaznia az előbbi tételt. Alapból a sorozat nem $(1+a_n)^{b_n}$ típusú, ezért kis ügyeskedéssel át kell alakítanunk:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3n+2}{3n-1}\right)^{2n-1} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{3n-1+3}{3n-1}\right)^{2n-1} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{3}{3n-1}\right)^{2n-1}$$

Tehát szereposztás szerint $a_n = \frac{3}{3n-1}$ és $b_n = 2n-1$. Vizsgáljuk meg a tétel feltételeit:

1. $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\frac{3}{3n-1} = 0$ ✓

# Példa

10. példa Határozzuk meg az $a_n = \left(\frac{3n+2}{3n-1}\right)^{2n-1}$ sorozat határértékét.

Az alap és a kitevő is függ $n$-től, ezért próbáljuk meg alkalmaznia az előbbi tételt. Alapból a sorozat nem $(1+a_n)^{b_n}$ típusú, ezért kis ügyeskedéssel át kell alakítanunk:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3n+2}{3n-1}\right)^{2n-1} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{3n-1+3}{3n-1}\right)^{2n-1} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{3}{3n-1}\right)^{2n-1}$$

Tehát szereposztás szerint $a_n = \frac{3}{3n-1}$ és $b_n = 2n-1$. Vizsgáljuk meg a tétel feltételeit:

1. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{3}{3n-1} = 0$ ✓
2. $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \lim\limits_{n\to\infty} 2n-1 = \infty$ ✓

# Példa

10. példa Határozzuk meg az $a_n = \left(\frac{3n+2}{3n-1}\right)^{2n-1}$ sorozat határértékét.

Az alap és a kitevő is függ $n$-től, ezért próbáljuk meg alkalmaznia az előbbi tételt. Alapból a sorozat nem $(1+a_n)^{b_n}$ típusú, ezért kis ügyeskedéssel át kell alakítanunk:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3n+2}{3n-1}\right)^{2n-1} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{3n-1+3}{3n-1}\right)^{2n-1} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{3}{3n-1}\right)^{2n-1} = e^2$$

Tehát szereposztás szerint $a_n = \frac{3}{3n-1}$ és $b_n = 2n-1$. Vizsgáljuk meg a tétel feltételeit:

1. $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{3}{3n-1} = 0$ ✓
2. $\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} 2n-1 = \infty$ ✓
3. $\lim_{n\to\infty} a_n \cdot b_n = \lim_{n\to\infty} \frac{6n-3}{3n-1} = \frac{6}{3} = 2(=c)$, mert két azonos (első)fokú polinom hányadosának határértéke a föegyütthatók hányadosa.

Tehát a tételünk alapján $\lim_{n\to\infty} a_n = e^2$.