

Sorozatok

Matematika A2x

2020 ősz

Definíció

Definíció

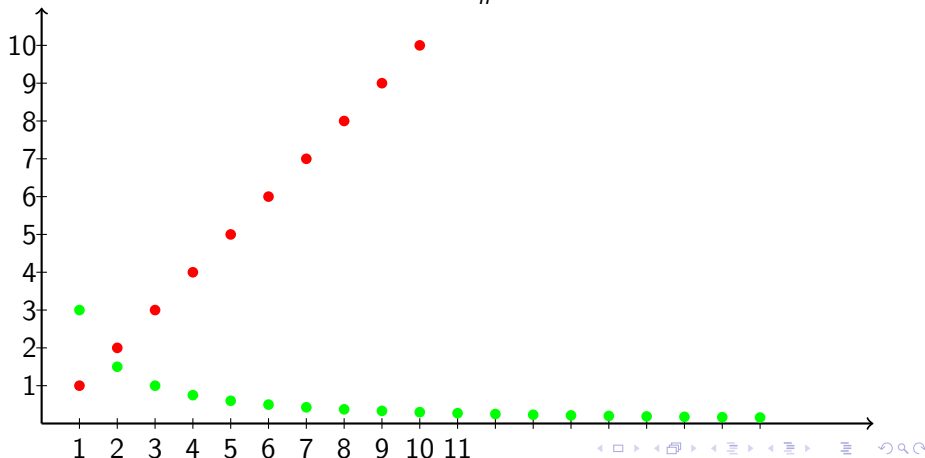
Az $a : \mathbb{N}^+ \mapsto \mathbb{R}$ függvényt *valós számsorozatnak (röviden sorozatnak) nevezünk.*

Egy tetszőleges $n \in \mathbb{N}^+$ esetén az $a(n)$ jelölés helyett az a_n jelölést használjuk, és azt mondjuk, hogy a_n a sorozat n -edik eleme. Ha egyszerre több sorozatról beszélünk, akkor csak az egyiket jelölhetjük a -el, a többit b , c betűkkel. Láttuk, hogy a_n az a sorozat n -edik elemét jelöli, de ha ez nem okoz félreértést, az egész sorozatot is jelölheti. Néha a sorozat értelmezési tartománya nem a teljes $\mathbb{N}$, hanem valamilyen k értéktől kezdődik pl $\{8, 9, 10, \dots\}$. Ezt nem mindig jelezzük külön.

Sorozat szemléltetése

Egy sorozat első néhány eleme sosem határozza meg a sorozatot, de jól szemléltetheti azt.

1. példa Ábrázoljuk az $a_n = n$ és $b_n = \frac{3}{n}$ sorozat első 10 tagját.



Sorozat korlátossága

Definíció

Azt mondjuk, hogy az a_n sorozat

- *felülről korlátos*, ha $\exists K \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N} : a_n \leq K$
- *alulról korlátos*, ha $\exists k \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N} : a_n \geq k$
- *korlátos*, ha alulról és felülről is korlátos.
- *legkisebb felső korlátja* L , ha $\forall n : a_n \leq L$, de $\forall C < L, \exists n : a_n > C$
- *legnagyobb alsó korlátja* l , ha $\forall n : a_n \geq l$, de $\forall c > l, \exists n : a_n < c$

Az előző példában lévő a_n sorozat alulról korlátos, de felülről nem, ezért nem korlátos.

Az b_n -nek a 3 felső korlát, és mivel a sorozat minden eleme pozitív a 0 alsó korlát, tehát b_n korlátos.

Nem minden esetben érdemes megkeresni a legkisebb felső és legnagyobb alsó korlátot. Nekünk általában csak az kell, hogy egyet találjunk.

Sorozat monotonitása

Definíció

Azt mondjuk, hogy az a_n sorozat

- *monoton növvő*, ha $\forall n \in \mathbb{N} : a_n \leq a_{n+1}$
- *monoton csökkenő*, ha $\forall n \in \mathbb{N} : a_n \geq a_{n+1}$
- *szigorúan monoton növvő*, ha $\forall n \in \mathbb{N} : a_n < a_{n+1}$
- *szigorúan monoton csökkenő*, ha $\forall n \in \mathbb{N} : a_n > a_{n+1}$

Az előző példában szereplő a_n szigorúan monoton növvő, b_n pedig szigorúan monoton csökkenő.

A monotonitásnál mindig két szomszédos elem kapcsolatát kell tehát megvizsgálni. Ezt feladattól függően több módon is megtehetjük:

$$a_n \leq a_{n+1} \Leftrightarrow a_n - a_{n+1} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{a_n}{a_{n+1}} \leq 1 \quad (a_n \cdot a_{n+1} > 0)$$

Sorozat határértéke

Definíció

Az a_n sorozat *konvergens* és *határértéke* $A \in \mathbb{R}$, ha

$$\forall \epsilon > 0, \exists N(\epsilon) \in \mathbb{N}, \forall n > N(\epsilon) : |a_n - A| < \epsilon$$

Jelölés: $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A$, $\lim a_n = A$ vagy $a_n \rightarrow A$

Sorozat határértéke

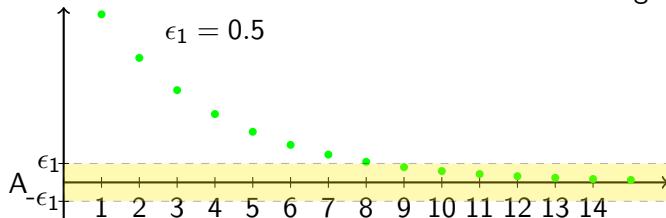
Definíció

Az a_n sorozat *konvergens* és *határértéke* $A \in \mathbb{R}$, ha

$$\forall \epsilon > 0, \exists N(\epsilon) \in \mathbb{N}, \forall n > N(\epsilon) : |a_n - A| < \epsilon$$

Jelölés: $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A$, $\lim a_n = A$ vagy $a_n \rightarrow A$

Azaz minden pozitív ϵ számhoz tudunk találni egy küszöbindexet, hogy onnantól kezdve a sorozat és a határérték eltérése legfeljebb ϵ .



Sorozat határértéke

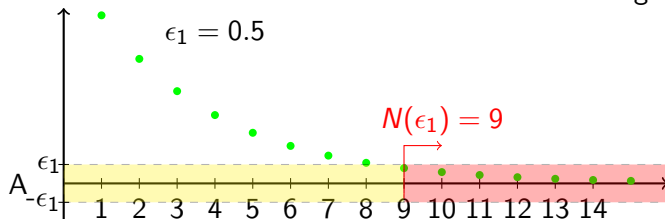
Definíció

Az a_n sorozat *konvergens* és *határértéke* $A \in \mathbb{R}$, ha

$$\forall \epsilon > 0, \exists N(\epsilon) \in \mathbb{N}, \forall n > N(\epsilon) : |a_n - A| < \epsilon$$

Jelölés: $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A$, $\lim a_n = A$ vagy $a_n \rightarrow A$

Azaz minden pozitív ϵ számhoz tudunk találni egy küszöbindexet, hogy onnantól kezdve a sorozat és a határérték eltérése legfeljebb ϵ .



Sorozat határértéke

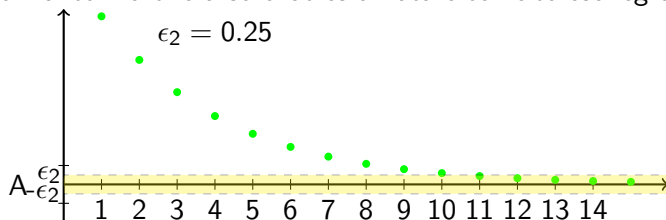
Definíció

Az a_n sorozat *konvergens* és *határértéke* $A \in \mathbb{R}$, ha

$$\forall \epsilon > 0, \exists N(\epsilon) \in \mathbb{N}, \forall n > N(\epsilon) : |a_n - A| < \epsilon$$

Jelölés: $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A$, $\lim a_n = A$ vagy $a_n \rightarrow A$

Azaz minden pozitív ϵ számhoz tudunk találni egy küszöbindexet, hogy onnantól kezdve a sorozat és a határérték eltérése legfeljebb ϵ .



Sorozat határértéke

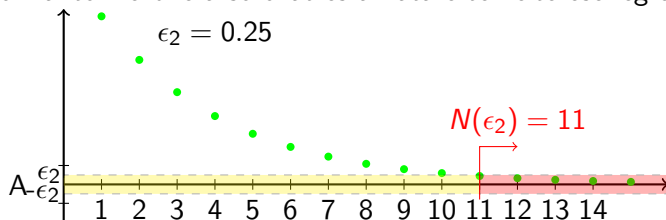
Definíció

Az a_n sorozat *konvergens* és *határértéke* $A \in \mathbb{R}$, ha

$$\forall \epsilon > 0, \exists N(\epsilon) \in \mathbb{N}, \forall n > N(\epsilon) : |a_n - A| < \epsilon$$

Jelölés: $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A$, $\lim a_n = A$ vagy $a_n \rightarrow A$

Azaz minden pozitív ϵ számhoz tudunk találni egy küszöbindexet, hogy onnantól kezdve a sorozat és a határérték eltérése legfeljebb ϵ .



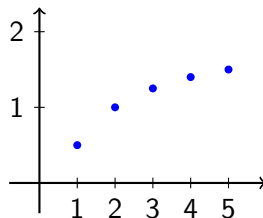
Példa

1. **példa** Vizsgáljuk az $a_n = \frac{2n-1}{n+1}$ sorozatot korlátosság, monotonitás és határérték szempontjából.

Példa

1. **példa** Vizsgáljuk az $a_n = \frac{2n-1}{n+1}$ sorozatot korlátosság, monotonitás és határérték szempontjából.

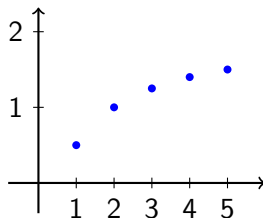
A sorozat első néhány eleme:
0.5, 1, 1.25, 1.4, 1.5, ...



Példa

1. **példa** Vizsgáljuk az $a_n = \frac{2n-1}{n+1}$ sorozatot korlátosság, monotonitás és határérték szempontjából.

A sorozat első néhány eleme:
 $0.5, 1, 1.25, 1.4, 1.5, \dots$

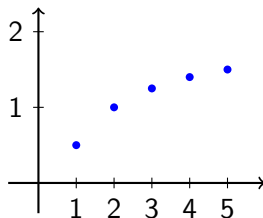


Legyen most n elég nagy. Ekkor a számláló $2n$ értékéből levonjuk-e az 1-et vagy sem, az nem nagyon számít. Ugyanúgy a nevezőnél sem számít sokat az a $+1$. Ennek alapján nagy n értékre a számláló kb kétszer akkora, mint a nevező. A sorozat első pár tagja és az előbbi gondolat után megfogalmazhatjuk az alábbi **sejtéseket**:

Példa

1. **példa** Vizsgáljuk az $a_n = \frac{2n-1}{n+1}$ sorozatot korlátosság, monotonitás és határérték szempontjából.

A sorozat első néhány eleme:
0.5, 1, 1.25, 1.4, 1.5, ...



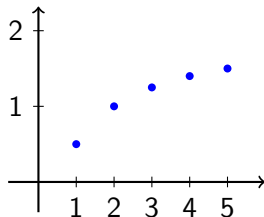
Legyen most n elég nagy. Ekkor a számláló $2n$ értékéből levonjuk-e az 1-et vagy sem, az nem nagyon számít. Ugyanúgy a nevezőnél sem számít sokat az a $+1$. Ennek alapján nagy n értékre a számláló kb kétszer akkora, mint a nevező. A sorozat első pár tagja és az előbbi gondolat után megfogalmazhatjuk az alábbi **sejtéseket**:

- szigorúan monoton növő;

Példa

1. **példa** Vizsgáljuk az $a_n = \frac{2n-1}{n+1}$ sorozatot korlátosság, monotonitás és határérték szempontjából.

A sorozat első néhány eleme:
0.5, 1, 1.25, 1.4, 1.5, ...



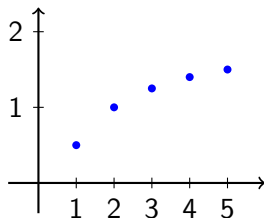
Legyen most n elég nagy. Ekkor a számláló $2n$ értékéből levonjuk-e az 1-et vagy sem, az nem nagyon számít. Ugyanúgy a nevezőnél sem számít sokat az a $+1$. Ennek alapján nagy n értékre a számláló kb kétszer akkora, mint a nevező. A sorozat első pár tagja és az előbbi gondolat után megfogalmazhatjuk az alábbi **sejtéseket**:

- szigorúan monoton növekvő;
- konvergens és $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 2$

Példa

1. **példa** Vizsgáljuk az $a_n = \frac{2n-1}{n+1}$ sorozatot korlátosság, monotonitás és határérték szempontjából.

A sorozat első néhány eleme:
0.5, 1, 1.25, 1.4, 1.5, ...



Legyen most n elég nagy. Ekkor a számláló $2n$ értékéből levonjuk-e az 1-et vagy sem, az nem nagyon számít. Ugyanúgy a nevezőnél sem számít sokat az a $+1$. Ennek alapján nagy n értékre a számláló kb kétszer akkora, mint a nevező. A sorozat első pár tagja és az előbbi gondolat után megfogalmazhatjuk az alábbi **sejtéseket**:

- szigorúan monoton növe;
- konvergens és $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 2$
- korlátos, alsó korlátja 0.5, a felső pedig a 2

Példa

Most bebizonyítjuk, hogy a sorozat határértéke 2.

Példa

Most bebizonyítjuk, hogy a sorozat határértéke 2.

Definíció szerinti határérték-számításnál mindig az $|a_n - A| < \epsilon$ egyenlőtlenségből indulunk, és ekvivalens átalakítások során át belátjuk, hogy minden ϵ -ra találunk olyan $N(\epsilon)$ értéket, ahonnan kezdve már igaz lesz:

$$\left| \frac{2n-1}{n+1} - 2 \right| < \epsilon \Leftrightarrow$$

Példa

Most bebizonyítjuk, hogy a sorozat határértéke 2.

Definíció szerinti határérték-számításnál mindig az $|a_n - A| < \epsilon$ egyenlőtlenségből indulunk, és ekvivalens átalakítások során át belátjuk, hogy minden ϵ -ra találunk olyan $N(\epsilon)$ értéket, ahonnan kezdve már igaz lesz:

$$\left| \frac{2n-1}{n+1} - 2 \right| < \epsilon \Leftrightarrow \left| \frac{2n-1-2(n+1)}{n+1} \right| < \epsilon \Leftrightarrow$$

Példa

Most bebizonyítjuk, hogy a sorozat határértéke 2.

Definíció szerinti határérték-számításnál mindig az $|a_n - A| < \epsilon$ egyenlőtlenségből indulunk, és ekvivalens átalakítások során át belátjuk, hogy minden ϵ -ra találunk olyan $N(\epsilon)$ értéket, ahonnan kezdve már igaz lesz:

$$\left| \frac{2n-1}{n+1} - 2 \right| < \epsilon \Leftrightarrow \left| \frac{2n-1-2(n+1)}{n+1} \right| < \epsilon \Leftrightarrow \frac{3}{n+1} < \epsilon \Leftrightarrow$$

Példa

Most bebizonyítjuk, hogy a sorozat határértéke 2.

Definíció szerinti határérték-számításnál mindig az $|a_n - A| < \epsilon$ egyenlőtlenségből indulunk, és ekvivalens átalakítások során át belátjuk, hogy minden ϵ -ra találunk olyan $N(\epsilon)$ értéket, ahonnan kezdve már igaz lesz:

$$\left| \frac{2n-1}{n+1} - 2 \right| < \epsilon \Leftrightarrow \left| \frac{2n-1-2(n+1)}{n+1} \right| < \epsilon \Leftrightarrow \frac{3}{n+1} < \epsilon \Leftrightarrow \frac{3}{\epsilon} - 1 < n$$

Legyen tehát $N(\epsilon) = \left\lfloor \frac{3}{\epsilon} - 1 \right\rfloor + 1 = \left\lfloor \frac{3}{\epsilon} \right\rfloor$, ahol $\lfloor \cdot \rfloor$ az alsó egészcsohány függvény. Azért adunk hozzá egyet, hogy biztosan jó küszöböt kapjunk. Itt sem a legkisebb küszöböt szükséges megállapítani. $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 2$.

Példa

Most bebizonyítjuk, hogy a sorozat határértéke 2.

Definíció szerinti határérték-számításnál mindig az $|a_n - A| < \epsilon$ egyenlőtlenségből indulunk, és ekvivalens átalakítások során át belátjuk, hogy minden ϵ -ra találunk olyan $N(\epsilon)$ értéket, ahonnan kezdve már igaz lesz:

$$\left| \frac{2n-1}{n+1} - 2 \right| < \epsilon \Leftrightarrow \left| \frac{2n-1-2(n+1)}{n+1} \right| < \epsilon \Leftrightarrow \frac{3}{n+1} < \epsilon \Leftrightarrow \frac{3}{\epsilon} - 1 < n$$

Legyen tehát $N(\epsilon) = \left\lfloor \frac{3}{\epsilon} - 1 \right\rfloor + 1 = \left\lfloor \frac{3}{\epsilon} \right\rfloor$, ahol $\lfloor \cdot \rfloor$ az alsó egészrész függvény. Azért adunk hozzá egyet, hogy biztosan jó küszöböt kapjunk. Itt sem a legkisebb küszöböt szükséges megállapítani. $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 2$.

A monotonitás vizsgálatának egyik módja, ha kivonjuk a határértékből a sorozatot: $2 - \frac{2n-1}{n+1} = \dots = \frac{3}{n+1}$, ami egyre kisebb, ahogy $n \rightarrow \infty$, ezért egyre közelebb kerülünk a 2-hoz $\Rightarrow a_n$ szigorúan monoton nő.

Példa

Megvizsgálhatjuk a monotonitást hagyományos módszerekkel is:

$$a_n \overset{?}{<} a_{n+1}$$

Példa

Megvizsgálhatjuk a monotonitást hagyományos módszerekkel is:

$$\frac{2n-1}{n+1} = a_n \stackrel{?}{<} a_{n+1} = \frac{2(n+1)-1}{(n+1)+1} = \frac{2n+1}{n+2}$$

Keresztbe szorzás után:

Példa

Megvizsgálhatjuk a monotonitást hagyományos módszerekkel is:

$$\frac{2n-1}{n+1} = a_n \stackrel{?}{<} a_{n+1} = \frac{2(n+1)-1}{(n+1)+1} = \frac{2n+1}{n+2}$$

Keresztbe szorzás után: $(n+2)(2n-1) \stackrel{?}{<} (2n+1)(n+1)$

Kibontva a zárójeleket:

Példa

Megvizsgálhatjuk a monotonitást hagyományos módszerekkel is:

$$\frac{2n-1}{n+1} = a_n \stackrel{?}{<} a_{n+1} = \frac{2(n+1)-1}{(n+1)+1} = \frac{2n+1}{n+2}$$

Keresztbe szorzás után: $(n+2)(2n-1) \stackrel{?}{<} (2n+1)(n+1)$

Kibontva a zárójeleket: $2n^2 + 3n - 2 \stackrel{?}{<} 2n^2 + 3n + 1$

Mindkét oldalból kivonva $(2n^2 + 3n)$ -et:

Példa

Megvizsgálhatjuk a monotonitást hagyományos módszerekkel is:

$$\frac{2n-1}{n+1} = a_n \stackrel{?}{<} a_{n+1} = \frac{2(n+1)-1}{(n+1)+1} = \frac{2n+1}{n+2}$$

Keresztbe szorzás után: $(n+2)(2n-1) \stackrel{?}{<} (2n+1)(n+1)$

Kibontva a zárójeleket: $2n^2 + 3n - 2 \stackrel{?}{<} 2n^2 + 3n + 1$

Mindkét oldalból kivonva $(2n^2 + 3n)$ -et: $-2 \stackrel{?}{<} 1$, ami n -től függetlenül igaz, ezért a kérdőjel eltűnik: $\forall n : a_n < a_{n+1} \Rightarrow a_n$ szigorúan monoton nő.

Példa

Megvizsgálhatjuk a monotonitást hagyományos módszerekkel is:

$$\frac{2n-1}{n+1} = a_n \stackrel{?}{<} a_{n+1} = \frac{2(n+1)-1}{(n+1)+1} = \frac{2n+1}{n+2}$$

Keresztbe szorzás után: $(n+2)(2n-1) \stackrel{?}{<} (2n+1)(n+1)$

Kibontva a zárójeleket: $2n^2 + 3n - 2 \stackrel{?}{<} 2n^2 + 3n + 1$

Mindkét oldalból kivonva $(2n^2 + 3n)$ -et: $-2 \stackrel{?}{<} 1$, ami n -től függetlenül igaz, ezért a kérdőjel eltűnik: $\forall n : a_n < a_{n+1} \Rightarrow a_n$ szigorúan monoton nő.

A korlátosságnál így már egyszerű a dolgunk, mert monoton növekedő sorozat mindig alulról korlátos, az első tag jó alsó korlátnak: $\forall n : \frac{1}{2} \leq a_n$.

Példa

Megvizsgálhatjuk a monotonitást hagyományos módszerekkel is:

$$\frac{2n-1}{n+1} = a_n \stackrel{?}{<} a_{n+1} = \frac{2(n+1)-1}{(n+1)+1} = \frac{2n+1}{n+2}$$

Keresztbe szorzás után: $(n+2)(2n-1) \stackrel{?}{<} (2n+1)(n+1)$

Kibontva a zárójeleket: $2n^2 + 3n - 2 \stackrel{?}{<} 2n^2 + 3n + 1$

Mindkét oldalból kivonva $(2n^2 + 3n)$ -et: $-2 \stackrel{?}{<} 1$, ami n -től függetlenül igaz, ezért a kérdőjel eltűnik: $\forall n : a_n < a_{n+1} \Rightarrow a_n$ szigorúan monoton nő.

A korlátosságnál így már egyszerű a dolgunk, mert monoton növekedő sorozat mindig alulról korlátos, az első tag jó alsó korlátnak: $\forall n : \frac{1}{2} \leq a_n$.

Most belátjuk, hogy a határértéket nem lépheti túl a_n a monotonitás miatt. Ugyanis ha lenne olyan a_L tagja a sorozatnak, ami nagyobb, mint 2, akkor az összes többi tag inentől kezdve nagyobb lesz mint a_L és az $\epsilon = a_L - 2$ értékhez nem találunk megfelelő küszöböt, ami ellentmondana a határérték definíciójának, ezért: $\forall n : a_n < 2$, tehát a_n korlátos.

Korlátosság – monotonitás – határérték

Az előbbi példa során már lényegében láttuk az alábbi tételek indoklását:

Tétel (Elégséges feltétel)

Ha az a_n sorozat monoton és korlátos, akkor konvergens.

A fenti tételt szokás "mozgólépcső" szabálynak is nevezni. Monoton növekvő sorozatoknál felfelé megyünk és a határérték a legkisebb felső korlát lesz, míg monoton csökkenés esetén lefelé megyünk és a határérték a legnagyobb alsó korlát.

Korlátosság – monotonitás – határérték

Az előbbi példa során már lényegében láttuk az alábbi tételek indoklását:

Tétel (Elégséges feltétel)

Ha az a_n sorozat monoton és korlátos, akkor konvergens.

A fenti tételt szokás "mozgólépcső" szabálynak is nevezni. Monoton növekvő sorozatoknál felfelé megyünk és a határérték a legkisebb felső korlát lesz, míg monoton csökkenés esetén lefelé megyünk és a határérték a legnagyobb alsó korlát.

Tétel (Szükséges feltétel)

Ha az a_n sorozat konvergens, akkor korlátos.

Ha van határérték, akkor annak bármilyen, mondjuk 1 sugarú környezetébe esik véges sok tagtól eltekintve az összes. A maradék véges sok tag pedig biztosan korlátos halmaz lesz.

Határérték tulajdonságai

Tétel

Legyen a_n és b_n két sorozat, úgy, hogy $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A \in \mathbb{R}$ és $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = B \in \mathbb{R}$, tovább $c \in \mathbb{R}$. Ekkor

- $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n + b_n = A + B$

Határérték tulajdonságai

Tétel

Legyen a_n és b_n két sorozat, úgy, hogy $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A \in \mathbb{R}$ és $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = B \in \mathbb{R}$, tovább $c \in \mathbb{R}$. Ekkor

- $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n + b_n = A + B$
- $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n - b_n = A - B$

Határérték tulajdonságai

Tétel

Legyen a_n és b_n két sorozat, úgy, hogy $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A \in \mathbb{R}$ és $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = B \in \mathbb{R}$, tovább $c \in \mathbb{R}$. Ekkor

- $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n + b_n = A + B$
- $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n - b_n = A - B$
- $\lim_{n \rightarrow \infty} c \cdot a_n = c \cdot A$

Határérték tulajdonságai

Tétel

Legyen a_n és b_n két sorozat, úgy, hogy $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A \in \mathbb{R}$ és $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = B \in \mathbb{R}$, tovább $c \in \mathbb{R}$. Ekkor

- $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n + b_n = A + B$
- $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n - b_n = A - B$
- $\lim_{n \rightarrow \infty} c \cdot a_n = c \cdot A$
- $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \cdot b_n = A \cdot B$

Határérték tulajdonságai

Tétel

Legyen a_n és b_n két sorozat, úgy, hogy $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A \in \mathbb{R}$ és $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = B \in \mathbb{R}$, tovább $c \in \mathbb{R}$. Ekkor

- $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n + b_n = A + B$
- $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n - b_n = A - B$
- $\lim_{n \rightarrow \infty} c \cdot a_n = c \cdot A$
- $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \cdot b_n = A \cdot B$
- $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{A}{B} \quad (B \neq 0)$

Ezen állítások tetszőleges véges számú kombinációját is vehetjük, ami hasznos lesz a nem definíció szerinti határérték-számításnál.

Végtelen határértékek

Definíció

*Ha az a_n sorozat nem konvergens, akkor **divergensnek** nevezzük.*

Végtelen határértékek

Definíció

Ha az a_n sorozat nem konvergens, akkor *divergensnek* nevezzük. Azt mondjuk, hogy az a_n sorozat *határértéke* ∞ , ha

$$\forall K \in \mathbb{R}, \exists N(K) \in \mathbb{N}, \forall n > N(K) : a_n > K.$$

Végtelen határértékek

Definíció

Ha az a_n sorozat nem konvergens, akkor *divergensnek* nevezzük. Azt mondjuk, hogy az a_n sorozat *határértéke* ∞ , ha

$$\forall K \in \mathbb{R}, \exists N(K) \in \mathbb{N}, \forall n > N(K) : a_n > K.$$

Azt mondjuk, hogy az a_n sorozat *határértéke* $-\infty$, ha

$$\forall k \in \mathbb{R}, \exists N(k) \in \mathbb{N}, \forall n > N(k) : a_n < k.$$

Végtelen határértékek

Definíció

Ha az a_n sorozat nem konvergens, akkor *divergensnek* nevezzük. Azt mondjuk, hogy az a_n sorozat *határértéke* ∞ , ha

$$\forall K \in \mathbb{R}, \exists N(K) \in \mathbb{N}, \forall n > N(K) : a_n > K.$$

Azt mondjuk, hogy az a_n sorozat *határértéke* $-\infty$, ha

$$\forall k \in \mathbb{R}, \exists N(k) \in \mathbb{N}, \forall n > N(k) : a_n < k.$$

Ezeket rendre úgy is mondhatjuk, hogy a_n tart vagy divergál ∞ -hez illetve $-\infty$ -hez, és így jelöljük: $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$, vagy $a_n \rightarrow \infty$, illetve $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty$ vagy $a_n \rightarrow -\infty$.

Vagyis minden K/k korlátra létezik egy olyan küszöbindex, hogy a sorozat küszöbindex utáni tagjai már K/k értékeit felül/alulmúlják.

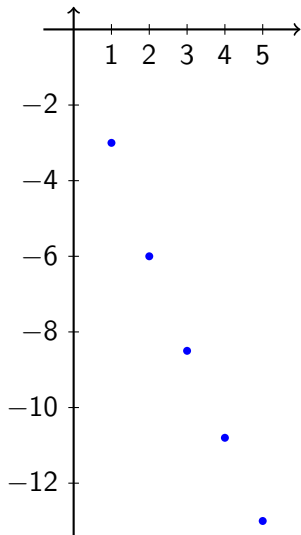
Példa

2. példa Vizsgáljuk az $b_n = \frac{-2n^2 - 6n + 2}{n + 1}$ sorozatot korlátosság, monotonitás és határérték szempontjából.

Példa

2. példa Vizsgáljuk az $b_n = \frac{-2n^2 - 6n + 2}{n + 1}$ sorozatot korlátosság, monotonitás és határérték szempontjából.

Nézzük meg (most utóljára) a sorozat első néhány elemét, hogy sejtéseket fogalmazhassunk meg (később máshogy csináljuk): $-3, -6, -8.5, -10.8, -13, \dots$
Sejtések:

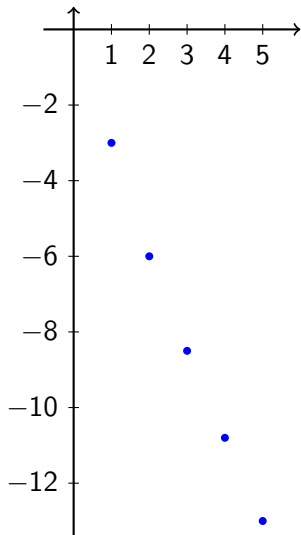


Példa

2. példa Vizsgáljuk az $b_n = \frac{-2n^2 - 6n + 2}{n + 1}$ sorozatot korlátosság, monotonitás és határérték szempontjából.

Nézzük meg (most utóljára) a sorozat első néhány elemét, hogy sejtéseket fogalmazhassunk meg (később máshogy csináljuk): $-3, -6, -8.5, -10.8, -13, \dots$
Sejtések:

- szigorúan monoton csökken;

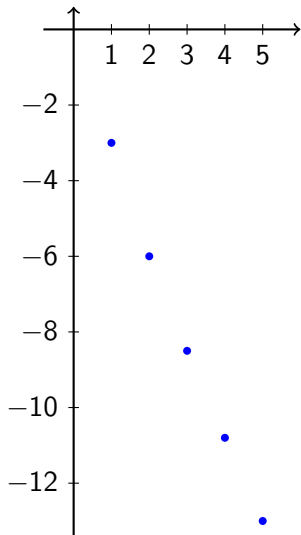


Példa

2. példa Vizsgáljuk az $b_n = \frac{-2n^2 - 6n + 2}{n + 1}$ sorozatot korlátosság, monotonitás és határérték szempontjából.

Nézzük meg (most utóljára) a sorozat első néhány elemét, hogy sejtéseket fogalmazhassunk meg (később máshogy csináljuk): $-3, -6, -8.5, -10.8, -13, \dots$
Sejtések:

- szigorúan monoton csökken;
- divergens és $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = -\infty$

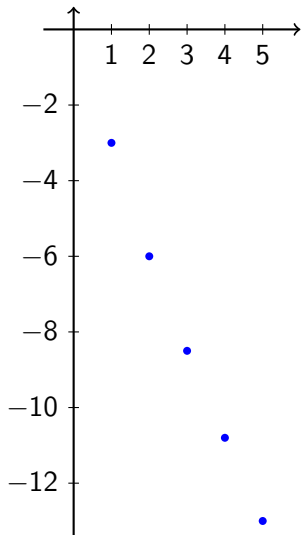


Példa

2. példa Vizsgáljuk az $b_n = \frac{-2n^2 - 6n + 2}{n + 1}$ sorozatot korlátosság, monotonitás és határérték szempontjából.

Nézzük meg (most utóljára) a sorozat első néhány elemét, hogy sejtéseket fogalmazhassunk meg (később máshogy csináljuk): $-3, -6, -8.5, -10.8, -13, \dots$
Sejtések:

- szigorúan monoton csökken;
- divergens és $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = -\infty$
- felső korlátotja -3 , alsó korlátja nincs



Példa

Belátjuk, hogy b_n sorozat tart $-\infty$ -be. Ehhez minden $k \in \mathbb{R}$ korláthoz kell tudni mondani egy küszömindexet, amittől kezdve $b_n < k$.

Példa

Belátjuk, hogy b_n sorozat tart $-\infty$ -be. Ehhez minden $k \in \mathbb{R}$ korláthoz kell tudni mondani egy küszömindexet, amitől kezdve $b_n < k$. A későbbiekben szükségünk lesz rá, ezért már most elkezdjük a becslés technikáját, amúgy egy paraméteres másodfokú egyenlőtlenséget kellene megoldani:

$$b_n = \frac{-2n^2 - 6n + 2}{n + 1} = \frac{-2n^2 - 2n - (4n - 2)}{n + 1} \leq \frac{-2n(n + 1)}{n + 1} = -2n < k$$

$$\text{Amiből } n > -\frac{k}{2} \Rightarrow N(k) = \left\lfloor -\frac{k}{2} \right\rfloor + 1$$

Példa

Belátjuk, hogy b_n sorozat tart $-\infty$ -be. Ehhez minden $k \in \mathbb{R}$ korláthoz kell tudni mondani egy küszömindexet, amiktől kezdve $b_n < k$. A későbbiekben szükségünk lesz rá, ezért már most elkezdjük a becslés technikáját, amúgy egy paraméteres másodfokú egyenlőtlenséget kellene megoldani:

$$b_n = \frac{-2n^2 - 6n + 2}{n + 1} = \frac{-2n^2 - 2n - (4n - 2)}{n + 1} \leq \frac{-2n(n + 1)}{n + 1} = -2n < k$$

$$\text{Amiből } n > -\frac{k}{2} \Rightarrow N(k) = \left\lfloor -\frac{k}{2} \right\rfloor + 1 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = -\infty$$

A b_n -nél mondunk egy nagyobb kifejezést és ha az is kisebb, mint k , akkor b_n is. Egy törtet úgy növelünk, hogy vagy a számlálót növeljük, vagy a nevezőt csökkentjük. Itt a számlálóban kevesebbet vonunk le, mert a $(4n - 2)$ mindig pozitív.

Példa

Belátjuk, hogy b_n sorozat tart $-\infty$ -be. Ehhez minden $k \in \mathbb{R}$ korláthoz kell tudni mondani egy küszömindexet, amiktől kezdve $b_n < k$. A későbbiekben szükségünk lesz rá, ezért már most elkezdjük a becslés technikáját, amúgy egy paraméteres másodfokú egyenlőtlenséget kellene megoldani:

$$b_n = \frac{-2n^2 - 6n + 2}{n + 1} = \frac{-2n^2 - 2n - (4n - 2)}{n + 1} \leq \frac{-2n(n + 1)}{n + 1} = -2n < k$$

$$\text{Amiből } n > -\frac{k}{2} \Rightarrow N(k) = \left\lfloor -\frac{k}{2} \right\rfloor + 1 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = -\infty$$

A b_n -nél mondunk egy nagyobb kifejezést és ha az is kisebb, mint k , akkor b_n is. Egy törtet úgy növelünk, hogy vagy a számlálót növeljük, vagy a nevezőt csökkentjük. Itt a számlálóban kevesebbet vonunk le, mert a $(4n - 2)$ mindig pozitív.

Mivel a sorozat minden értéket alul tud múlni, ezért egyúttal azt is beláttuk, hogy **alulról nem korlátos**.

Példa

Belátjuk, hogy b_n sorozat szigorúan monoton csökken:

$$b_n \overset{?}{>} b_{n+1}$$

Példa

Belátjuk, hogy b_n sorozat szigorúan monoton csökken:

$$\frac{-2n^2 - 6n + 2}{n + 1} = b_n \stackrel{?}{>} b_{n+1} = \frac{-2(n+1)^2 - 6(n+1) + 2}{(n+1) + 1} = \frac{-2n^2 - 10n - 6}{n + 2}$$

Keresztbe szorzás után:

Példa

Belátjuk, hogy b_n sorozat szigorúan monoton csökken:

$$\frac{-2n^2 - 6n + 2}{n + 1} = b_n \stackrel{?}{>} b_{n+1} = \frac{-2(n+1)^2 - 6(n+1) + 2}{(n+1) + 1} = \frac{-2n^2 - 10n - 6}{n + 2}$$

Keresztbe szorzás után: $(n+2)(-2n^2 - 6n + 2) \stackrel{?}{>} (-2n^2 - 10n - 6)(n+1)$

Kibontva a zárójeleket:

Példa

Belátjuk, hogy b_n sorozat szigorúan monoton csökken:

$$\frac{-2n^2 - 6n + 2}{n + 1} = b_n \stackrel{?}{>} b_{n+1} = \frac{-2(n+1)^2 - 6(n+1) + 2}{(n+1) + 1} = \frac{-2n^2 - 10n - 6}{n + 2}$$

Keresztbe szorzás után: $(n+2)(-2n^2 - 6n + 2) \stackrel{?}{>} (-2n^2 - 10n - 6)(n+1)$

Kibontva a zárójeleket: $-2n^3 - 10n^2 - 10n + 4 \stackrel{?}{>} -2n^3 - 12n^2 - 16n - 6$

Mindkét oldalhoz hozzáadva $2n^3 + 12n^2 + 16n + 6$ -ot:

Példa

Belátjuk, hogy b_n sorozat szigorúan monoton csökken:

$$\frac{-2n^2 - 6n + 2}{n + 1} = b_n \stackrel{?}{>} b_{n+1} = \frac{-2(n+1)^2 - 6(n+1) + 2}{(n+1) + 1} = \frac{-2n^2 - 10n - 6}{n + 2}$$

Keresztbe szorzás után: $(n+2)(-2n^2 - 6n + 2) \stackrel{?}{>} (-2n^2 - 10n - 6)(n+1)$

Kibontva a zárójeleket: $-2n^3 - 10n^2 - 10n + 4 \stackrel{?}{>} -2n^3 - 12n^2 - 16n - 6$

Mindkét oldalhoz hozzáadva $2n^3 + 12n^2 + 16n + 6$ -ot: $2n^2 + 6n + 10 \stackrel{?}{>} 0$,
 aminek a bal oldala egy pozitív főegyütthatójú, negatív diszkriminánsú
 másodfokú ($D = 36 - 4 \cdot 2 \cdot 10 = -44$), ami n -től függetlenül pozitív, tehát
 a kérdőjel eltűnik: $\forall n : b_n > b_{n+1} \Rightarrow$, b_n szigorúan monoton csökken.

Példa

Belátjuk, hogy b_n sorozat szigorúan monoton csökken:

$$\frac{-2n^2 - 6n + 2}{n + 1} = b_n \stackrel{?}{>} b_{n+1} = \frac{-2(n+1)^2 - 6(n+1) + 2}{(n+1) + 1} = \frac{-2n^2 - 10n - 6}{n + 2}$$

Keresztbe szorzás után: $(n+2)(-2n^2 - 6n + 2) \stackrel{?}{>} (-2n^2 - 10n - 6)(n+1)$

Kibontva a zárójeleket: $-2n^3 - 10n^2 - 10n + 4 \stackrel{?}{>} -2n^3 - 12n^2 - 16n - 6$

Mindkét oldalhoz hozzáadva $2n^3 + 12n^2 + 16n + 6$ -ot: $2n^2 + 6n + 10 \stackrel{?}{>} 0$,
aminek a bal oldala egy pozitív főegyütthatójú, negatív diszkriminánsú
másodfokú ($D = 36 - 4 \cdot 2 \cdot 10 = -44$), ami n -től függetlenül pozitív, tehát
a kérdőjel eltűnik: $\forall n : b_n > b_{n+1} \Rightarrow$, b_n szigorúan monoton csökken.

Mivel szigorúan monoton csökken, ezért b_n felülről korlátos és az első
tagja jó lesz felső korlátnak, tehát $\forall n : -3 \geq b_n$

Példa

Belátjuk, hogy b_n sorozat szigorúan monoton csökken:

$$\frac{-2n^2 - 6n + 2}{n + 1} = b_n \stackrel{?}{>} b_{n+1} = \frac{-2(n+1)^2 - 6(n+1) + 2}{(n+1) + 1} = \frac{-2n^2 - 10n - 6}{n + 2}$$

Keresztbe szorzás után: $(n+2)(-2n^2 - 6n + 2) \stackrel{?}{>} (-2n^2 - 10n - 6)(n+1)$

Kibontva a zárójeleket: $-2n^3 - 10n^2 - 10n + 4 \stackrel{?}{>} -2n^3 - 12n^2 - 16n - 6$

Mindkét oldalhoz hozzáadva $2n^3 + 12n^2 + 16n + 6$ -ot: $2n^2 + 6n + 10 \stackrel{?}{>} 0$, aminek a bal oldala egy pozitív főegyütthatójú, negatív diszkriminánsú másodfokú ($D = 36 - 4 \cdot 2 \cdot 10 = -44$), ami n -től függetlenül pozitív, tehát a kérdőjel eltűnik: $\forall n : b_n > b_{n+1} \Rightarrow$, b_n szigorúan monoton csökken.

Mivel szigorúan monoton csökken, ezért b_n felülről korlátos és az első tagja jó lesz felső korlátnak, tehát $\forall n : -3 \geq b_n$

A b_n sorozat felülről korlátos, de alulról nem, ezért b_n nem korlátos.

Nevezetes határértékek – hatvány

Tétel

Legyen $\alpha \in \mathbb{R}$, ekkor

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^\alpha = \begin{cases} \infty, & \text{ha } \alpha > 0, \\ 1, & \text{ha } \alpha = 0, \\ 0, & \text{ha } \alpha < 0. \end{cases}$$

Nevezetes határértékek – hatvány

Tétel

Legyen $\alpha \in \mathbb{R}$, ekkor

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^\alpha = \begin{cases} \infty, & \text{ha } \alpha > 0, \\ 1, & \text{ha } \alpha = 0, \\ 0, & \text{ha } \alpha < 0. \end{cases}$$

Tétel

Minden legalább elsőfokú polinom határértéke ∞ , vagy $-\infty$, ahol a ∞ előjele megegyezik a főegyüttható előjével.

Nevezetes határértékek – hatvány

Tétel

Legyen $\alpha \in \mathbb{R}$, ekkor

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^\alpha = \begin{cases} \infty, & \text{ha } \alpha > 0, \\ 1, & \text{ha } \alpha = 0, \\ 0, & \text{ha } \alpha < 0. \end{cases}$$

Tétel

Minden legalább elsőfokú polinom határértéke ∞ , vagy $-\infty$, ahol a ∞ előjele megegyezik a főegyüttható előjelével.

3. példa $\lim_{n \rightarrow \infty} 2n^2 - 3n + 1 = \lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \left(2 - \frac{3}{n} + \frac{1}{n^2} \right) = \infty$, mert a zárójelben lévő kifejezések rendre 2-höz, 0-hoz és 0-hoz tartanak, így alkalmazva a határértékre vonatkozó műveleti szabályokat, a zárójelen belüli kifejezés 2-höz tart, amit megszorozunk egy ∞ -hez tartóval.

Nevezetes határértékek – racionális törtfüggvény

Mi a határértéke egy racionális törtfüggvénynek:

Nevezetes határértékek – racionális törtfüggvény

Mi a határértéke egy racionális törtfüggvénynek:

Tétel

Legyen $p(n)$ és $q(n)$ az n két polinomja, ekkor

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{p(n)}{q(n)} = \begin{cases} \pm\infty, & \text{ha } \deg(p) > \deg(q), \\ \text{főegyütthatók hányadosa}, & \text{ha } \deg(p) = \deg(q), \\ 0, & \text{ha } \deg(p) < \deg(q), \end{cases}$$

ahol divergencia esetén a ∞ előjele a főegyütthatók szorzatának előjele.

Nevezetes határértékek – racionális törtfüggvény

Mi a határértéke egy racionális törtfüggvénynek:

Tétel

Legyen $p(n)$ és $q(n)$ az n két polinomja, ekkor

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{p(n)}{q(n)} = \begin{cases} \pm\infty, & \text{ha } \deg(p) > \deg(q), \\ \text{főegyütthatók hányadosa}, & \text{ha } \deg(p) = \deg(q), \\ 0, & \text{ha } \deg(p) < \deg(q), \end{cases}$$

ahol divergencia esetén a ∞ előjele a főegyütthatók szorzatának előjele.

4. példa $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n-1}{n+1} = 2$, mert két elsőfokú polinom van elosztva egymással és a főegyütthatók hányadosa: $\frac{2}{1} = 2$

Nevezetes határértékek – racionális törtfüggvény

Mi a határértéke egy racionális törtfüggvénynek:

Tétel

Legyen $p(n)$ és $q(n)$ az n két polinomja, ekkor

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{p(n)}{q(n)} = \begin{cases} \pm\infty, & \text{ha } \deg(p) > \deg(q), \\ \text{főegyütthatók hányadosa}, & \text{ha } \deg(p) = \deg(q), \\ 0, & \text{ha } \deg(p) < \deg(q), \end{cases}$$

ahol divergencia esetén a ∞ előjele a főegyütthatók szorzatának előjele.

4. példa $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n - 1}{n + 1} = 2$, mert két elsőfokú polinom van elosztva egymással és a főegyütthatók hányadosa: $\frac{2}{1} = 2$

$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-2n^2 - 6n + 2}{n + 1} = -\infty$, mert a számláló fokszáma nagyobb, mint a nevező fokszáma és a főegyütthatók különböző előjelűek.

Példa

5. példa Határozzuk meg az $a_n = \sqrt{n^2 + n + 1} - n$ sorozat határértékét.

Példa

5. példa Határozzuk meg az $a_n = \sqrt{n^2 + n + 1} - n$ sorozat határértékét. Két ∞ -hez tartó sorozat összegéről tudjuk, hogy ∞ , de két ∞ különbsége bármi lehet. Ilyen estre nincs általános módszer, de itt gyökteleníthetünk:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n^2 + n + 1} - n = \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 + n + 1} - n) \frac{\sqrt{n^2 + n + 1} + n}{\sqrt{n^2 + n + 1} + n} =$$

Példa

5. példa Határozzuk meg az $a_n = \sqrt{n^2 + n + 1} - n$ sorozat határértékét. Két ∞ -hez tartó sorozat összegéről tudjuk, hogy ∞ , de két ∞ különbsége bármi lehet. Ilyen estre nincs általános módszer, de itt gyökteleníthetünk:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n^2 + n + 1} - n &= \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 + n + 1} - n) \frac{\sqrt{n^2 + n + 1} + n}{\sqrt{n^2 + n + 1} + n} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + n + 1 - n^2}{\sqrt{n^2 + n + 1} + n} = \end{aligned}$$

Példa

5. példa Határozzuk meg az $a_n = \sqrt{n^2 + n + 1} - n$ sorozat határértékét. Két ∞ -hez tartó sorozat összegéről tudjuk, hogy ∞ , de két ∞ különbsége bármi lehet. Ilyen estre nincs általános módszer, de itt gyökteleníthetünk:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n^2 + n + 1} - n &= \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 + n + 1} - n) \frac{\sqrt{n^2 + n + 1} + n}{\sqrt{n^2 + n + 1} + n} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + n + 1 - n^2}{\sqrt{n^2 + n + 1} + n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n + 1}{\sqrt{n^2 + n + 1} + n} \end{aligned}$$

A tört számlálója elsőfokú, a nevezőben pedig egy másodfokú négyzetgyöke (tehát elsőfokú) és egy elsőfokú összege szerepel. A legerősebb tényező tehát elsőfokú.

Példa

5. példa Határozzuk meg az $a_n = \sqrt{n^2 + n + 1} - n$ sorozat határértékét. Két ∞ -hez tartó sorozat összegéről tudjuk, hogy ∞ , de két ∞ különbsége bármi lehet. Ilyen estre nincs általános módszer, de itt gyökteleníthetünk:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n^2 + n + 1} - n &= \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 + n + 1} - n) \frac{\sqrt{n^2 + n + 1} + n}{\sqrt{n^2 + n + 1} + n} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + n + 1 - n^2}{\sqrt{n^2 + n + 1} + n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n + 1}{\sqrt{n^2 + n + 1} + n} \end{aligned}$$

A tört számlálója elsőfokú, a nevezőben pedig egy másodfokú négyzetgyöke (tehát elsőfokú) és egy elsőfokú összege szerepel. A legerősebb tényező tehát elsőfokú.

Számlálót és nevezőt is egyszerűsítve n -el:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n + 1}{\sqrt{n^2 + n + 1} + n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{1}{n}}{\sqrt{1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}} + 1} =$$

Példa

5. példa Határozzuk meg az $a_n = \sqrt{n^2 + n + 1} - n$ sorozat határértékét. Két ∞ -hez tartó sorozat összegéről tudjuk, hogy ∞ , de két ∞ különbsége bármi lehet. Ilyen estre nincs általános módszer, de itt gyökteleníthetünk:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n^2 + n + 1} - n &= \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 + n + 1} - n) \frac{\sqrt{n^2 + n + 1} + n}{\sqrt{n^2 + n + 1} + n} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + n + 1 - n^2}{\sqrt{n^2 + n + 1} + n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n + 1}{\sqrt{n^2 + n + 1} + n} \end{aligned}$$

A tört számlálója elsőfokú, a nevezőben pedig egy másodfokú négyzetgyöke (tehát elsőfokú) és egy elsőfokú összege szerepel. A legerősebb tényező tehát elsőfokú.

Számlálót és nevezőt is egyszerűsítve n -el:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n + 1}{\sqrt{n^2 + n + 1} + n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{1}{n}}{\sqrt{1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}} + 1} = \frac{1 + 0}{\sqrt{1 + 0 + 0} + 1} =$$

Példa

5. példa Határozzuk meg az $a_n = \sqrt{n^2 + n + 1} - n$ sorozat határértékét. Két ∞ -hez tartó sorozat összegéről tudjuk, hogy ∞ , de két ∞ különbsége bármi lehet. Ilyen estre nincs általános módszer, de itt gyökteleníthetünk:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n^2 + n + 1} - n &= \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 + n + 1} - n) \frac{\sqrt{n^2 + n + 1} + n}{\sqrt{n^2 + n + 1} + n} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + n + 1 - n^2}{\sqrt{n^2 + n + 1} + n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n + 1}{\sqrt{n^2 + n + 1} + n} \end{aligned}$$

A tört számlálója elsőfokú, a nevezőben pedig egy másodfokú négyzetgyöke (tehát elsőfokú) és egy elsőfokú összege szerepel. A legerősebb tényező tehát elsőfokú.

Számlálót és nevezőt is egyszerűsítve n -el:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n + 1}{\sqrt{n^2 + n + 1} + n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{1}{n}}{\sqrt{1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}} + 1} = \frac{1 + 0}{\sqrt{1 + 0 + 0} + 1} = \frac{1}{2}.$$

Nevezetes határértékek – exponenciális kifejezés

Vizsgáljuk meg az exponenciális sorozat határértékét:

Tétel

A q^n ($q \in \mathbb{R}$) exponenciális sorozat határértéke q függvényében:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = \begin{cases} \infty, & \text{ha } q > 1, \\ 1, & \text{ha } q = 1 \\ 0, & \text{ha } -1 < q < 1, \\ \text{nincs határérték,} & \text{ha } q \leq -1 \end{cases}$$

Nevezetes határértékek – exponenciális kifejezés

Vizsgáljuk meg az exponenciális sorozat határértékét:

Tétel

A q^n ($q \in \mathbb{R}$) exponenciális sorozat határértéke q függvényében:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = \begin{cases} \infty, & \text{ha } q > 1, \\ 1, & \text{ha } q = 1 \\ 0, & \text{ha } -1 < q < 1, \\ \text{nincs határérték,} & \text{ha } q \leq -1 \end{cases}$$

A legtöbb eset adja magát, de a $q \leq -1$ érdekes.

Ha $q \neq -1$, akkor hatvány abszolút értéke egyre nagyobb, tehát $|q^n|$ divergens, de q^n váltakozó előjelű. Az ilyen típusú sorozatokat osszcillálva divergálónak nevezzük.

Nevezetes határértékek – exponenciális kifejezés

Vizsgáljuk meg az exponenciális sorozat határértékét:

Tétel

A q^n ($q \in \mathbb{R}$) exponenciális sorozat határértéke q függvényében:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = \begin{cases} \infty, & \text{ha } q > 1, \\ 1, & \text{ha } q = 1 \\ 0, & \text{ha } -1 < q < 1, \\ \text{nincs határérték,} & \text{ha } q \leq -1 \end{cases}$$

A legtöbb eset adja magát, de a $q \leq -1$ érdekes.

Ha $q \neq -1$, akkor hatvány abszolút értéke egyre nagyobb, tehát $|q^n|$ divergens, de q^n váltakozó előjelű. Az ilyen típusú sorozatokat osszcillálva divergálónak nevezzük.

Ha $q = -1$, akkor a ± 1 között váltakozik, oszcillál a sorozat, aminek így nem lehet határértéke, tehát divergens.

Példa

6. példa Határozzuk meg a $\frac{3^n}{2^n + \left(\frac{1}{2}\right)^n}$ sorozat határértékét.

Példa

6. példa Határozzuk meg a $\frac{3^n}{2^n + \left(\frac{1}{2}\right)^n}$ sorozat határértékét.

A számláló és a nevező is végtelenhez tart, így ∞/∞ típusú határozatlan értéket kapunk. Most a 3^n a nevezőben a domináns tag, ezért ezzel egyszerűsítünk:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n}{2^n + \left(\frac{1}{2}\right)^n} =$$

Példa

6. példa Határozzuk meg a $\frac{3^n}{2^n + \left(\frac{1}{2}\right)^n}$ sorozat határértékét.

A számláló és a nevező is végtelenhez tart, így ∞/∞ típusú határozatlan értéket kapunk. Most a 3^n a nevezőben a domináns tag, ezért ezzel egyszerűsítünk:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n}{2^n + \left(\frac{1}{2}\right)^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\left(\frac{2}{3}\right)^n + \left(\frac{1}{6}\right)^n}$$

Példa

6. példa Határozzuk meg a $\frac{3^n}{2^n + \left(\frac{1}{2}\right)^n}$ sorozat határértékét.

A számláló és a nevező is végtelenhez tart, így ∞/∞ típusú határozatlan értéket kapunk. Most a 3^n a nevezőben a domináns tag, ezért ezzel egyszerűsítünk:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n}{2^n + \left(\frac{1}{2}\right)^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\left(\frac{2}{3}\right)^n + \left(\frac{1}{6}\right)^n} = \infty$$

A nevezőben két 1-nél kisebb alapú exponenciális kifejezés szerepel, melyeknek az előbbi tétel alapján 0 lesz a határértékük. A számlálónk pedig 1, így egy korlátos kifejezést osztunk egyre kisebb, 0-hoz tartó számok összegével. Az eredmény egyre nagyobb lesz, így a határérték ∞ .

Nevezetes határértékek – gyökös kifejezések

Tétel

Legyen adott $0 < c \in \mathbb{R}$, ekkor $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{c} = 1$

Nevezetes határértékek – gyökös kifejezések

Tétel

Legyen adott $0 < c \in \mathbb{R}$, ekkor $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{c} = 1$

A bizonyítás több módja is van:

Vehetjük $\sqrt[n]{c}$ logaritmusát: $\log \sqrt[n]{c} = \log c^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{n} \log c = \frac{\log c}{n}$, ahol egy korlátos kifejezés van osztva egy végtelenhez tartóval, amiről már láttuk, hogy tart 0-hoz és ha $\lim_{n \rightarrow \infty} \log a_n = 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1$.

Nevezetes határértékek – gyökös kifejezések

Tétel

Legyen adott $0 < c \in \mathbb{R}$, ekkor $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{c} = 1$

A bizonyítás több módja is van:

Vehetjük $\sqrt[n]{c}$ logaritmusát: $\log \sqrt[n]{c} = \log c^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{n} \log c = \frac{\log c}{n}$, ahol egy korlátos kifejezés van osztva egy végtelenhez tartóval, amiről már láttuk, hogy tart 0-hoz és ha $\lim_{n \rightarrow \infty} \log a_n = 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1$.

Tétel

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$$

Nevezetes határértékek – gyökös kifejezések

Tétel

Legyen adott $0 < c \in \mathbb{R}$, ekkor $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{c} = 1$

A bizonyítás több módja is van:

Vehetjük $\sqrt[n]{c}$ logaritmusát: $\log \sqrt[n]{c} = \log c^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{n} \log c = \frac{\log c}{n}$, ahol egy korlátos kifejezés van osztva egy végtelenhez tartóval, amiről már láttuk, hogy tart 0-hoz és ha $\lim_{n \rightarrow \infty} \log a_n = 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1$.

Tétel

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$$

Itt már kicsit nehezebb az indoklás, ugyanúgy logaritmust véve a $\frac{\log n}{n}$ hányadost kapjuk. Ezt pedig a függvényhatárértékekből tudjuk, hogy 0-hoz tart.

Rendőrelv

Tétel (Rendőrelv)

Ha $b_n \leq a_n \leq c_n$ valamilyen $N \leq n \in \mathbb{N}$ esetén, továbbá b_n és c_n konvergens úgy, hogy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = A = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n,$$

akkor a_n is konvergens és $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A$.

Rendőrelv

Tétel (Rendőrelv)

Ha $b_n \leq a_n \leq c_n$ valamilyen $N \leq n \in \mathbb{N}$ esetén, továbbá b_n és c_n konvergens úgy, hogy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = A = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n,$$

akkor a_n is konvergens és $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A$.

Azaz ha egy bűnöző (a_n) élete során valamikortól (N) mindkét oldalára kerül egy-egy rendőr (b_n és c_n), akik bemennek a börtönbe (A), akkor a bűnözőnek is be kell mennie a börtönba (A).

Rendőrelv

Tétel (Rendőrelv)

Ha $b_n \leq a_n \leq c_n$ valamilyen $N \leq n \in \mathbb{N}$ esetén, továbbá b_n és c_n konvergens úgy, hogy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = A = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n,$$

akkor a_n is konvergens és $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A$.

Azaz ha egy bűnöző (a_n) élete során valamikortól (N) mindkét oldalára kerül egy-egy rendőr (b_n és c_n), akik bemennek a börtönbe (A), akkor a bűnözőnek is be kell mennie a börtönbe (A).

Tétel (Speciális rendőrelv)

Ha $b_n \leq a_n$ valamilyen $N \leq n \in \mathbb{N}$ esetén

- $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \infty \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$

Rendőrelv

Tétel (Rendőrelv)

Ha $b_n \leq a_n \leq c_n$ valamilyen $N \leq n \in \mathbb{N}$ esetén, továbbá b_n és c_n konvergens úgy, hogy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = A = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n,$$

akkor a_n is konvergens és $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A$.

Azaz ha egy bűnöző (a_n) élete során valamikortól (N) mindkét oldalára kerül egy-egy rendőr (b_n és c_n), akik bemennek a börtönbe (A), akkor a bűnözőnek is be kell mennie a börtönbe (A).

Tétel (Speciális rendőrelv)

Ha $b_n \leq a_n$ valamilyen $N \leq n \in \mathbb{N}$ esetén

$$\bullet \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \infty \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty \quad \bullet \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = -\infty$$

Rendőrelv

Tétel (Rendőrelv)

Ha $b_n \leq a_n \leq c_n$ valamilyen $N \leq n \in \mathbb{N}$ esetén, továbbá b_n és c_n konvergens úgy, hogy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = A = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n,$$

akkor a_n is konvergens és $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A$.

Azaz ha egy bűnöző (a_n) élete során valamikortól (N) mindkét oldalára kerül egy-egy rendőr (b_n és c_n), akik bemennek a börtönbe (A), akkor a bűnözőnek is be kell mennie a börtönbe (A).

Tétel (Speciális rendőrelv)

Ha $b_n \leq a_n$ valamilyen $N \leq n \in \mathbb{N}$ esetén

$$\bullet \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \infty \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty \quad \bullet \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = -\infty$$

Példa

7. példa Határozzuk meg a $\sqrt[n]{2n^2 - n + 4}$ sorozat határértékét.

Példa

7. példa Határozzuk meg a $\sqrt[n]{2n^2 - n + 4}$ sorozat határértékét.

A rendőrelvet fogjuk alkalmazni:

$$\sqrt[n]{n} \cdot \sqrt[n]{n} = \sqrt[n]{n^2} \stackrel{3 \leq n}{\leq} \sqrt[n]{2n^2 - n + 4} \stackrel{4 \leq n}{\leq} \sqrt[n]{2n^2} = \sqrt[n]{2} \cdot \sqrt[n]{n} \cdot \sqrt[n]{n}$$

Az első egyenlőtlenség azért igaz, mert $2n^2$ -ből $n - 4$ helyett n^2 -et vonunk le, ami $n = 3$ -tól kezdve nagyobb levonást jelent.

Példa

7. példa Határozzuk meg a $\sqrt[n]{2n^2 - n + 4}$ sorozat határértékét.

A rendőrelvet fogjuk alkalmazni:

$$\sqrt[n]{n} \cdot \sqrt[n]{n} = \sqrt[n]{n^2} \quad \begin{matrix} 3 \leq n \\ \leq \end{matrix} \quad \sqrt[n]{2n^2 - n + 4} \quad \begin{matrix} 4 \leq n \\ \leq \end{matrix} \quad \sqrt[n]{2n^2} = \sqrt[n]{2} \cdot \sqrt[n]{n} \cdot \sqrt[n]{n}$$

Az első egyenlőtlenség azért igaz, mert $2n^2$ -ből $n - 4$ helyett n^2 -et vonunk le, ami $n = 3$ -tól kezdve nagyobb levonást jelent.

A második egyenlőtlenség azért igaz, mert $n - 4$ helyett nem vonunk le semmit, ami $n = 4$ -től kezdve növelést jelent.

Példa

7. példa Határozzuk meg a $\sqrt[n]{2n^2 - n + 4}$ sorozat határértékét.

A rendőrelvet fogjuk alkalmazni:

$$\sqrt[n]{n} \cdot \sqrt[n]{n} = \sqrt[n]{n^2} \stackrel{3 \leq n}{\leq} \sqrt[n]{2n^2 - n + 4} \stackrel{4 \leq n}{\leq} \sqrt[n]{2n^2} = \sqrt[n]{2} \cdot \sqrt[n]{n} \cdot \sqrt[n]{n}$$

Az első egyenlőtlenség azért igaz, mert $2n^2$ -ből $n - 4$ helyett n^2 -et vonunk le, ami $n = 3$ -tól kezdve nagyobb levonást jelent.

A második egyenlőtlenség azért igaz, mert $n - 4$ helyett nem vonunk le semmit, ami $n = 4$ -től kezdve növelést jelent.

A bal és jobb oldalon is mindkét kifejezésben véges sok 1-hez tartó sorozat szorzata van (2 és 3 db), ami 1-hez tart, így a rendőrelv miatt a köztük lévő, feladatban adott sorozat is 1-hez tart.

Példa

7. példa Határozzuk meg a $\sqrt[n]{2n^2 - n + 4}$ sorozat határértékét.

A rendőrelvet fogjuk alkalmazni:

$$\sqrt[n]{n} \cdot \sqrt[n]{n} = \sqrt[n]{n^2} \stackrel{3 \leq n}{\leq} \sqrt[n]{2n^2 - n + 4} \stackrel{4 \leq n}{\leq} \sqrt[n]{2n^2} = \sqrt[n]{2} \cdot \sqrt[n]{n} \cdot \sqrt[n]{n}$$

Az első egyenlőtlenség azért igaz, mert $2n^2$ -ből $n - 4$ helyett n^2 -et vonunk le, ami $n = 3$ -tól kezdve nagyobb levonást jelent.

A második egyenlőtlenség azért igaz, mert $n - 4$ helyett nem vonunk le semmit, ami $n = 4$ -től kezdve növelést jelent.

A bal és jobb oldalon is mindkét kifejezésben véges sok 1-hez tartó sorozat szorzata van (2 és 3 db), ami 1-hez tart, így a rendőrelv miatt a köztük lévő, feladatban adott sorozat is 1-hez tart.

Példa

8. példa Határozzuk meg az $\sqrt[n]{\frac{2^n + 5^n}{3^n + 4^n}}$ sorozat határértékét.

Példa

8. példa Határozzuk meg az $\sqrt[n]{\frac{2^n + 5^n}{3^n + 4^n}}$ sorozat határértékét.

A rendőrelvet fogjuk alkalmazni:

$$\sqrt[n]{\frac{1}{2}} \cdot \frac{5}{4} = \sqrt[n]{\frac{5^n}{4^n + 4^n}} \leq \sqrt[n]{\frac{2^n + 5^n}{3^n + 4^n}} \leq \sqrt[n]{\frac{5^n + 5^n}{4^n}} = \sqrt[n]{2} \cdot \frac{5}{4}$$

Példa

8. példa Határozzuk meg az $\sqrt[n]{\frac{2^n + 5^n}{3^n + 4^n}}$ sorozat határértékét.

A rendőrelvet fogjuk alkalmazni:

$$\sqrt[n]{\frac{1}{2}} \cdot \frac{5}{4} = \sqrt[n]{\frac{5^n}{4^n + 4^n}} \leq \sqrt[n]{\frac{2^n + 5^n}{3^n + 4^n}} \leq \sqrt[n]{\frac{5^n + 5^n}{4^n}} = \sqrt[n]{2} \cdot \frac{5}{4}$$

A becslésnél mindig figyelni kell arra, hogy a legnagyobb nagyságrendek maradjanak meg. Számlálóban 5^n -en, nevezetőben 4^n -en. Csak az együtthatók változhatnak, mert azt az $\sqrt[n]{\cdot}$ meg teszi.

Példa

8. példa Határozzuk meg az $\sqrt[n]{\frac{2^n + 5^n}{3^n + 4^n}}$ sorozat határértékét.

A rendőrelvet fogjuk alkalmazni:

$$\sqrt[n]{\frac{1}{2}} \cdot \frac{5}{4} = \sqrt[n]{\frac{5^n}{4^n + 4^n}} \leq \sqrt[n]{\frac{2^n + 5^n}{3^n + 4^n}} \leq \sqrt[n]{\frac{5^n + 5^n}{4^n}} = \sqrt[n]{2} \cdot \frac{5}{4}$$

A becslésnél mindig figyelni kell arra, hogy a legnagyobb nagyságrendek maradjanak meg. Számlálóban 5^n -en, nevezőben 4^n -en. Csak az együtthatók változhatnak, mert azt az $\sqrt[n]{\cdot}$ megeszi.

A bal oldali egyenlőtlenség igaz, mert az gyökjelen belül lévő tört számlálóját csökkentettük (2^n elhagyva), nevezőjét növeltük (3^n helyett 4^n).

Példa

8. példa Határozzuk meg az $\sqrt[n]{\frac{2^n + 5^n}{3^n + 4^n}}$ sorozat határértékét.

A rendőrelvet fogjuk alkalmazni:

$$\sqrt[n]{\frac{1}{2} \cdot \frac{5}{4}} = \sqrt[n]{\frac{5^n}{4^n + 4^n}} \leq \sqrt[n]{\frac{2^n + 5^n}{3^n + 4^n}} \leq \sqrt[n]{\frac{5^n + 5^n}{4^n}} = \sqrt[n]{2} \cdot \frac{5}{4}$$

A becslésnél mindig figyelni kell arra, hogy a legnagyobb nagyságrendek maradjanak meg. Számlálóban 5^n -en, nevezőben 4^n -en. Csak az együtthatók változhatnak, mert azt az $\sqrt[n]{\cdot}$ megeszi.

A bal oldali egyenlőtlenség igaz, mert az gyökjelen belül lévő tört számlálóját csökkentettük (2^n elhagyva), nevezőjét növeltük (3^n helyett 4^n). A jobb oldali egyenlőtlenség igaz, mert az gyökjelen belül lévő tört számlálóját növeltük (2^n helyett 5^n), nevezőjét csökkentettük (3^n helyett 4^n).

Példa

8. példa Határozzuk meg az $\sqrt[n]{\frac{2^n + 5^n}{3^n + 4^n}}$ sorozat határértékét.

A rendőrelvet fogjuk alkalmazni:

$$\sqrt[n]{\frac{1}{2}} \cdot \frac{5}{4} = \sqrt[n]{\frac{5^n}{4^n + 4^n}} \leq \sqrt[n]{\frac{2^n + 5^n}{3^n + 4^n}} \leq \sqrt[n]{\frac{5^n + 5^n}{4^n}} = \sqrt[n]{2} \cdot \frac{5}{4}$$

A becslésnél mindig figyelni kell arra, hogy a legnagyobb nagyságrendek maradjanak meg. Számlálóban 5^n -en, nevezőben 4^n -en. Csak az együtthatók változhatnak, mert azt az $\sqrt[n]{\cdot}$ megeszi.

A bal oldali egyenlőtlenség igaz, mert az gyökjelen belül lévő tört számlálóját csökkentettük (2^n elhagyva), nevezőjét növeltük (3^n helyett 4^n).

A jobb oldali egyenlőtlenség igaz, mert az gyökjelen belül lévő tört számlálóját növeltük (2^n helyett 5^n), nevezőjét csökkentettük (3^n helyett 4^n).

A bal és jobb oldalon is mindkét kifejezésben véges két 1-hez tartó sorozat van szorozva $\frac{5}{4}$ -el, ami $\frac{5}{4}$ -hez tart, így a rendőrelv miatt a köztük lévő, feladatban adott sorozat is $\frac{5}{4}$ -hez tart.

Nagyságrendek

A következő nagyságrendek használatával is meghatározhatjuk egyes sorozatok határértékét:

$$\log n \ll \sqrt[k]{n} \ll n \ll n^k \ll k^n \ll n! \ll n^n$$

ahol n a sorozat indexe és $1 < k \in \mathbb{N}$.

Nagyságrendek

A következő nagyságrendek használatával is meghatározhatjuk egyes sorozatok határértékét:

$$\log n \ll \sqrt[k]{n} \ll n \ll n^k \ll k^n \ll n! \ll n^n$$

ahol n a sorozat indexe és $1 < k \in \mathbb{N}$.

Ha két különböző nagyságrendű sorozat van elosztva egymással, akkor a nagyobb nagyságrend mindig legyőzi a kisebbet és gyorsabban tart ∞ -hez.

Nagyságrendek

A következő nagyságrendek használatával is meghatározhatjuk egyes sorozatok határértékét:

$$\log n \ll \sqrt[k]{n} \ll n \ll n^k \ll k^n \ll n! \ll n^n$$

ahol n a sorozat indexe és $1 < k \in \mathbb{N}$.

Ha két különböző nagyságrendű sorozat van elosztva egymással, akkor a nagyobb nagyságrend mindig legyőzi a kisebbet és gyorsabban tart ∞ -hez.

9. példa Határozzuk meg a $\frac{2^n + n!}{n^{2020} + n^n}$ sorozat határértékét.

Nagyságrendek

A következő nagyságrendek használatával is meghatározhatjuk egyes sorozatok határértékét:

$$\log n \ll \sqrt[k]{n} \ll n \ll n^k \ll k^n \ll n! \ll n^n$$

ahol n a sorozat indexe és $1 < k \in \mathbb{N}$.

Ha két különböző nagyságrendű sorozat van elosztva egymással, akkor a nagyobb nagyságrend mindig legyőzi a kisebbet és gyorsabban tart ∞ -hez.

9. példa Határozzuk meg a $\frac{2^n + n!}{n^{2020} + n^n}$ sorozat határértékét.

A nagyságrendi sor szerint n^n a legerősebb a sorozatban szereplő tagok közül, ezért ezzel egyszerűsítve:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n + n!}{n^{2020} + n^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{2^n}{n^n} + \frac{n!}{n^n}}{\frac{n^{2020}}{n^n} + 1} = \frac{0 + 0}{0 + 1} = 0.$$

Nevezetes határértékek – hatvány + exponenciális

Vizsgáljuk meg a $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ határértéket!

Nevezetes határértékek – hatvány + exponenciális

Vizsgáljuk meg a $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ határértéket!

Kérdés: Melyik az igaz az alábbi logikák közül?

- A hatvány alapjában az $\frac{1}{n}$ mindig pozitív, tehát az alap 1-nél nagyobb. 1-nél nagyobb kifejezés hatványa pedig ∞ -be tart.

Nevezetes határértékek – hatvány + exponenciális

Vizsgáljuk meg a $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ határértéket!

Kérdés: Melyik az igaz az alábbi logikák közül?

- A hatvány alapjában az $\frac{1}{n}$ mindig pozitív, tehát az alap 1-nél nagyobb. 1-nél nagyobb kifejezés hatványa pedig ∞ -be tart.
- A hatvány alapja igaz, hogy 1-nél nagyobb, de azért 1-hez tart, és az 1 bármelyik hatványa 1-hez tart.

Válasz:

Nevezetes határértékek – hatvány + exponenciális

Vizsgáljuk meg a $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ határértéket!

Kérdés: Melyik az igaz az alábbi logikák közül?

- A hatvány alapján az $\frac{1}{n}$ mindig pozitív, tehát az alap 1-nél nagyobb. 1-nél nagyobb kifejezés hatványa pedig ∞ -be tart.
- A hatvány alapja igaz, hogy 1-nél nagyobb, de azért 1-hez tart, és az 1 bármelyik hatványa 1-hez tart.

Válasz: EGYIK SEM, az alap 1-hez, a kitevő meg ∞ -hez tart, de ezek egyszerre történnek, nem egymás után valamilyen sorrendben, ahogy fent szerepel.

Nevezetes határértékek – hatvány + exponenciális

Vizsgáljuk meg a $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ határértéket!

Kérdés: Melyik az igaz az alábbi logikák közül?

- A hatvány alapján az $\frac{1}{n}$ mindig pozitív, tehát az alap 1-nél nagyobb. 1-nél nagyobb kifejezés hatványa pedig ∞ -be tart.
- A hatvány alapja igaz, hogy 1-nél nagyobb, de azért 1-hez tart, és az 1 bármelyik hatványa 1-hez tart.

Válasz: EGYIK SEM, az alap 1-hez, a kitevő meg ∞ -hez tart, de ezek egyszerre történnek, nem egymás után valamilyen sorrendben, ahogy fent szerepel.

Kérdés 2: De akkor van-e határérték és ha igen, akkor mi?

Nevezetes határértékek – hatvány + exponenciális

Vizsgáljuk meg a $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ határértéket!

Kérdés: Melyik az igaz az alábbi logikák közül?

- A hatvány alapján az $\frac{1}{n}$ mindig pozitív, tehát az alap 1-nél nagyobb. 1-nél nagyobb kifejezés hatványa pedig ∞ -be tart.
- A hatvány alapja igaz, hogy 1-nél nagyobb, de azért 1-hez tart, és az 1 bármelyik hatványa 1-hez tart.

Válasz: EGYIK SEM, az alap 1-hez, a kitevő meg ∞ -hez tart, de ezek egyszerre történnek, nem egymás után valamilyen sorrendben, ahogy fent szerepel.

Kérdés 2: De akkor van-e határérték és ha igen, akkor mi?

Válasz 2: Van határérték, belátjuk, hogy a sorozat monoton és korlátos:

Definíció

$$e := \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \approx 2.7182818285.$$

Az $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ sorozat monotonitása

Tétel (Számítási-mértani közép közti egyenlőtlenség)

Legyen adott $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}^+$, ekkor $\sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n} \leq \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}$.

Az $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ sorozat monotonitása

Tétel (Számítási-mértani közép közti egyenlőtlenség)

Legyen adott $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}^+$, ekkor $\sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n} \leq \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}$.

Legyen $\forall i = 1, \dots, n : x_i = 1 + \frac{1}{n}$ és $x_{n+1} = 1$, alkalmazva az előbbi tételt:

$$\sqrt[n+1]{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \cdot 1} \leq \frac{n\left(1 + \frac{1}{n}\right) + 1}{n+1}$$

Az $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ sorozat monotonitása

Tétel (Számítási-mértani közép közti egyenlőtlenség)

Legyen adott $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}^+$, ekkor $\sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n} \leq \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}$.

Legyen $\forall i = 1, \dots, n : x_i = 1 + \frac{1}{n}$ és $x_{n+1} = 1$, alkalmazva az előbbi tételt:

$$\sqrt[n+1]{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \cdot 1} \leq \frac{n\left(1 + \frac{1}{n}\right) + 1}{n+1} = \frac{n+1+1}{n+1} = 1 + \frac{1}{n+1}$$

Az $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ sorozat monotonitása

Tétel (Számítási-mértani közép közti egyenlőtlenség)

Legyen adott $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}^+$, ekkor $\sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n} \leq \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}$.

Legyen $\forall i = 1, \dots, n : x_i = 1 + \frac{1}{n}$ és $x_{n+1} = 1$, alkalmazva az előbbi tételt:

$$\sqrt[n+1]{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \cdot 1} \leq \frac{n\left(1 + \frac{1}{n}\right) + 1}{n+1} = \frac{n+1+1}{n+1} = 1 + \frac{1}{n+1}$$

Véve mindkét oldal $n+1$ -edik hatványát:

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leq \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1},$$

tehát $a_n \leq a_{n+1}$, vagyis a_n sorozat szigorúan monoton nő.

Az $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ sorozat korlátossága

Legyen $\forall i = 1, \dots, n : x_i = 1 + \frac{1}{n}$ és $x_{n+1} = x_{n+2} = \frac{1}{2}$, alkalmazva az előbbi tételt:

$$\sqrt[n+2]{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}} \leq \frac{n\left(1 + \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}}{n+2}$$

Az $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ sorozat korlátossága

Legyen $\forall i = 1, \dots, n : x_i = 1 + \frac{1}{n}$ és $x_{n+1} = x_{n+2} = \frac{1}{2}$, alkalmazva az előbbi tételt:

$$\sqrt[n+2]{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}} \leq \frac{n\left(1 + \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}}{n+2} = \frac{n+1+1}{n+2} = 1$$

Az $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ sorozat korlátossága

Legyen $\forall i = 1, \dots, n : x_i = 1 + \frac{1}{n}$ és $x_{n+1} = x_{n+2} = \frac{1}{2}$, alkalmazva az előbbi tételt:

$$\sqrt[n+2]{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}} \leq \frac{n\left(1 + \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}}{n+2} = \frac{n+1+1}{n+2} = 1$$

Véve mindkét oldal $n+2$ -edik hatványát:

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \cdot \frac{1}{4} \leq 1$$

Az $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ sorozat korlátossága

Legyen $\forall i = 1, \dots, n : x_i = 1 + \frac{1}{n}$ és $x_{n+1} = x_{n+2} = \frac{1}{2}$, alkalmazva az előbbi tételt:

$$\sqrt[n+2]{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}} \leq \frac{n\left(1 + \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}}{n+2} = \frac{n+1+1}{n+2} = 1$$

Véve mindkét oldal $n+2$ -edik hatványát:

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \cdot \frac{1}{4} \leq 1$$

Átszorozva 4-el, kapjuk, hogy

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leq 4,$$

tehát $\forall n : a_n \leq 4$ és a monotonitásból következik, hogy $2 = a_1 \leq a_n$, vagyis a_n korlátos.

Tétel(ek) "sorozat a sorozatodikon" típusú határértékre

Tétel

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + a_n)^{b_n} = e^c, \text{ ha}$$

- ① $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$
- ② $\lim_{n \rightarrow \infty} |b_n| = \infty$
- ③ $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \cdot b_n = c.$

Tétel(ek) "sorozat a sorozatodikon" típusú határértékre

Tétel

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + a_n)^{b_n} = e^c, \text{ ha}$$

- ❶ $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$
- ❷ $\lim_{n \rightarrow \infty} |b_n| = \infty$
- ❸ $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \cdot b_n = c.$

Az első két pont csak a setup, azt hivatott elérni, hogy az alap 1-hez tartson, a kitevő pedig végtelen abszolút értékű legyen. Tehát az 1^∞ típusú határérték a bennük szereplő sorozatok szorzatának határértékétől (c) függnék.

Tétel(ek) "sorozat a sorozatodikon" típusú határértékre

Tétel

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + a_n)^{b_n} = e^c, \text{ ha}$$

- ① $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$
- ② $\lim_{n \rightarrow \infty} |b_n| = \infty$
- ③ $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \cdot b_n = c.$

Az első két pont csak a setup, azt hivatott elérni, hogy az alap 1-hez tartson, a kitevő pedig végtelen abszolút értékű legyen. Tehát az 1^∞ típusú határérték a bennük szereplő sorozatok szorzatának határértékétől (c) függenek. Ez kicsivel több, mint az alábbi, szintén alkalmazható tétel:

Tétel

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = e^x$$

Példa

10. példa Határozzuk meg az $a_n = \left(\frac{3n+2}{3n-1}\right)^{2n-1}$ sorozat határértékét.

Példa

10. példa Határozzuk meg az $a_n = \left(\frac{3n+2}{3n-1}\right)^{2n-1}$ sorozat határértékét.

Az alap és a kitevő is függ n -től, ezért próbáljuk meg alkalmaznia az előbbi tételt. Alapból a sorozat nem $(1 + a_n)^{b_n}$ típusú, ezért kis ügyeskedéssel át kell alakítanunk:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3n+2}{3n-1}\right)^{2n-1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3n-1+3}{3n-1}\right)^{2n-1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{3}{3n-1}\right)^{2n-1}$$

Tehát szereposztás szerint $a_n = \frac{3}{3n-1}$ és $b_n = 2n-1$. Vizsgáljuk meg a tétel feltételeit:

Példa

10. példa Határozzuk meg az $a_n = \left(\frac{3n+2}{3n-1}\right)^{2n-1}$ sorozat határértékét.

Az alap és a kitevő is függ n -től, ezért próbáljuk meg alkalmazni az előbbi tételt. Alapból a sorozat nem $(1 + a_n)^{b_n}$ típusú, ezért kis ügyeskedéssel át kell alakítanunk:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3n+2}{3n-1}\right)^{2n-1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3n-1+3}{3n-1}\right)^{2n-1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{3}{3n-1}\right)^{2n-1}$$

Tehát szereposztás szerint $a_n = \frac{3}{3n-1}$ és $b_n = 2n-1$. Vizsgáljuk meg a tétel feltételeit:

$$\textcircled{1} \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3}{3n-1} = 0 \quad \checkmark$$

Példa

10. példa Határozzuk meg az $a_n = \left(\frac{3n+2}{3n-1}\right)^{2n-1}$ sorozat határértékét.

Az alap és a kitevő is függ n -től, ezért próbáljuk meg alkalmazni az előbbi tételt. Alapból a sorozat nem $(1 + a_n)^{b_n}$ típusú, ezért kis ügyeskedéssel át kell alakítanunk:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3n+2}{3n-1}\right)^{2n-1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3n-1+3}{3n-1}\right)^{2n-1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{3}{3n-1}\right)^{2n-1}$$

Tehát szereposztás szerint $a_n = \frac{3}{3n-1}$ és $b_n = 2n-1$. Vizsgáljuk meg a tétel feltételeit:

$$\textcircled{1} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3}{3n-1} = 0 \quad \checkmark$$

$$\textcircled{2} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} 2n-1 = \infty \quad \checkmark$$

Példa

10. példa Határozzuk meg az $a_n = \left(\frac{3n+2}{3n-1}\right)^{2n-1}$ sorozat határértékét.

Az alap és a kitevő is függ n -től, ezért próbáljuk meg alkalmazni az előbbi tételt. Alapból a sorozat nem $(1 + a_n)^{b_n}$ típusú, ezért kis ügyeskedéssel át kell alakítanunk:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3n+2}{3n-1}\right)^{2n-1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3n-1+3}{3n-1}\right)^{2n-1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{3}{3n-1}\right)^{2n-1} = e^2$$

Tehát szereposztás szerint $a_n = \frac{3}{3n-1}$ és $b_n = 2n-1$. Vizsgáljuk meg a tétel feltételeit:

① $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3}{3n-1} = 0 \quad \checkmark$

② $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} 2n-1 = \infty \quad \checkmark$

③ $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \cdot b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{6n-3}{3n-1} = \frac{6}{3} = 2 (= c)$, mert két azonos (első)fokú polinom hányadosának határértéke a főgyütthetők hányadosa.

Tehát a tételünk alapján $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = e^2$.