Többváltozós függvények

Matematika A2 műszaki menedzser

2020 tavasz

Bevezetés

Egyváltozós függvény: $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$, vagy az $f : D_f \mapsto R_f$

Bevezetés

Egyváltozós függvény: $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$, vagy az $f : D_f \mapsto R_f$
Többváltozós függvény: $f : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$
Példa: Vektor hossza: $|\cdot| : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}$, ahol $(x, y, z) \mapsto \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

Bevezetés

Egyváltozós függvény: $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$, vagy az $f : D_f \mapsto R_f$
Többváltozós függvény: $f : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$
Példa: Vektor hossza: $|\cdot| : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}$, ahol $(x, y, z) \mapsto \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

Definíció (Általános többváltozós függvény)

Az $f : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^m$ általános többváltozós függvénynek nevezzük, ha $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (f_1(x_1, \ldots, x_n), f_2(x_1, \ldots, x_n), \ldots, f_m(x_1, \ldots, x_n))$, ahol f_i a függvény i-edik komponens-vagy koordinátafüggvénye ($f_i : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$).

Bevezetés

Egyváltozós függvény: $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$, vagy az $f : D_f \mapsto R_f$
Többváltozós függvény: $f : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$
Példa: Vektor hossza: $|\cdot| : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}$, ahol $(x, y, z) \mapsto \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

Definíció (Általános többváltozós függvény)

Az $f : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^m$ általános többváltozós függvénynek nevezzük, ha $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (f_1(x_1, \ldots, x_n), f_2(x_1, \ldots, x_n), \ldots, f_m(x_1, \ldots, x_n))$, ahol f_i a függvény i-edik komponens-vagy koordinátafüggvénye ($f_i : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$).

Példa: Legyen $f(x, y, z) = (xy, x^2 - y^2, x^3 + 1)$, ekkor a komponensfüggvények a következők:

$$f_1(x, y, z) = xy, \qquad f_2(x, y, z) = x^2 - y^2, \qquad f_3(x, y, z) = x^3 + 1$$

Bevezetés

Egyváltozós függvény: $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$, vagy az $f : D_f \mapsto R_f$
Többváltozós függvény: $f : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$
Példa: Vektor hossza: $|\cdot| : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}$, ahol $(x, y, z) \mapsto \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

Definíció (Általános többváltozós függvény)

Az $f : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^m$ általános többváltozós függvénynek nevezzük, ha $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (f_1(x_1, \ldots, x_n), f_2(x_1, \ldots, x_n), \ldots, f_m(x_1, \ldots, x_n))$, ahol f_i a függvény i-edik komponens-vagy koordinátafüggvénye ($f_i : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$).

Példa: Legyen $f(x, y, z) = (xy, x^2 - y^2, x^3 + 1)$, ekkor a komponensfüggvények a következők:

$$f_1(x, y, z) = xy, \qquad f_2(x, y, z) = x^2 - y^2, \qquad f_3(x, y, z) = x^3 + 1$$

Szemléltetni az alábbi esetekben tudjuk:

n/m	$m = 1$	$m = 2$	$m = 3$
$n = 1$	koordinátarendszer(sík)	síkgörbe	térgörbe
$n = 2$	koordinátarendszer(tér)	iránymező	felület
$n = 3$	skalármező(térsűrűség)	vektormező(síkbeli)	vektormező

Kétváltozós függvények: $n = 2,\ m = 1$

$f : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto f(x, y) =: z$, Grafikon: $\{(x, y, f(x, y)) | (x, y) \in D_f\}$

Kétváltozós függvények: $n = 2,\ m = 1$

$f : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto f(x, y) =: z$, Grafikon: $\{(x, y, f(x, y))|(x, y) \in D_f\}$

1. példa Ábrázoljuk az $f(x, y) = x^2 + y^2$ függvényt.

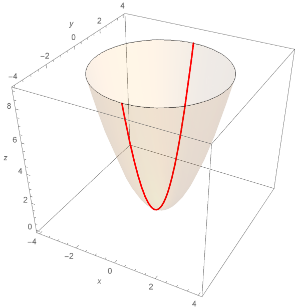
Kétváltozós függvények: $n = 2,\ m = 1$

$f : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto f(x, y) =: z$, Grafikon: $\{(x, y, f(x, y))|(x, y) \in D_f\}$

1. példa Ábrázoljuk az $f(x, y) = x^2 + y^2$ függvényt.

Ábrázolás lépései:

1) $x - z$ tengelymetszet ($y = 0$): $f(x, 0) = x^2 \Rightarrow$ parabola



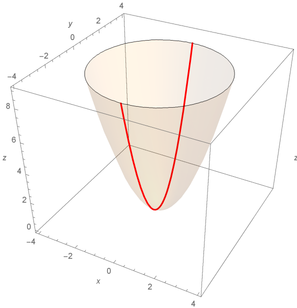
Kétváltozós függvények: $n = 2,\ m = 1$

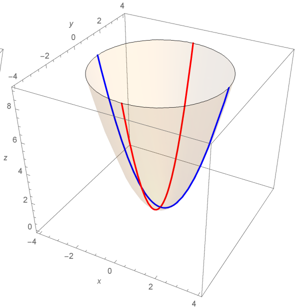
$f : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R},\ (x, y) \mapsto f(x, y) =: z,$ Grafikon: $\{(x, y, f(x, y))|(x, y) \in D_f\}$

1. példa Ábrázoljuk az $f(x, y) = x^2 + y^2$ függvényt.

Ábrázolás lépései:

1) $x - z$ tengelymetszet $(y = 0)$: $f(x, 0) = x^2 \Rightarrow$ parabola
2) $y - z$ tengelymetszet $(x = 0)$: $f(0, y) = y^2 \Rightarrow$ parabola





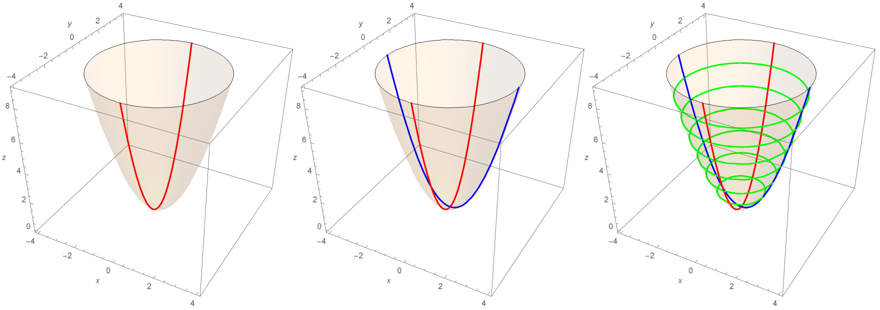
Kétváltozós függvények: $n = 2$, $m = 1$

$f : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto f(x, y) =: z$, Grafikon: $\{(x, y, f(x, y)) | (x, y) \in D_f\}$

1. példa Ábrázoljuk az $f(x, y) = x^2 + y^2$ függvényt.

Ábrázolás lépései:

1) $x - z$ tengelymetszet $(y = 0)$: $f(x, 0) = x^2 \Rightarrow$ parabola
2) $y - z$ tengelymetszet $(x = 0)$: $f(0, y) = y^2 \Rightarrow$ parabola
3) szintvonalak $(f(x, y) = c)$: $x^2 + y^2 = c \Rightarrow \sqrt{c}$ sugarú körök



Függvényhatárérték

Definíció

Az $f : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^m$ *függvény határértéke az* $\mathbf{x}_0(x_0^1, x_0^2, \ldots, x_0^n)$ *pontban* $\mathbf{a}(a_1, a_2, \ldots a_m)$*, ha* $\forall \epsilon > 0,\ \exists \delta > 0,$ *hogy* $|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0| < \delta$ *esetén* $|f(\mathbf{x}) - \mathbf{a}| < \epsilon$*.*
Jelölés: $\lim\limits_{\mathbf{x} \to \mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}) = \mathbf{a}$.

Függvényhatárérték

Definíció

Az $f: \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^m$ *függvény határértéke az* $\mathbf{x}_0(x_0^1, x_0^2, \ldots, x_0^n)$ *pontban* $\mathbf{a}(a_1, a_2, \ldots a_m)$, *ha* $\forall \epsilon > 0$, $\exists \delta > 0$, *hogy* $|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0| < \delta$ *esetén* $|f(\mathbf{x}) - \mathbf{a}| < \epsilon$.
Jelölés: $\lim\limits_{\mathbf{x} \to \mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}) = \mathbf{a}$.
Az f *függvény folytonos* $\mathbf{x}_0$*-ban, ha* $\mathbf{x}_0 \in D_f$ *és* $\lim\limits_{\mathbf{x} \to \mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}_0)$.

Függvényhatárérték

Definíció

Az $f:\mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^m$ *függvény határértéke az* $\mathbf{x}_0(x_0^1, x_0^2, \ldots, x_0^n)$ *pontban* $\mathbf{a}(a_1, a_2, \ldots a_m)$, *ha* $\forall\epsilon > 0$, $\exists\delta > 0$, *hogy* $|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0| < \delta$ *esetén* $|f(\mathbf{x})-\mathbf{a}| < \epsilon$.
Jelölés: $\lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}) = \mathbf{a}$.
Az f *függvény folytonos* $\mathbf{x}_0$*-ban, ha* $\mathbf{x}_0 \in D_f$ *és* $\lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}_0)$.

2. példa Vizsgáljuk meg a $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy}{x^2+y^2}$ határértéket.

Függvényhatárérték

Definíció

Az $f : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^m$ függvény határértéke az $\mathbf{x}_0(x_0^1, x_0^2, \dots, x_0^n)$ pontban $\mathbf{a}(a_1, a_2, \dots a_m)$, ha $\forall \epsilon > 0$, $\exists \delta > 0$, hogy $|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0| < \delta$ esetén $|f(\mathbf{x}) - \mathbf{a}| < \epsilon$.
Jelölés: $\lim\limits_{\mathbf{x} \to \mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}) = \mathbf{a}$.
Az f függvény folytonos $\mathbf{x}_0$-ban, ha $\mathbf{x}_0 \in D_f$ és $\lim\limits_{\mathbf{x} \to \mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}_0)$.

2. példa Vizsgáljuk meg a $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy}{x^2+y^2}$ határértéket.

Vizsgáljuk meg a függvényt a tengelyeken:

1) Ha $y = 0$, akkor $\forall x: \ f(x,0) = 0$

Függvényhatárérték

Definíció

Az $f : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^m$ függvény határértéke az $\mathbf{x}_0(x_0^1, x_0^2, \ldots, x_0^n)$ pontban $\mathbf{a}(a_1, a_2, \ldots a_m)$, ha $\forall\epsilon > 0$, $\exists\delta > 0$, hogy $|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0| < \delta$ esetén $|f(\mathbf{x}) - \mathbf{a}| < \epsilon$.
Jelölés: $\lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}) = \mathbf{a}$.
Az f függvény folytonos $\mathbf{x}_0$-ban, ha $\mathbf{x}_0 \in D_f$ és $\lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}_0)$.

2. példa Vizsgáljuk meg a $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy}{x^2+y^2}$ határértéket.

Vizsgáljuk meg a függvényt a tengelyeken:

1) Ha $y = 0$, akkor $\forall x :\ f(x, 0) = 0$
2) Ha $x = 0$, akkor $\forall y :\ f(0, y) = 0$

Függvényhatárérték

Definíció

Az $f : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^m$ függvény határértéke az $\mathbf{x}_0(x_0^1, x_0^2, \ldots, x_0^n)$ pontban $\mathbf{a}(a_1, a_2, \ldots a_m)$, ha $\forall \epsilon > 0$, $\exists \delta > 0$, hogy $|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0| < \delta$ esetén $|f(\mathbf{x}) - \mathbf{a}| < \epsilon$.
Jelölés: $\lim\limits_{\mathbf{x} \to \mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}) = \mathbf{a}$.
Az f függvény folytonos $\mathbf{x}_0$-ban, ha $\mathbf{x}_0 \in D_f$ és $\lim\limits_{\mathbf{x} \to \mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}_0)$.

2. példa Vizsgáljuk meg a $\lim\limits_{(x,y) \to (0,0)} \dfrac{xy}{x^2 + y^2}$ határértéket.

Vizsgáljuk meg a függvényt a tengelyeken:

1) Ha $y = 0$, akkor $\forall x : \ f(x, 0) = 0$
2) Ha $x = 0$, akkor $\forall y : \ f(0, y) = 0$
3) Ha $y = x$, akkor $f(x, x) = \dfrac{x^2}{x^2 + x^2} = \dfrac{1}{2} \neq 0$

tehát ez a határérték nem létezik, mert bármilyen $(0, 0)$-hoz közeledés mellett ugyanahhoz az értékhez kell konvergálnunk.

Parciális derivált

Definíció

Az $f:\mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ *függvény* $\mathbf{a} \in D_f$ *helyen* x_i *szerint parciális deriválható, ha az* $f_i : x_i \mapsto f(a_1, \ldots a_{i-1}, x_i, a_{i+1}, \ldots, a_n)$ *egyváltozós függvény deriválható az* $x_i = a_i$ *helyen. Jelölés:* $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{a}) = f'_{x_i}(\mathbf{a}) = \partial_i f(\mathbf{a})$

Parciális derivált

Definíció

Az $f : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ függvény $\mathbf{a} \in D_f$ helyen x_i szerint parciális deriválható, ha az $f_i : x_i \mapsto f(a_1, \dots a_{i-1}, x_i, a_{i+1}, \dots, a_n)$ egyváltozós függvény deriválható az $x_i = a_i$ helyen. Jelölés: $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{a}) = f'_{x_i}(\mathbf{a}) = \partial_i f(\mathbf{a})$

Tehát egy kivételével minden változót lerögzítünk egy konstansnak és így egy egyváltozós függvényt már tudunk deriválni a szokott módon. Ezt minden változó szerint megtehetjük.

3. példa Számítsuk ki az $f(x, y, z) = x^2 - 3xz + 2y^2z - z^2$ parciális deriváltjait és számítsuk ki azt a $(2, 1, 1)$ pontban:

Parciális derivált

Definíció

Az $f : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ függvény $\mathbf{a} \in D_f$ helyen x_i szerint parciális deriválható, ha az $f_i : x_i \mapsto f(a_1, \dots a_{i-1}, x_i, a_{i+1}, \dots, a_n)$ egyváltozós függvény deriválható az $x_i = a_i$ helyen. Jelölés: $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{a}) = f'_{x_i}(\mathbf{a}) = \partial_i f(\mathbf{a})$

Tehát egy kivételével minden változót lerögzítünk egy konstansnak és így egy egyváltozós függvényt már tudunk deriválni a szokott módon. Ezt minden változó szerint megtehetjük.

3. példa Számítsuk ki az $f(x, y, z) = x^2 - 3xz + 2y^2z - z^2$ parciális deriváltjait és számítsuk ki azt a $(2, 1, 1)$ pontban:

$f'_x(x, y, z) = 2x - 3z \Rightarrow f'_x(2, 1, 1) = 4 - 3 = 1$

$f'_y(x, y, z) = 4yz \Rightarrow f'_y(2, 1, 1) = 4$

$f'_z(x, y, z) = -3x + 2y^2 - 2z \Rightarrow f'_z(2, 1, 1) = -6 + 2 - 2 = -6$

Érintősík egyenlete

Egy változóban az $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ függvénygörbe $x_0 \in D_f$ pontjához tartozó érintő egyenes egyenlete:

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

Érintősík egyenlete

Egy változóban az $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ függvénygörbe $x_0 \in D_f$ pontjához tartozó érintő egyenes egyenlete:

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

Kétváltozóban az $f : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ függvénygörbe $(x_0, y_0) \in D_f$ pontjához tartozó éritősík egyenlete:

$$z = f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)(y - y_0) + f(x_0, y_0)$$

Érintősík egyenlete

Egy változóban az $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ függvénygörbe $x_0 \in D_f$ pontjához tartozó érintő egyenes egyenlete:

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

Kétváltozóban az $f : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ függvénygörbe $(x_0, y_0) \in D_f$ pontjához tartozó éritősík egyenlete:

$$z = f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)(y - y_0) + f(x_0, y_0)$$

4. példa Írjuk fel az $f(x, y) = x^2y^3 - 3y + 4$ függvény $(2, 1)$ pontjához tartozó érintősík egyenletét.

Érintősík egyenlete

Egy változóban az $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ függvénygörbe $x_0 \in D_f$ pontjához tartozó érintő egyenes egyenlete:

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

Kétváltozóban az $f : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ függvénygörbe $(x_0, y_0) \in D_f$ pontjához tartozó éritősík egyenlete:

$$z = f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)(y - y_0) + f(x_0, y_0)$$

4. példa Írjuk fel az $f(x, y) = x^2y^3 - 3y + 4$ függvény $(2, 1)$ pontjához tartozó érintősík egyenletét.

$f(2, 1) = 4 - 3 + 4 = 5$

$f'_x(x, y) = 2xy^3 \Rightarrow f'_x(2, 1) = 4$

$f'_y(x, y) = 3x^2y^2 - 3 \Rightarrow f'_y(2, 1) = 12 - 3 = 9$

Érintősík egyenlete:

$$z = 4(x - 2) + 9(y - 1) + 5 = 4x - 8 + 9y - 9 + 5 = 4x + 9y - 12$$

Gradiens

Definíció

Ha egy $f : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ *függvény valamely* $P_0 \in \mathbb{R}^n$ *pontjában az összes parciális derivált létezik, akkor* f P_0*-beli gradiense azon* $n-$*dimenziós vektor, melynek* $i-$*edik koordinátája az* $i-$*edik parciális derivált a* P_0 *helyen. Jelölés:* $\operatorname{grad} f(P_0)$ *vagy* $\nabla f(P_0)$ *("nabla").*

Gradiens

Definíció

Ha egy $f : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ függvény valamely $P_0 \in \mathbb{R}^n$ pontjában az összes parciális derivált létezik, akkor f P_0-beli gradiense azon $n-$dimenziós vektor, melynek $i-$edik koordinátája az $i-$edik parciális derivált a P_0 helyen. Jelölés: $\operatorname{grad} f(P_0)$ *vagy* $\nabla f(P_0)$ *("nabla").*

5. példa Írjuk fel az $f(x, y) = x^2 + y^2$ függvény gradiensét és érintősíkját az $\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right)$ pontban.

Gradiens

Definíció

Ha egy $f : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ függvény valamely $P_0 \in \mathbb{R}^n$ pontjában az összes parciális derivált létezik, akkor f P_0-beli gradiense azon $n-$dimenziós vektor, melynek $i-$edik koordinátája az $i-$edik parciális derivált a P_0 helyen. Jelölés: $\operatorname{grad} f(P_0)$ *vagy* $\nabla f(P_0)$ *("nabla").*

5. példa Írjuk fel az $f(x,y) = x^2 + y^2$ függvény gradiensét és érintősíkját az $\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right)$ pontban.

$f\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{16} + \frac{1}{4} = \frac{5}{16}$

$f'_x(x,y) = 2x \Rightarrow f'_x\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$

$f'_y(x,y) = 2y \Rightarrow f'_y\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right) = 1$

Gradiens: $\operatorname{grad} f(x,y) = \nabla f(x,y) = (2x, 2y) \Rightarrow \operatorname{grad} f\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}, 1\right)$

Érintősík egyenlete: $z = \frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{4}\right) + 1\left(y - \frac{1}{2}\right) + \frac{5}{16} \Rightarrow z = \frac{1}{2}x + y - \frac{5}{16}$

Totális derivált

Egyváltozós derivált másképpen: Ha az $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ függvény differenciálható az $x_0 \in D_f$ pontban, akkor $f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \epsilon(x - x_0)$, ahol $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{\epsilon(x - x_0)}{x - x_0} = 0$.

Totális derivált

Egyváltozós derivált másképpen: Ha az $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ függvény differenciálható az $x_0 \in D_f$ pontban, akkor
$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \epsilon(x - x_0)$, ahol $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{\epsilon(x - x_0)}{x - x_0} = 0.$

Definíció

Az $f : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^m$, $f(x_1, \dots, x_n) = (f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_m(x_1, \dots, x_n))$ totálisan differenciálható az $\mathbf{x}_0 \in D_f$ belső pontban, ha a komponensfüggvényei minden változó szerint parciálisan deriválhatóak és $f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}_0) + \underline{\underline{A}}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) + \epsilon(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)$, ahol $\lim\limits_{\mathbf{x} \to \mathbf{x}_0} \dfrac{\epsilon(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|} = 0$, $\underline{\underline{A}}_{ij} = \dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}$.
Az $\underline{\underline{A}} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ mátrixot az $f(\mathbf{x})$ $\mathbf{x}_0$-beli Jacobi-mátrixának nevezzük.

Totális derivált

Egyváltozós derivált másképpen: Ha az $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ függvény differenciálható az $x_0 \in D_f$ pontban, akkor $f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \epsilon(x - x_0)$, ahol $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{\epsilon(x - x_0)}{x - x_0} = 0$.

Definíció

Az $f : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^m$, $f(x_1, \ldots, x_n) = (f_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, f_m(x_1, \ldots, x_n))$ *totálisan differenciálható az* $\mathbf{x}_0 \in D_f$ *belső pontban, ha a komponensfüggvényei minden változó szerint parciálisan deriválhatóak és* $f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}_0) + \underline{\underline{A}}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) + \epsilon(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)$, *ahol* $\lim\limits_{\mathbf{x} \to \mathbf{x}_0} \dfrac{\epsilon(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|} = 0$, $\underline{\underline{A}}_{ij} = \dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}$.
Az $\underline{\underline{A}} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ *mátrixot az* $f(\mathbf{x})$ $\mathbf{x}_0$*-beli Jacobi-mátrixának nevezzük.*

Tétel

Ha az $f : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^m$ *függvény minden komponensfüggvényének minden parciális deriváltja létezik és folytonos az* $\mathbf{x}_0 \in D_f$ *egy környezetében, akkor* $f(\mathbf{x})$ *az* $\mathbf{x}_0$*-ban totálisan differenciálható.*

Példa

6. példa Számítsuk ki az $f(x, y, z) = (xy - z^2, x^2 - y^2 + 3z)$ függvény Jacobi-mátrixát.

Példa

6. példa Számítsuk ki az $f(x,y,z) = (xy - z^2, x^2 - y^2 + 3z)$ függvény Jacobi-mátrixát.
Az f függvénynek 3 változója van és 2 komponensfüggvénye, ezért a Jacobi mátrix 2×3-as. Nézzük a komponensfüggvényeket és azok összes parciális deriváltját:

$$f_1(x,y,z) = xy - z^2$$

Példa

6. példa Számítsuk ki az $f(x,y,z) = (xy - z^2, x^2 - y^2 + 3z)$ függvény Jacobi-mátrixát.
Az f függvénynek 3 változója van és 2 komponensfüggvénye, ezért a Jacobi mátrix 2×3-as. Nézzük a komponensfüggvényeket és azok összes parciális deriváltját:

$$f_1(x,y,z) = xy - z^2$$

$$\partial_x f_1(x,y,z) = y$$
$$\partial_y f_1(x,y,z) = x$$
$$\partial_z f_1(x,y,z) = -2z$$

Példa

6. példa Számítsuk ki az $f(x,y,z) = (xy - z^2, x^2 - y^2 + 3z)$ függvény Jacobi-mátrixát.
Az f függvénynek 3 változója van és 2 komponensfüggvénye, ezért a Jacobi mátrix 2×3-as. Nézzük a komponensfüggvényeket és azok összes parciális deriváltját:

$$f_1(x,y,z) = xy - z^2$$

$$\partial_x f_1(x,y,z) = y$$
$$\partial_y f_1(x,y,z) = x$$
$$\partial_z f_1(x,y,z) = -2z$$

$$f_2(x,y,z) = x^2 - y^2 + 3z$$

Példa

6. példa Számítsuk ki az $f(x, y, z) = (xy - z^2, x^2 - y^2 + 3z)$ függvény Jacobi-mátrixát.
Az f függvénynek 3 változója van és 2 komponensfüggvénye, ezért a Jacobi mátrix 2×3-as. Nézzük a komponensfüggvényeket és azok összes parciális deriváltját:

$$f_1(x, y, z) = xy - z^2$$

$$\begin{aligned}
\partial_x f_1(x, y, z) &= y \\
\partial_y f_1(x, y, z) &= x \\
\partial_z f_1(x, y, z) &= -2z
\end{aligned}$$

$$f_2(x, y, z) = x^2 - y^2 + 3z$$

$$\begin{aligned}
\partial_x f_2(x, y, z) &= 2x \\
\partial_y f_2(x, y, z) &= -2y \\
\partial_z f_2(x, y, z) &= 3
\end{aligned}$$

Példa

6. példa Számítsuk ki az $f(x,y,z) = (xy - z^2, x^2 - y^2 + 3z)$ függvény Jacobi-mátrixát.

Az f függvénynek 3 változója van és 2 komponensfüggvénye, ezért a Jacobi mátrix 2×3-as. Nézzük a komponensfüggvényeket és azok összes parciális deriváltját:

$$f_1(x,y,z) = xy - z^2$$

$$\partial_x f_1(x,y,z) = y$$
$$\partial_y f_1(x,y,z) = x$$
$$\partial_z f_1(x,y,z) = -2z$$

$$f_2(x,y,z) = x^2 - y^2 + 3z$$

$$\partial_x f_2(x,y,z) = 2x$$
$$\partial_y f_2(x,y,z) = -2y$$
$$\partial_z f_2(x,y,z) = 3$$

Tehát a Jacobi-mátrix:

$$f'(x,y,z) = \begin{bmatrix} y & x & -2z \\ 2x & -2y & 3 \end{bmatrix}$$

Iránymenti derivált

Parciális derivált: Megmondja, hogy az x és y tengely irányába mennyi az érintő meredeksége.

Iránymenti derivált

Parciális derivált: Megmondja, hogy az x és y tengely irányába mennyi az érintő meredeksége.

Kérdés: Mi az érintő meredeksége egy tetszőleges, nem tengellyel párhuzamos irányba?

Iránymenti derivált

Parciális derivált: Megmondja, hogy az x és y tengely irányába mennyi az érintő meredeksége.

Kérdés: Mi az érintő meredeksége egy tetszőleges, nem tengellyel párhuzamos irányba?

Definíció

Az $f : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ függvény valamely $P_0 \in \mathbb{R}^n$ pontjában a $\mathbf{v}$ *egységvektor* ($|\mathbf{v}| = 1$) *irányába eső iránymenti deriváltja a* $\lim\limits_{P \to P_0+} \dfrac{f(P) - f(P_0)}{|\overrightarrow{P_0P}|}$, *ahol* $\overrightarrow{P_0P}$ *a* $\mathbf{v}$ *vektorral egyállású. Jelölés:* $f'_{\mathbf{v}}(P_0)$.

Iránymenti derivált

Parciális derivált: Megmondja, hogy az x és y tengely irányába mennyi az érintő meredeksége.

Kérdés: Mi az érintő meredeksége egy tetszőleges, nem tengellyel párhuzamos irányba?

Definíció

Az $f : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ függvény valamely $P_0 \in \mathbb{R}^n$ pontjában a $\mathbf{v}$ egységvektor ($|\mathbf{v}| = 1$) irányába eső iránymenti deriváltja a $\lim\limits_{P \to P_0+} \dfrac{f(P) - f(P_0)}{|\overrightarrow{P_0 P}|}$, ahol $\overrightarrow{P_0 P}$ a $\mathbf{v}$ vektorral egyállású. Jelölés: $f'_{\mathbf{v}}(P_0)$.

A fenti határérték ekvivalens a $\lim\limits_{t \to 0+} \dfrac{f(P_0 + t\mathbf{v}) - f(P_0)}{t}$ határértékkel.

Iránymenti derivált

Parciális derivált: Megmondja, hogy az x és y tengely irányába mennyi az érintő meredeksége.
Kérdés: Mi az érintő meredeksége egy tetszőleges, nem tengellyel párhuzamos irányba?

Definíció

Az $f : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ függvény valamely $P_0 \in \mathbb{R}^n$ pontjában a $\mathbf{v}$ egységvektor ($|\mathbf{v}| = 1$) irányába eső iránymenti deriváltja a $\lim\limits_{P \to P_0+} \dfrac{f(P) - f(P_0)}{|\overrightarrow{P_0P}|}$, ahol $\overrightarrow{P_0P}$ a $\mathbf{v}$ vektorral egyállású. Jelölés: $f'_{\mathbf{v}}(P_0)$.

A fenti határérték ekvivalens a $\lim\limits_{t \to 0+} \dfrac{f(P_0 + t\mathbf{v}) - f(P_0)}{t}$ határértékkel.

Tétel

Ha az $f : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ függvény totálisan deriválható P_0-ban, akkor az $f'_{\mathbf{v}}(P_0)$ iránymenti derivált kiszámítható úgy, hogy $f'_{\mathbf{v}}(P_0) = \langle \operatorname{grad} f(P_0), \mathbf{v} \rangle$.

Példa

7. példa Írjuk fel az $f(x,y) = x^2y - 3xy^3 + 6x - 3$ függvény $\mathbf{v} = (3,4)$ irányú deriváltját a $P(1,2)$ helyen.

Példa

7. példa Írjuk fel az $f(x,y) = x^2y - 3xy^3 + 6x - 3$ függvény $\mathbf{v} = (3,4)$ irányú deriváltját a $P(1,2)$ helyen.
Első lépésben kiszámítjuk a függvény parciális deriváltjait:
$f_x'(x,y) = 2xy - 3y^3 + 6 \Rightarrow f_x'(1,2) = 4 - 24 + 6 = -14$

Példa

7. példa Írjuk fel az $f(x,y) = x^2y - 3xy^3 + 6x - 3$ függvény $\mathbf{v} = (3,4)$ irányú deriváltját a $P(1,2)$ helyen.

Első lépésben kiszámítjuk a függvény parciális deriváltjait:

$f'_x(x,y) = 2xy - 3y^3 + 6 \Rightarrow f'_x(1,2) = 4 - 24 + 6 = -14$

$f'_y(x,y) = x^2 - 9xy^2 \Rightarrow f'_y(1,2) = 1 - 36 = -35$

Példa

7. példa Írjuk fel az $f(x,y)=x^2y-3xy^3+6x-3$ függvény $\mathbf{v}=(3,4)$ irányú deriváltját a $P(1,2)$ helyen.
Első lépésben kiszámítjuk a függvény parciális deriváltjait:
$f'_x(x,y)=2xy-3y^3+6 \Rightarrow f'_x(1,2)=4-24+6=-14$
$f'_y(x,y)=x^2-9xy^2 \Rightarrow f'_y(1,2)=1-36=-35$
Majd meghatározzuk a $\mathbf{v}$ irányú egységvektort:

$$\mathbf{v}_0=\frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|}=\frac{1}{\sqrt{3^2+4^2}}(3,4)=\left(\frac{3}{5},\frac{4}{5}\right)$$

Példa

7. példa Írjuk fel az $f(x,y)=x^2y-3xy^3+6x-3$ függvény $\mathbf{v}=(3,4)$ irányú deriváltját a $P(1,2)$ helyen.
Első lépésben kiszámítjuk a függvény parciális deriváltjait:
$f'_x(x,y)=2xy-3y^3+6 \Rightarrow f'_x(1,2)=4-24+6=-14$
$f'_y(x,y)=x^2-9xy^2 \Rightarrow f'_y(1,2)=1-36=-35$
Majd meghatározzuk a $\mathbf{v}$ irányú egységvektort:

$$\mathbf{v}_0=\frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|}=\frac{1}{\sqrt{3^2+4^2}}(3,4)=\left(\frac{3}{5},\frac{4}{5}\right)$$

Az $f(x,y)$ mindkét változója szerinti parciális derivált létezik és folytonos, tehát a függvény totálisan deriválható, ezért az előző tétel alapján az iránymenti derivált meghatározható a gradiens és az adott irányú egységvektor skaláris szorzataként:

$$f'_{\mathbf{v}}(x,y)=\langle \operatorname{grad} f(x,y),\mathbf{v}_0\rangle \Rightarrow$$

$$f'_{(3,4)}(1,2)=\left\langle(-14,-35),\left(\frac{3}{5},\frac{4}{5}\right)\right\rangle=\frac{-42-140}{5}=-\frac{182}{5}=-36,4$$

Iránymenti derivált szélsőértéke

Ha a függvény totálisan deriválható, akkor a parciális deriváltakból minden más irányba kiszámolható az iránymenti derivált, azaz az adott pontra jelemző meredekségek (minden irányban) már a parciális deriváltakba bele vannak kódolva.

Kérdés: Milyen irányba lesz a meredekség maximális/minimális?

Iránymenti derivált szélsőértéke

Ha a függvény totálisan deriválható, akkor a parciális deriváltakból minden más irányba kiszámolható az iránymenti derivált, azaz az adott pontra jellemző meredekségek (minden irányban) már a parciális deriváltakba bele vannak kódolva.

Kérdés: Milyen irányba lesz a meredekség maximális/minimális?

A szöveges szélsőértékénél mindig valamilyen paramétert vezetünk be, itt legyen α az adott irányú $\mathbf{v}_0$ egységvektor és a gradiensvektor szöge.

$$f'_{\mathbf{v}}(x,y) = \langle \operatorname{grad} f(x,y), \mathbf{v}_0 \rangle = |\operatorname{grad} f(x,y)| \cdot |\mathbf{v}_0| \cos\alpha = |\operatorname{grad} f(x,y)| \cos\alpha$$

Iránymenti derivált szélsőértéke

Ha a függvény totálisan deriválható, akkor a parciális deriváltakból minden más irányba kiszámolható az iránymenti derivált, azaz az adott pontra jelemző meredekségek (minden irányban) már a parciális deriváltakba bele vannak kódolva.

Kérdés: Milyen irányba lesz a meredekség maximális/minimális?

A szöveges szélsőértéknél mindig valamilyen paramétert vezetünk be, itt legyen α az adott irányú $\mathbf{v}_0$ egységvektor és a gradiensvektor szöge.

$f'_{\mathbf{v}}(x,y) = \langle \mathrm{grad}\, f(x,y), \mathbf{v}_0 \rangle = |\mathrm{grad}\, f(x,y)| \cdot |\mathbf{v}_0| \cos\alpha = |\mathrm{grad}\, f(x,y)| \cos\alpha$

A gradiensvektor nagysága az adott pontra jellemző tulajdonság, ami az α változására invariáns, vagyis az iránymenti derivált értékét egyedül a gradienssel bezárt szög koszinusza határozza meg:

Tétel

Legyen az $f : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ függvény totálisan deriválható P_0-ban, ekkor az iránymenti derivált akkor maximális, ha a gradiensvektor irányába mutat, minimális, ha azzal ellentétes és 0 a rá merőleges irányokba.

Láncszabály

Emlékeztető: $(f \circ g)' = (f(g(x)))' = f'(g(x))g'(x)$

Kérdés: Hogyan lehet a láncszabályt kiterjeszteni több változóra?

Láncszabály

Emlékeztető: $(f \circ g)' = (f(g(x)))' = f'(g(x))g'(x)$
Kérdés: Hogyan lehet a láncszabályt kiterjeszteni több változóra?

Tétel

Legyen $f : \mathbb{R}^m \mapsto \mathbb{R}^n$ *és* $g : \mathbb{R}^k \mapsto \mathbb{R}^m$ *olyan függvények, hogy* g *differenciálható* $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^k$ *és* f *differenciálható* $g(\mathbf{x}_0) \in \mathbb{R}^m$*-ben. Ekkor* $(f \circ g) : \mathbb{R}^k \mapsto \mathbb{R}^n$ *függvény differenciálható* $\mathbf{x}_0$*-ban,* $(f \circ g)'(\mathbf{x}_0) \in \mathbb{R}^{n \times k}$ *és* $(f \circ g)'(\mathbf{x}_0) = f'(g(\mathbf{x}_0))g'(x_0)$*, ahol* $f'(g(\mathbf{x}_0)) \in \mathbb{R}^{n \times m}$ *és* $g'(\mathbf{x}_0) \in \mathbb{R}^{m \times k}$.

Tehát szükségünk van mindkét függvény Jacobi-mátrixára, az f-nek a $g(\mathbf{x}_0)$, g-nek az $\mathbf{x}_0$ helyen és ezen mátrixokat össze kell szoroznunk.

Láncszabály

Emlékeztető: $(f \circ g)' = (f(g(x)))' = f'(g(x))g'(x)$
Kérdés: Hogyan lehet a láncszabályt kiterjeszteni több változóra?

Tétel

Legyen $f : \mathbb{R}^m \mapsto \mathbb{R}^n$ és $g : \mathbb{R}^k \mapsto \mathbb{R}^m$ olyan függvények, hogy g differenciálható $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^k$ és f differenciálható $g(\mathbf{x}_0) \in \mathbb{R}^m$-ben. Ekkor $(f \circ g) : \mathbb{R}^k \mapsto \mathbb{R}^n$ függvény differenciálható $\mathbf{x}_0$-ban, $(f \circ g)'(\mathbf{x}_0) \in \mathbb{R}^{n \times k}$ és $(f \circ g)'(\mathbf{x}_0) = f'(g(\mathbf{x}_0))g'(x_0)$, ahol $f'(g(\mathbf{x}_0)) \in \mathbb{R}^{n \times m}$ és $g'(\mathbf{x}_0) \in \mathbb{R}^{m \times k}$.

Tehát szükségünk van mindkét függvény Jacobi-mátrixára, az f-nek a $g(\mathbf{x}_0)$, g-nek az $\mathbf{x}_0$ helyen és ezen mátrixokat össze kell szoroznunk.
Speciális eset: $k = 1,\ m = 2,\ n = 1$
Ha $f : (x, y) \mapsto f(x, y)$ és $g : t \mapsto (x(t), y(t))$, akkor
$(f \circ g)(t) = f(x(t), y(t))$, egy tömegpontra jellemző helyfüggő mennyiség.

$$(f \circ g)'(t) = \begin{bmatrix} f'_x(x(t), y(t)) & f'_y(x(t), y(t)) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{bmatrix} =$$

$$= f'_x(x(t), y(t)) \cdot x'(t) + f'_y(x(t), y(t)) \cdot y'(t)$$

Példa

8. példa Legyen $f(x,y)=\frac{1}{6}x^2y^3$ és $g(t)=(t^3,t^2)$. Határozzuk meg az $(f\circ g)(t)$ függvény deriváltját a többváltozós láncszabály segítségével.

Példa

8. példa Legyen $f(x,y)=\frac{1}{6}x^2y^3$ és $g(t)=(t^3,t^2)$. Határozzuk meg az $(f\circ g)(t)$ függvény deriváltját a többváltozós láncszabály segítségével.

Szükségünk van a $g(t)$ Jacobi-mátrixára: $g'(t)=\begin{bmatrix} 3t^2 \\ 2t \end{bmatrix}$

Példa

8. példa Legyen $f(x,y)=\frac{1}{6}x^2y^3$ és $g(t)=(t^3,t^2)$. Határozzuk meg az $(f\circ g)(t)$ függvény deriváltját a többváltozós láncszabály segítségével.

Szükségünk van a $g(t)$ Jacobi-mátrixára: $g'(t)=\begin{bmatrix} 3t^2 \\ 2t \end{bmatrix}$

Szükségünk van az $f(x,y)$ Jacobi mátrixára: $f'(x,y)=\begin{bmatrix} \frac{1}{3}xy^3 & \frac{1}{2}x^2y^2 \end{bmatrix}$

Példa

8. példa Legyen $f(x,y) = \frac{1}{6}x^2y^3$ és $g(t) = (t^3, t^2)$. Határozzuk meg az $(f \circ g)(t)$ függvény deriváltját a többváltozós láncszabály segítségével.

Szükségünk van a $g(t)$ Jacobi-mátrixára: $g'(t) = \begin{bmatrix} 3t^2 \\ 2t \end{bmatrix}$

Szükségünk van az $f(x,y)$ Jacobi mátrixára: $f'(x,y) = \begin{bmatrix} \frac{1}{3}xy^3 & \frac{1}{2}x^2y^2 \end{bmatrix}$

Az $f(x,y)$ Jacobi-mátrixa a $g(t)$ helyen:

$f'(g(t)) = f'(x(t), y(t)) = \begin{bmatrix} \frac{1}{3}t^3(t^2)^3 & \frac{1}{2}(t^2)^2(t^3)^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3}t^9 & \frac{1}{2}t^{10} \end{bmatrix}$

Példa

8. példa Legyen $f(x,y)=\frac{1}{6}x^2y^3$ és $g(t)=(t^3,t^2)$. Határozzuk meg az $(f\circ g)(t)$ függvény deriváltját a többváltozós láncszabály segítségével.

Szükségünk van a $g(t)$ Jacobi-mátrixára: $g'(t)=\begin{bmatrix} 3t^2 \\ 2t \end{bmatrix}$

Szükségünk van az $f(x,y)$ Jacobi mátrixára: $f'(x,y)=\begin{bmatrix} \frac{1}{3}xy^3 & \frac{1}{2}x^2y^2 \end{bmatrix}$

Az $f(x,y)$ Jacobi-mátrixa a $g(t)$ helyen:

$$f'(g(t))=f'(x(t),y(t))=\begin{bmatrix} \frac{1}{3}t^3(t^2)^3 & \frac{1}{2}(t^2)^2(t^3)^2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \frac{1}{3}t^9 & \frac{1}{2}t^{10} \end{bmatrix}$$

Tehát a láncszabály alapján:

$$(f\circ g)'(t)=\begin{bmatrix} \frac{1}{3}t^9 & \frac{1}{2}t^{10} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3t^2 \\ 2t \end{bmatrix}=t^{11}+t^{11}=2t^{11}$$

Példa

8. példa Legyen $f(x,y)=\frac{1}{6}x^2y^3$ és $g(t)=(t^3,t^2)$. Határozzuk meg az $(f\circ g)(t)$ függvény deriváltját a többváltozós láncszabály segítségével.

Szükségünk van a $g(t)$ Jacobi-mátrixára: $g'(t)=\begin{bmatrix} 3t^2 \\ 2t \end{bmatrix}$

Szükségünk van az $f(x,y)$ Jacobi mátrixára: $f'(x,y)=\begin{bmatrix} \frac{1}{3}xy^3 & \frac{1}{2}x^2y^2 \end{bmatrix}$

Az $f(x,y)$ Jacobi-mátrixa a $g(t)$ helyen:

$f'(g(t))=f'(x(t),y(t))=\begin{bmatrix} \frac{1}{3}t^3(t^2)^3 & \frac{1}{2}(t^2)^2(t^3)^2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \frac{1}{3}t^9 & \frac{1}{2}t^{10} \end{bmatrix}$

Tehát a láncszabály alapján:

$$(f\circ g)'(t)=\begin{bmatrix} \frac{1}{3}t^9 & \frac{1}{2}t^{10} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3t^2 \\ 2t \end{bmatrix}=t^{11}+t^{11}=2t^{11}$$

Vegyük észre, hogy az ebben a speciális esetben:

$f(g(t))=\dfrac{1}{6}(t^3)^2(t^2)^3=\dfrac{1}{6}t^{12}$, amiből $(f(g(t)))'=2t^{11}$.

Másodrendű parciális deriváltak

Definíció

Legyen $f : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ *függvény totálisan deriválható* $\mathbf{x}_0 \in D_f$ *pontban, ekkor az* $f_i'(\mathbf{x})$ *függvény* x_j *szerinti parciális deriváltja, ha az létezik, akkor azt az* $f(\mathbf{x})$ *i-edik és j-edik másodrendű parciális deriváltjának nevezzük.*

Jelölés: $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\mathbf{x}_0) = f_{ij}''(\mathbf{x}_0) = \partial_{ij}^2 f(\mathbf{x}_0)$

Másodrendű parciális deriváltak

Definíció

Legyen $f : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ függvény totálisan deriválható $\mathbf{x}_0 \in D_f$ pontban, ekkor az $f_i'(\mathbf{x})$ függvény x_j szerinti parciális deriváltja, ha az létezik, akkor azt az $f(\mathbf{x})$ i-edik és j-edik másodrendű parciális deriváltjának nevezzük.

Jelölés: $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\mathbf{x}_0) = f_{ij}''(\mathbf{x}_0) = \partial_{ij}^2 f(\mathbf{x}_0)$

9. példa Számítsuk ki az $f(x,y) = x^2 - 3xy^2 + xy + y^3$ fügvény másodrendű parciális deriváltjait.

Másodrendű parciális deriváltak

Definíció

Legyen $f : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ függvény totálisan deriválható $\mathbf{x}_0 \in D_f$ pontban, ekkor az $f_i'(\mathbf{x})$ függvény x_j szerinti parciális deriváltja, ha az létezik, akkor azt az $f(\mathbf{x})$ i-edik és j-edik másodrendű parciális deriváltjának nevezzük.

Jelölés: $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\mathbf{x}_0) = f_{ij}''(\mathbf{x}_0) = \partial_{ij}^2 f(\mathbf{x}_0)$

9. példa Számítsuk ki az $f(x, y) = x^2 - 3xy^2 + xy + y^3$ fügvény másodrendű parciális deriváltjait.

$f_x'(x, y) = 2x - 3y^2 + y$
$f_y'(x, y) = -6xy + x + 3y^2$

Másodrendű parciális deriváltak

Definíció

Legyen $f : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ függvény totálisan deriválható $\mathbf{x}_0 \in D_f$ pontban, ekkor az $f_i'(\mathbf{x})$ függvény x_j szerinti parciális deriváltja, ha az létezik, akkor azt az $f(\mathbf{x})$ i-edik és j-edik másodrendű parciális deriváltjának nevezzük.

Jelölés: $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\mathbf{x}_0) = f_{ij}''(\mathbf{x}_0) = \partial_{ij}^2 f(\mathbf{x}_0)$

9. példa Számítsuk ki az $f(x, y) = x^2 - 3xy^2 + xy + y^3$ fügvény másodrendű parciális deriváltjait.

$f_x'(x, y) = 2x - 3y^2 + y$
$f_y'(x, y) = -6xy + x + 3y^2$

$f_{xx}''(x, y) = 2$
$f_{xy}''(x, y) = -6y + 1$

Másodrendű parciális deriváltak

Definíció

Legyen $f : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ függvény totálisan deriválható $\mathbf{x}_0 \in D_f$ pontban, ekkor az $f_i'(\mathbf{x})$ függvény x_j szerinti parciális deriváltja, ha az létezik, akkor azt az $f(\mathbf{x})$ i-edik és j-edik másodrendű parciális deriváltjának nevezzük.

Jelölés: $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\mathbf{x}_0) = f_{ij}''(\mathbf{x}_0) = \partial_{ij}^2 f(\mathbf{x}_0)$

9. példa Számítsuk ki az $f(x,y) = x^2 - 3xy^2 + xy + y^3$ fügvény másodrendű parciális deriváltjait.

$$f_x'(x,y) = 2x - 3y^2 + y$$
$$f_y'(x,y) = -6xy + x + 3y^2$$

$$f_{xx}''(x,y) = 2$$
$$f_{xy}''(x,y) = -6y + 1$$
$$f_{yx}''(x,y) = -6y + 1$$
$$f_{yy}''(x,y) = -6x + 6y$$

Másodrendű parciális deriváltak

Definíció

Legyen $f : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ függvény totálisan deriválható $\mathbf{x}_0 \in D_f$ pontban, ekkor az $f_i'(\mathbf{x})$ függvény x_j szerinti parciális deriváltja, ha az létezik, akkor azt az $f(\mathbf{x})$ i-edik és j-edik másodrendű parciális deriváltjának nevezzük.

Jelölés: $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\mathbf{x}_0) = f_{ij}''(\mathbf{x}_0) = \partial_{ij}^2 f(\mathbf{x}_0)$

9. példa Számítsuk ki az $f(x,y) = x^2 - 3xy^2 + xy + y^3$ fügvény másodrendű parciális deriváltjait.

$$f_x'(x,y) = 2x - 3y^2 + y$$
$$f_y'(x,y) = -6xy + x + 3y^2$$

$$f_{xx}''(x,y) = 2$$
$$f_{xy}''(x,y) = -6y + 1$$
$$f_{yx}''(x,y) = -6y + 1$$
$$f_{yy}''(x,y) = -6x + 6y$$

Ilyen módon a derivált tetszőleges rendben definiálható.

Másodrendű parciális deriváltak

Definíció

Legyen $f : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ függvény totálisan deriválható $\mathbf{x}_0 \in D_f$ pontban, ekkor az $f_i'(\mathbf{x})$ függvény x_j szerinti parciális deriváltja, ha az létezik, akkor azt az $f(\mathbf{x})$ i-edik és j-edik másodrendű parciális deriváltjának nevezzük.

Jelölés: $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\mathbf{x}_0) = f_{ij}''(\mathbf{x}_0) = \partial_{ij}^2 f(\mathbf{x}_0)$

9. példa Számítsuk ki az $f(x, y) = x^2 - 3xy^2 + xy + y^3$ fügvény másodrendű parciális deriváltjait.

$$f_x'(x, y) = 2x - 3y^2 + y$$
$$f_y'(x, y) = -6xy + x + 3y^2$$

$$f_{xx}''(x, y) = 2$$
$$f_{xy}''(x, y) = -6y + 1$$
$$f_{yx}''(x, y) = -6y + 1$$
$$f_{yy}''(x, y) = -6x + 6y$$

Ilyen módon a derivált tetszőleges rendben definiálható.
Észrevehető, hogy most $f_{xy}''(x, y) = f_{yx}''(x, y)$.

Második totális deriválhatóség és Young-tétel

Definíció

Ha $f : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ totálisan deriválható az $\mathbf{x}_0$ egy környezetében és az elsőrendű deriváltjai totálisan deriválhatóak $\mathbf{x}_0$-ban, akkor f kétszer totálisan deriválható $\mathbf{x}_0$-ban.

Második totális deriválhatóség és Young-tétel

Definíció

Ha $f : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ totálisan deriválható az $\mathbf{x}_0$ egy környezetében és az elsőrendű deriváltjai totálisan deriválhatóak $\mathbf{x}_0$-ban, akkor f kétszer totálisan deriválható $\mathbf{x}_0$-ban.

Tétel (Young)

Ha $f : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ kétszer totálisan deriválható $\mathbf{x}_0$-ban, akkor
$\forall i, j \in \{1, \ldots, n\} : f''_{ij}(\mathbf{x}_0) = f''_{ji}(\mathbf{x}_0).$

Lokális szélsőérték

Definíció

Az $f : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ *függvénynek a lokális maximuma/minimuma van az* $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ *pontban, ha* $\mathbf{x}_0$*-nak van egy olyan* $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^n$ *környezete, hogy* $\forall \mathbf{x} \in \mathcal{D}$*-re* $f(\mathbf{x}) \leq f(\mathbf{x}_0) / f(\mathbf{x}) \geq f(\mathbf{x}_0)$.

Lokális szélsőérték

Definíció

Az $f : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ *függvénynek a lokális maximuma/minimuma van az* $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ *pontban, ha* $\mathbf{x}_0$*-nak van egy olyan* $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^n$ *környezete, hogy* $\forall \mathbf{x} \in \mathcal{D}$*-re* $f(\mathbf{x}) \leq f(\mathbf{x}_0)/f(\mathbf{x}) \geq f(\mathbf{x}_0)$.

Tétel (Szélsőérték szükséges feltétele)

Ha az $f : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ *függvénynek a lokális szélsőértéke van az* $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ *pontban, akkor ott a létező összes parciális derivált 0.*

Lokális szélsőérték

Definíció

Az $f : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ függvénynek a lokális maximuma/minimuma van az $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ pontban, ha $\mathbf{x}_0$-nak van egy olyan $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^n$ környezete, hogy $\forall \mathbf{x} \in \mathcal{D}$-re $f(\mathbf{x}) \leq f(\mathbf{x}_0) / f(\mathbf{x}) \geq f(\mathbf{x}_0)$.

Tétel (Szélsőérték szükséges feltétele)

Ha az $f : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ függvénynek a lokális szélsőértéke van az $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ pontban, akkor ott a létező összes parciális derivált 0.

Definíció

Az $f : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ függvény stacionárius pontjai az olyan $\mathbf{x} \in D_f$ pontok, melyekben az összes parciális derivált 0.

Felületi görbe konvexitása 1.

Kérdés: Mikor lesz egy stacionárius pontban szélsőérték?

Felületi görbe konvexitása 1.

Kérdés: Mikor lesz egy stacionárius pontban szélsőérték?
Egy stacionárius pontban minden iránymenti derivált is 0, tehát minden irányhoz tartozó felületi görbének lehet itt szélsőértéke. Ha minden irányban ez egy azonos típusú lokális szélsőérték, akkor ez az eredeti függvénynek is lokális szélsőértéke lesz. Egyváltozós esetben elégséges feltétel volt az, hogy a második derivált pozitív (minimum) vagy negatív (maximum) legyen. Tehát lokális szélsőérték van, ha minden irányban a második derivált azonos előjelű.

Felületi görbe konvexitása 1.

Kérdés: Mikor lesz egy stacionárius pontban szélsőérték?
Egy stacionárius pontban minden iránymenti derivált is 0, tehát minden irányhoz tartozó felületi görbének lehet itt szélsőértéke. Ha minden irányban ez egy azonos típusú lokális szélsőérték, akkor ez az eredeti függvénynek is lokális szélsőértéke lesz. Egyváltozós esetben elégséges feltétel volt az, hogy a második derivált pozitív (minimum) vagy negatív (maximum) legyen. Tehát lokális szélsőérték van, ha minden irányban a második derivált azonos előjelű.
Kérdés: Hogyan tudjuk adott irányba meghatározni a második deriváltat?

Felületi görbe konvexitása 1.

Kérdés: Mikor lesz egy stacionárius pontban szélsőérték?
Egy stacionárius pontban minden iránymenti derivált is 0, tehát minden irányhoz tartozó felületi görbének lehet itt szélsőértéke. Ha minden irányban ez egy azonos típusú lokális szélsőérték, akkor ez az eredeti függvénynek is lokális szélsőértéke lesz. Egyváltozós esetben elégséges feltétel volt az, hogy a második derivált pozitív (minimum) vagy negatív (maximum) legyen. Tehát lokális szélsőérték van, ha minden irányban a második derivált azonos előjelű.
Kérdés: Hogyan tudjuk adott irányba meghatározni a második deriváltat?
Legyen az $f(x, y)$ függvény stacionárius pontja (x_0, y_0) és legyen f kétszer totálisan deriválható. Tekintsük az $\mathbf{e} = (\cos\alpha, \sin\alpha)$ egységvektor irányába mutató $f(x(t), y(t)) = f(x_0 + t\cos\alpha, y_0 + t\sin\alpha)$ t-től függő $\mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ függvényt. Ez úgy is felfogható, mint az $f(g(t))$ kompozíció, ahol $g : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}^2$, $g(t) = (x_0 + t\cos\alpha, y_0 + t\sin\alpha)$. Az $f(g(t))$ függvény t szerinti deriváltja a láncszabály alapján számolható.

Felületi görbe konvexitása 2.

$$(f(g(t)))' = f'(g(t))g'(t) = \begin{bmatrix} f'_x(x(t),y(t)) & f'_y(x(t),y(t)) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{bmatrix} =$$

Felületi görbe konvexitása 2.

$$(f(g(t)))' = f'(g(t))g'(t) = \left[\begin{array}{cc} f'_x(x(t),y(t)) & f'_y(x(t),y(t)) \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} x'(t) \\ y'(t) \end{array}\right] =$$
$$= f'_x(x_0 + t\cos\alpha, y_0 + t\sin\alpha)\cos\alpha + f'_y(x_0 + t\cos\alpha, y_0 + t\sin\alpha)\sin\alpha =$$
$$= f'_x(g(t))\cos\alpha + f'_y(g(t))\sin\alpha$$

Felületi görbe konvexitása 2.

$$(f(g(t)))' = f'(g(t))g'(t) = \left[\begin{array}{cc} f'_x(x(t), y(t)) & f'_y(x(t), y(t)) \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} x'(t) \\ y'(t) \end{array} \right] =$$
$$= f'_x(x_0 + t\cos\alpha, y_0 + t\sin\alpha)\cos\alpha + f'_y(x_0 + t\cos\alpha, y_0 + t\sin\alpha)\sin\alpha =$$
$$= f'_x(g(t))\cos\alpha + f'_y(g(t))\sin\alpha$$

A felületi görbe második deriváltját a láncszabály ismételt alkalmazásával kapjuk meg az összeg mindkét tagjára:

$$(f(g(t)))'' = \cos\alpha[f'_x(g(t))]' + \sin\alpha[f'_y(g(t))]'$$

Felületi görbe konvexitása 2.

$$(f(g(t)))' = f'(g(t))g'(t) = \left[\begin{array}{cc} f'_x(x(t), y(t)) & f'_y(x(t), y(t)) \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} x'(t) \\ y'(t) \end{array}\right] =$$
$$= f'_x(x_0 + t\cos\alpha, y_0 + t\sin\alpha)\cos\alpha + f'_y(x_0 + t\cos\alpha, y_0 + t\sin\alpha)\sin\alpha =$$
$$= f'_x(g(t))\cos\alpha + f'_y(g(t))\sin\alpha$$

A felületi görbe második deriváltját a láncszabály ismételt alkalmazásával kapjuk meg az összeg mindkét tagjára:

$$(f(g(t)))'' = \cos\alpha[f'_x(g(t))]' + \sin\alpha[f'_y(g(t))]' = \cos\alpha[f''_{xx}(g(t))\cos\alpha + f''_{xy}(g(t))\sin\alpha] + \sin\alpha[f''_{yx}(g(t))\cos\alpha + f''_{yy}(g(t))\sin\alpha]$$

Felületi görbe konvexitása 2.

$$(f(g(t)))' = f'(g(t))g'(t) = \begin{bmatrix} f'_x(x(t), y(t)) & f'_y(x(t), y(t)) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{bmatrix} =$$
$$= f'_x(x_0 + t\cos\alpha, y_0 + t\sin\alpha)\cos\alpha + f'_y(x_0 + t\cos\alpha, y_0 + t\sin\alpha)\sin\alpha =$$
$$= f'_x(g(t))\cos\alpha + f'_y(g(t))\sin\alpha$$

A felületi görbe második deriváltját a láncszabály ismételt alkalmazásával kapjuk meg az összeg mindkét tagjára:

$$(f(g(t)))'' = \cos\alpha[f'_x(g(t))]' + \sin\alpha[f'_y(g(t))]' = \cos\alpha[f''_{xx}(g(t))\cos\alpha + f''_{xy}(g(t))\sin\alpha] + \sin\alpha[f''_{yx}(g(t))\cos\alpha + f''_{yy}(g(t))\sin\alpha]$$

Egyszerűsítés, a Young-tétel alkalmazása és $t = 0$ beírása után:

$$(f(g(0)))'' = f''_{xx}(x_0, y_0)\cos^2\alpha + 2f''_{xy}(x_0, y_0)\cos\alpha\sin\alpha + f''_{yy}(x_0, y_0)\sin^2\alpha$$

Felületi görbe konvexitása 2.

$(f(g(t)))' = f'(g(t))g'(t) = \begin{bmatrix} f'_x(x(t), y(t)) & f'_y(x(t), y(t)) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{bmatrix} =$
$= f'_x(x_0 + t\cos\alpha, y_0 + t\sin\alpha)\cos\alpha + f'_y(x_0 + t\cos\alpha, y_0 + t\sin\alpha)\sin\alpha =$
$= f'_x(g(t))\cos\alpha + f'_y(g(t))\sin\alpha$
A felületi görbe második deriváltját a láncszabály ismételt alkalmazásával kapjuk meg az összeg mindkét tagjára:
$(f(g(t)))'' = \cos\alpha[f'_x(g(t))]' + \sin\alpha[f'_y(g(t))]' = \cos\alpha[f''_{xx}(g(t))\cos\alpha +$
$f''_{xy}(g(t))\sin\alpha] + \sin\alpha[f''_{yx}(g(t))\cos\alpha + f''_{yy}(g(t))\sin\alpha]$
Egyszerűsítés, a Young-tétel alkalmazása és $t = 0$ beírása után:
$(f(g(0)))'' = f''_{xx}(x_0, y_0)\cos^2\alpha + 2f''_{xy}(x_0, y_0)\cos\alpha\sin\alpha + f''_{yy}(x_0, y_0)\sin^2\alpha$
Ehhez emeljünk ki az egyenletből $\cos^2\alpha$-t:
$(f(g(0)))'' = \cos^2\alpha(f''_{yy}(x_0, y_0)\tan^2\alpha + 2f''_{xy}(x_0, y_0)\tan\alpha + f''_{xx}(x_0, y_0))$

Felületi görbe konvexitása 2.

$(f(g(t)))' = f'(g(t))g'(t) = \begin{bmatrix} f'_x(x(t), y(t)) & f'_y(x(t), y(t)) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{bmatrix} =$
$= f'_x(x_0 + t\cos\alpha, y_0 + t\sin\alpha)\cos\alpha + f'_y(x_0 + t\cos\alpha, y_0 + t\sin\alpha)\sin\alpha =$
$= f'_x(g(t))\cos\alpha + f'_y(g(t))\sin\alpha$

A felületi görbe második deriváltját a láncszabály ismételt alkalmazásával kapjuk meg az összeg mindkét tagjára:

$(f(g(t)))'' = \cos\alpha[f'_x(g(t))]' + \sin\alpha[f'_y(g(t))]' = \cos\alpha[f''_{xx}(g(t))\cos\alpha + f''_{xy}(g(t))\sin\alpha] + \sin\alpha[f''_{yx}(g(t))\cos\alpha + f''_{yy}(g(t))\sin\alpha]$

Egyszerűsítés, a Young-tétel alkalmazása és $t = 0$ beírása után:

$(f(g(0)))'' = f''_{xx}(x_0, y_0)\cos^2\alpha + 2f''_{xy}(x_0, y_0)\cos\alpha\sin\alpha + f''_{yy}(x_0, y_0)\sin^2\alpha$

Ehhez emeljünk ki az egyenletből $\cos^2\alpha$-t:

$(f(g(0)))'' = \cos^2\alpha(f''_{yy}(x_0, y_0)\tan^2\alpha + 2f''_{xy}(x_0, y_0)\tan\alpha + f''_{xx}(x_0, y_0))$

A $\tan\alpha$-ra másodfokű kifejezés állandó előjelű, ha nincs gyöke, vagyis a diszkriminánsa negatív: $D = 4(f''_{xy}(x_0, y_0))^2 - 4f''_{xx}(x_0, y_0)f''_{yy}(x_0, y_0) < 0$, azaz $f''_{xx}(x_0, y_0)f''_{yy}(x_0, y_0) - (f''_{xy}(x_0, y_0))^2 > 0$.

Elégséges feltétel – Kétváltozós eset

Tétel

Ha az $f : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ *függvénynek az* (x_0, y_0) *pont valamely környezetében a második parciális deriváltjai léteznek és folytonosak, továbbá*

$$f'_x(x_0, y_0) = f'_y(x_0, y_0) = 0 \quad \text{és} \quad f''_{xx}(x_0, y_0) f''_{yy}(x_0, y_0) - (f''_{xy}(x_0, y_0))^2 > 0,$$

akkor az $f(x, y)$ *függvénynek lokális szélsőértéke van az* (x_0, y_0) *pontban. A szélsőérték minimum, ha* $f''_{xx}(x_0, y_0) > 0$ *és maximum, ha* $f''_{xx}(x_0, y_0) < 0$.

Elégséges feltétel – Kétváltozós eset

Tétel

Ha az $f:\mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ függvénynek az (x_0, y_0) pont valamely környezetében a második parciális deriváltjai léteznek és folytonosak, továbbá

$$f'_x(x_0,y_0) = f'_y(x_0,y_0) = 0 \text{ és } f''_{xx}(x_0,y_0)f''_{yy}(x_0,y_0) - (f''_{xy}(x_0,y_0))^2 > 0,$$

akkor az $f(x,y)$ függvénynek lokális szélsőértéke van az (x_0, y_0) pontban. A szélsőérték minimum, ha $f''_{xx}(x_0,y_0) > 0$ és maximum, ha $f''_{xx}(x_0,y_0) < 0$.

Tétel

Ha az $f:\mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ függvénynek az (x_0, y_0) pont valamely környezetében a második parciális deriváltjai léteznek és folytonosak, továbbá

$$f'_x(x_0,y_0) = f'_y(x_0,y_0) = 0 \text{ és } f''_{xx}(x_0,y_0)f''_{yy}(x_0,y_0) - (f''_{xy}(x_0,y_0))^2 < 0,$$

akkor az $f(x,y)$ az (x_0, y_0)-ban nincs lokális szélsőértéke (nyeregpont).

Felületi görbe konvexitás 3.

$$(f(g(0)))'' = f''_{xx}(x_0, y_0)\cos^2\alpha + 2f''_{xy}(x_0, y_0)\cos\alpha\sin\alpha + f''_{yy}(x_0, y_0)\sin^2\alpha$$

Felületi görbe konvexitás 3.

$(f(g(0)))'' = f''_{xx}(x_0, y_0)\cos^2\alpha + 2f''_{xy}(x_0, y_0)\cos\alpha\sin\alpha + f''_{yy}(x_0, y_0)\sin^2\alpha$
Ekkor a derivált átírható az alábbi kvadratikus alakra:

$$(f(g(0)))'' = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f''_{xx}(x_0, y_0) & f''_{xy}(x_0, y_0) \\ f''_{yx}(x_0, y_0) & f''_{yy}(x_0, y_0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{bmatrix} = \mathbf{e}^T\mathbf{H}\mathbf{e}$$

Felületi görbe konvexitás 3.

$(f(g(0)))'' = f''_{xx}(x_0, y_0)\cos^2\alpha + 2f''_{xy}(x_0, y_0)\cos\alpha\sin\alpha + f''_{yy}(x_0, y_0)\sin^2\alpha$
Ekkor a derivált átírható az alábbi kvadratikus alakra:

$$(f(g(0)))'' = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f''_{xx}(x_0, y_0) & f''_{xy}(x_0, y_0) \\ f''_{yx}(x_0, y_0) & f''_{yy}(x_0, y_0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{bmatrix} = \mathbf{e}^T\mathbf{H}\mathbf{e}$$

Definíció

Legyen $f : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ kétszer toálisan deriválható az $\mathbf{x}_0 \in D_f$ pont egy környezetében. Ekkor a $(\mathbf{H}_f(\mathbf{x}_0))_{ij} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\mathbf{x}_0)$ mátrixot f Hesse-mátrixának nevezzük.

Felületi görbe konvexitás 3.

$(f(g(0)))'' = f''_{xx}(x_0, y_0)\cos^2\alpha + 2f''_{xy}(x_0, y_0)\cos\alpha\sin\alpha + f''_{yy}(x_0, y_0)\sin^2\alpha$
Ekkor a derivált átírható az alábbi kvadratikus alakra:

$$(f(g(0)))'' = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f''_{xx}(x_0, y_0) & f''_{xy}(x_0, y_0) \\ f''_{yx}(x_0, y_0) & f''_{yy}(x_0, y_0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{bmatrix} = \mathbf{e}^T \mathbf{H} \mathbf{e}$$

Definíció

Legyen $f : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ kétszer toálisan deriválható az $\mathbf{x}_0 \in D_f$ pont egy környezetében. Ekkor a $(\mathbf{H}_f(\mathbf{x}_0))_{ij} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\mathbf{x}_0)$ mátrixot f Hesse-mátrixának nevezzük.

Azt is észrevehetjük, hogy kétváltozós esetben
$\det \mathbf{H}_f(\mathbf{x}_0) = f''_{xx}(x_0, y_0) f''_{yy}(x_0, y_0) - (f''_{xy}(x_0, y_0))^2$.

Kétváltozós függvény szélsőértékeinek megállapítása

(1) Megállapítjuk a függvény értelmezési tartományát.

Kétváltozós függvény szélsőértékeinek megállapítása

(1) Megállapítjuk a függvény értelmezési tartományát.

(2) Meghatározzuk az $f'_x(x, y)$, $f'_y(x, y)$ parciális deriváltakat.

Kétváltozós függvény szélsőértékeinek megállapítása

(1) Megállapítjuk a függvény értelmezési tartományát.

(2) Meghatározzuk az $f'_x(x, y)$, $f'_y(x, y)$ parciális deriváltakat.

(3) Megoldjuk az $f'_x(x, y) = 0$, $f'_y(x, y) = 0$ egyenletrendszert. A megoldások lesznek a stacionárius pontok.

Kétváltozós függvény szélsőértékeinek megállapítása

(1) Megállapítjuk a függvény értelmezési tartományát.

(2) Meghatározzuk az $f'_x(x, y)$, $f'_y(x, y)$ parciális deriváltakat.

(3) Megoldjuk az $f'_x(x, y) = 0$, $f'_y(x, y) = 0$ egyenletrendszert. A megoldások lesznek a stacionárius pontok.

(4) Meghatározzuk a második parciális deriváltakból álló Hesse-mátrixot.

Kétváltozós függvény szélsőértékeinek megállapítása

(1) Megállapítjuk a függvény értelmezési tartományát.

(2) Meghatározzuk az $f'_x(x, y)$, $f'_y(x, y)$ parciális deriváltakat.

(3) Megoldjuk az $f'_x(x, y) = 0$, $f'_y(x, y) = 0$ egyenletrendszert. A megoldások lesznek a stacionárius pontok.

(4) Meghatározzuk a második parciális deriváltakból álló Hesse-mátrixot.

(5) Kiszámítjuka Hesse-mátrix determinánsát a stacionárius pontokban.

Kétváltozós függvény szélsőértékeinek megállapítása

(1) Megállapítjuk a függvény értelmezési tartományát.

(2) Meghatározzuk az $f'_x(x, y)$, $f'_y(x, y)$ parciális deriváltakat.

(3) Megoldjuk az $f'_x(x, y) = 0$, $f'_y(x, y) = 0$ egyenletrendszert. A megoldások lesznek a stacionárius pontok.

(4) Meghatározzuk a második parciális deriváltakból álló Hesse-mátrixot.

(5) Kiszámítjuka Hesse-mátrix determinánsát a stacionárius pontokban.

(6a) Ahol a Hesse-mátrix determinánsa negatív, ott nyeregpont van.

(6b) Ahol a Hesse-mátrix determinánsa pozitív, ott megvizsgáljuk az $f''_{xx}(x, y)$ függvény előjelét. Ha pozitív, akkor abban a stacionárius pontban lokális minimum van, ha negatív, akkor lokális maximum.

Példa

10. példa Keressük meg az $f(x, y) = 1 + x + 4y - 3x^3 - 3y^3$ függvény lokális szélsőértékeit.

(1) A függvény minden $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ pontban értelmezett.

Példa

10. példa Keressük meg az $f(x, y) = 1 + x + 4y - 3x^3 - 3y^3$ függvény lokális szélsőértékeit.

(1) A függvény minden $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ pontban értelmezett.

(2) $f'_x(x, y) = 1 - 9x^2$ és $f'_y(x, y) = 4 - 9y^2$

Példa

10. példa Keressük meg az $f(x,y) = 1 + x + 4y - 3x^3 - 3y^3$ függvény lokális szélsőértékeit.

(1) A függvény minden $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ pontban értelmezett.

(2) $f'_x(x,y) = 1 - 9x^2$ és $f'_y(x,y) = 4 - 9y^2$

(3) $f'_x(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = \pm\dfrac{1}{3}$ és ettől függetlenül $f'_y(x,y) = 0 \Leftrightarrow y = \pm\dfrac{2}{3}$.
Stacionárius pontok: $P_1\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$, $P_2\left(\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}\right)$, $P_3\left(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$, $P_4\left(-\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}\right)$.

Példa

10. példa Keressük meg az $f(x,y) = 1 + x + 4y - 3x^3 - 3y^3$ függvény lokális szélsőértékeit.

(1) A függvény minden $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ pontban értelmezett.

(2) $f'_x(x,y) = 1 - 9x^2$ és $f'_y(x,y) = 4 - 9y^2$

(3) $f'_x(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = \pm\dfrac{1}{3}$ és ettől függetlenül $f'_y(x,y) = 0 \Leftrightarrow y = \pm\dfrac{2}{3}$.

Stacionárius pontok: $P_1\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$, $P_2\left(\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}\right)$, $P_3\left(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$, $P_4\left(-\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}\right)$.

(4) $f''_{xx}(x,y) = -18x$, $f''_{xy}(x,y) = f''_{yx}(x,y) = 0$ és $f''_{yy}(x,y) = -18y$

Példa

10. példa Keressük meg az $f(x,y) = 1 + x + 4y - 3x^3 - 3y^3$ függvény lokális szélsőértékeit.

(1) A függvény minden $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ pontban értelmezett.

(2) $f'_x(x,y) = 1 - 9x^2$ és $f'_y(x,y) = 4 - 9y^2$

(3) $f'_x(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = \pm\dfrac{1}{3}$ és ettől függetlenül $f'_y(x,y) = 0 \Leftrightarrow y = \pm\dfrac{2}{3}$.

Stacionárius pontok: $P_1\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$, $P_2\left(\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}\right)$, $P_3\left(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$, $P_4\left(-\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}\right)$.

(4) $f''_{xx}(x,y) = -18x$, $f''_{xy}(x,y) = f''_{yx}(x,y) = 0$ és $f''_{yy}(x,y) = -18y$

(5) $\mathbf{H}_f(x,y) = \begin{bmatrix} -18x & 0 \\ 0 & -18y \end{bmatrix} \Rightarrow \det \begin{bmatrix} -18x & 0 \\ 0 & -18y \end{bmatrix} = 324xy$

$\det \mathbf{H}_f(P_1) = 72$, $\det \mathbf{H}_f(P_2) = -72$, $\det \mathbf{H}_f(P_3) = -72$, $\det \mathbf{H}_f(P_4) = 72$

Példa

10. példa Keressük meg az $f(x,y) = 1 + x + 4y - 3x^3 - 3y^3$ függvény lokális szélsőértékeit.

(1) A függvény minden $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ pontban értelmezett.

(2) $f'_x(x,y) = 1 - 9x^2$ és $f'_y(x,y) = 4 - 9y^2$

(3) $f'_x(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = \pm\dfrac{1}{3}$ és ettől függetlenül $f'_y(x,y) = 0 \Leftrightarrow y = \pm\dfrac{2}{3}$.
Stacionárius pontok: $P_1\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$, $P_2\left(\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}\right)$, $P_3\left(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$, $P_4\left(-\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}\right)$.

(4) $f''_{xx}(x,y) = -18x$, $f''_{xy}(x,y) = f''_{yx}(x,y) = 0$ és $f''_{yy}(x,y) = -18y$

(5) $\mathbf{H}_f(x,y) = \begin{bmatrix} -18x & 0 \\ 0 & -18y \end{bmatrix} \Rightarrow \det \begin{bmatrix} -18x & 0 \\ 0 & -18y \end{bmatrix} = 324xy$
$\det \mathbf{H}_f(P_1) = 72$, $\det \mathbf{H}_f(P_2) = -72$, $\det \mathbf{H}_f(P_3) = -72$, $\det \mathbf{H}_f(P_4) = 72$

(6) P_2-ben és P_3-ban nyeregpont van. Az $f''_{xx}(P_1) = -6 < 0$, tehát P_1-ben lokális maximum van, míg $f''_{xx}(P_4) = 6 > 0$, tehát P_4-ben lokális minimum van. Értékük: $f(P_1) = 3$ és $f(P_4) = -1$.

Példa

11. példa Marci a pajtája mellé egy felülről nyitott 1 m^3 térfogatú, téglatest alakú szénatárolót szeretne építeni. A tároló hátsó falát a pajta adja, csak a többit kell elkészítenünk. Hogyan méretezze a téglatestet, hogy a lehető legkevesebb anyagot kelljen felhasználnia?

Példa

11. példa Marci a pajtája mellé egy felülről nyitott 1 m^3 térfogatú, téglatest alakú szénatárolót szeretne építeni. A tároló hátsó falát a pajta adja, csak a többit kell elkészítenünk. Hogyan méretezze a téglatestet, hogy a lehető legkevesebb anyagot kelljen felhasználnia?
Első lépésként fell kell írnunk az anyagszükséglet függvényét a téglatest méretének függvényeként. Ha a tároló szélessége a, mélysége b és magassága c, akkor az aljához ab az elejéhez ac, a két oldához pedig bc anyag szükséges. Tehát az anyagszükséglet a, b és c függvényében felírható: $F_0(a, b, c) = ab + ac + 2bc$.

Példa

11. példa Marci a pajtája mellé egy felülről nyitott 1 m^3 térfogatú, téglatest alakú szénatárolót szeretne építeni. A tároló hátsó falát a pajta adja, csak a többit kell elkészítenünk. Hogyan méretezze a téglatestet, hogy a lehető legkevesebb anyagot kelljen felhasználnia?

Első lépésként fell kell írnunk az anyagszükséglet függvényét a téglatest méretének függvényeként. Ha a tároló szélessége a, mélysége b és magassága c, akkor az aljához ab az elejéhez ac, a két oldához pedig bc anyag szükséges. Tehát az anyagszükséglet a, b és c függvényében felírható: $F_0(a,b,c) = ab + ac + 2bc$. Extra információ a térfogat, amiből kapunk a három paraméterre egy összefüggést: $V = abc = 1 \Rightarrow c = \dfrac{1}{ab}$.

Így megkapjuk az anyagszükségletet csak a és b függvényeként:

$$F(a,b) = ab + a\frac{1}{ab} + 2b\frac{1}{ab} = ab + \frac{1}{b} + \frac{2}{a} = ab + b^{-1} + 2a^{-1}$$

Példa

11. példa Marci a pajtája mellé egy felülről nyitott 1 m^3 térfogatú, téglatest alakú szénatárolót szeretne építeni. A tároló hátsó falát a pajta adja, csak a többit kell elkészítenünk. Hogyan méretezze a téglatestet, hogy a lehető legkevesebb anyagot kelljen felhasználnia?
Első lépésként fell kell írnunk az anyagszükséglet függvényét a téglatest méretének függvényeként. Ha a tároló szélessége a, mélysége b és magassága c, akkor az aljához ab az elejéhez ac, a két oldához pedig bc anyag szükséges. Tehát az anyagszükséglet a, b és c függvényében felírható: $F_0(a, b, c) = ab + ac + 2bc$. Extra információ a térfogat, amiből kapunk a három paraméterre egy összefüggést: $V = abc = 1 \Rightarrow c = \dfrac{1}{ab}$.
Így megkapjuk az anyagszükségletet csak a és b függvényeként:
$F(a, b) = ab + a\dfrac{1}{ab} + 2b\dfrac{1}{ab} = ab + \dfrac{1}{b} + \dfrac{2}{a} = ab + b^{-1} + 2a^{-1}$
Keressük az $F(a, b)$ függvény minimumát az $a, b, c > 0$ feltétel mellett.

Példa

$$F'_a(a,b) = b - 2a^{-2} = b - \frac{2}{a^2} = 0 \Rightarrow b = \frac{2}{a^2} = 2a^{-2}$$

Példa

$$F'_a(a,b) = b - 2a^{-2} = b - \frac{2}{a^2} = 0 \Rightarrow b = \frac{2}{a^2} = 2a^{-2}$$

$$F'_b(a,b) = a - b^{-2} = a - \frac{1}{b^2} = 0 \Rightarrow a = \frac{1}{b^2} = b^{-2}$$

Példa

$F_a'(a,b) = b - 2a^{-2} = b - \dfrac{2}{a^2} = 0 \Rightarrow b = \dfrac{2}{a^2} = 2a^{-2}$

$F_b'(a,b) = a - b^{-2} = a - \dfrac{1}{b^2} = 0 \Rightarrow a = \dfrac{1}{b^2} = b^{-2}$

Beírva az első egyenletbe a helyére b^{-2}-t:

$b = 2b^4 \Rightarrow \dfrac{1}{2} = b^3 \Rightarrow b = \dfrac{1}{\sqrt[3]{2}} \Rightarrow a = \sqrt[3]{4} \Rightarrow P_1\left(\sqrt[3]{4}, \dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}\right)$

Példa

$F'_a(a,b) = b - 2a^{-2} = b - \frac{2}{a^2} = 0 \Rightarrow b = \frac{2}{a^2} = 2a^{-2}$

$F'_b(a,b) = a - b^{-2} = a - \frac{1}{b^2} = 0 \Rightarrow a = \frac{1}{b^2} = b^{-2}$

Beírva az első egyenletbe a helyére b^{-2}-t:

$b = 2b^4 \Rightarrow \frac{1}{2} = b^3 \Rightarrow b = \frac{1}{\sqrt[3]{2}} \Rightarrow a = \sqrt[3]{4} \Rightarrow P_1\left(\sqrt[3]{4}, \frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right)$

Most vizsgáljuk meg, hogy P_1 milyen típusú stacionárius pont:

$F''_{aa}(a,b) = 4a^{-3}$, $F''_{ab}(a,b) = F''_{ba}(a,b) = 1$, $F''_{bb}(a,b) = 2b^{-3}$

$\det \mathbf{H}_F(P_1) = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 4 - 1 = 3 > 0$, tehát itt valóban szélsőérték van,

és mivel $F''_{aa}(P_1) = 1 > 0$, ezért minimum van.

Példa

$F'_a(a,b) = b - 2a^{-2} = b - \dfrac{2}{a^2} = 0 \Rightarrow b = \dfrac{2}{a^2} = 2a^{-2}$

$F'_b(a,b) = a - b^{-2} = a - \dfrac{1}{b^2} = 0 \Rightarrow a = \dfrac{1}{b^2} = b^{-2}$

Beírva az első egyenletbe a helyére b^{-2}-t:

$b = 2b^4 \Rightarrow \dfrac{1}{2} = b^3 \Rightarrow b = \dfrac{1}{\sqrt[3]{2}} \Rightarrow a = \sqrt[3]{4} \Rightarrow P_1\left(\sqrt[3]{4}, \dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}\right)$

Most vizsgáljuk meg, hogy P_1 milyen típusú stacionárius pont:

$F''_{aa}(a,b) = 4a^{-3},\ F''_{ab}(a,b) = F''_{ba}(a,b) = 1,\ F''_{bb}(a,b) = 2b^{-3}$

$\det \mathbf{H}_F(P_1) = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 4 - 1 = 3 > 0$, tehát itt valóban szélsőérték van,

és mivel $F''_{aa}(P_1) = 1 > 0$, ezért minimum van.

Az a és b értékeiből kiszámolható, hogy $c = \dfrac{1}{ab} = \dfrac{b^{-1}}{a} = \dfrac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{4}} = \dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}$.

Anyagszükséglet: $F(\sqrt[3]{4}, \dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}) = F_0(\sqrt[3]{4}, \dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}, \dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}) = 3\sqrt[3]{2} \approx 3,78m^2$

Elégséges feltétel magasabb dimenzióban

Tétel

Legyen az $f : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ *függvény a* P_0 *pont egy környezetében kétszer totálisan deriválható, továbbá* $\forall i \in 1, \dots, n:\ f'_{x_i}(P_0) = 0$ *és* $M_1 = f''_{x_1 x_1}(P_0)$,

$$M_2 = \begin{vmatrix} f''_{x_1x_1}(P_0) & f''_{x_1x_2}(P_0) \\ f''_{x_2x_1}(P_0) & f''_{x_2x_2}(P_0) \end{vmatrix}, \dots, M_n = \begin{vmatrix} f''_{x_1x_1}(P_0) & \dots & f''_{x_1x_n}(P_0) \\ \vdots & & \vdots \\ f''_{x_nx_1}(P_0) & \dots & f''_{x_nx_n}(P_0) \end{vmatrix}.$$

Ha minden i*-re* $M_i > 0$*, akkor* f*-nek* P_0*-ban minimuma van.*
Ha M_i *váltkozó előjelű és* $M_1 < 0$*, akkor* f*-nek* P_0*-ban maximuma van.*

A fent definiált M_i értékeket a (Hesse-)mátrix főminorjainak szokták nevezni.

Kétváltozós integrál – téglalap tartomány

Egyváltozós (határozott) integrál: Görbe alatti terület (adott intervalumon)

Kétváltozós integrál – téglalap tartomány

Egyváltozós (határozott) integrál: Görbe alatti terület (adott intervalumon)
Kétváltozós integrál: Felület alatti térfogat (adott tartományon) Jelölés:

$$\iint\limits_T f(x, y) d(x, y)$$

Kétváltozós integrál – téglalap tartomány

Egyváltozós (határozott) integrál: Görbe alatti terület (adott intervalumon)
Kétváltozós integrál: Felület alatti térfogat (adott tartományon) Jelölés:

$$\iint_T f(x,y)d(x,y)$$

Definíció

A $T \subset \mathbb{R}^2$ *tartományt téglalap tartománynak nevezzük, ha* $T = \{(x,y) | a \le x \le b, c \le y \le d\} = [a,b] \times [c,d]$*, ahol* $a,b,c,d \in \mathbb{R}$.

Mindkét változó valamilyen zárt intervallumon mozog *egymástól függetlenül*

Integrálás téglalap tartományon

Tétel (Fubini)

Ha $f : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ függvény folytonos a $T = [a, b] \times [c, d]$ tartományon, akkor

$$\iint\limits_T f(x, y) d(x, y) = \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y) dy \right) dx = \int_c^d \left(\int_a^b f(x, y) dx \right) dy$$

Tehát a kettős integrál átalakítható egy kétszeres integrállá, ahol előbb az egyik változó szerint integrálunk (a másik változót paraméternek tekintve), majd a Newton-Leibniz formula után ezen változó eltűnik és a másik változó szerint integrálva kapjuk a felület alatti (előjeles) térfogatot.

Példa

1. példa Számítsuk ki az $f(x, y) = x^2 y$ függvény integrálját a $T = \{(x, y)|0 \leq x \leq 1, 2 \leq y \leq 3\}$ tartományon.

Példa

1. példa Számítsuk ki az $f(x,y)=x^2y$ függvény integrálját a $T=\{(x,y)|0\leq x\leq 1, 2\leq y\leq 3\}$ tartományon.

$$\iint_T f(x,y)d(x,y)=$$

Példa

1. példa Számítsuk ki az $f(x,y) = x^2y$ függvény integrálját a $T = \{(x,y) | 0 \leq x \leq 1, 2 \leq y \leq 3\}$ tartományon.

$$\iint_T f(x,y)d(x,y) = \int_0^1 \int_2^3 x^2y\, dydx =$$

Példa

1. példa Számítsuk ki az $f(x,y) = x^2 y$ függvény integrálját a $T = \{(x,y) | 0 \leq x \leq 1, 2 \leq y \leq 3\}$ tartományon.

$$\iint\limits_T f(x,y) d(x,y) = \int_0^1 \int_2^3 x^2 y \, dy dx = \int_0^1 \left[x^2 \frac{y^2}{2} \right]_2^3 dx =$$

Példa

1. példa Számítsuk ki az $f(x,y) = x^2y$ függvény integrálját a $T = \{(x,y)|0 \leq x \leq 1, 2 \leq y \leq 3\}$ tartományon.

$$\iint_T f(x,y)d(x,y) = \int_0^1 \int_2^3 x^2y\,dydx = \int_0^1 \left[x^2\frac{y^2}{2}\right]_2^3 dx =$$

$$\int_0^1 x^2\frac{9}{2} - x^2\frac{4}{2}dx = \int_0^1 \frac{5}{2}x^2dx =$$

Példa

1. példa Számítsuk ki az $f(x,y) = x^2y$ függvény integrálját a $T = \{(x,y)|0 \leq x \leq 1, 2 \leq y \leq 3\}$ tartományon.

$$\iint_T f(x,y)d(x,y) = \int_0^1 \int_2^3 x^2y\, dydx = \int_0^1 \left[x^2\frac{y^2}{2}\right]_2^3 dx =$$

$$\int_0^1 x^2\frac{9}{2} - x^2\frac{4}{2}dx = \int_0^1 \frac{5}{2}x^2dx = \left[\frac{5}{2}\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{5}{6} - 0 = \frac{5}{6}$$

Példa

1. példa Számítsuk ki az $f(x,y) = x^2y$ függvény integrálját a $T = \{(x,y)|0 \leq x \leq 1, 2 \leq y \leq 3\}$ tartományon.

$$\iint_T f(x,y)d(x,y) = \int_0^1 \int_2^3 x^2y\,dydx = \int_0^1 \left[x^2\frac{y^2}{2}\right]_2^3 dx =$$

$$\int_0^1 x^2\frac{9}{2} - x^2\frac{4}{2}dx = \int_0^1 \frac{5}{2}x^2dx = \left[\frac{5}{2}\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{5}{6} - 0 = \frac{5}{6}$$

vagy

$$\iint_T f(x,y)d(x,y) =$$

Példa

1. példa Számítsuk ki az $f(x,y) = x^2y$ függvény integrálját a $T = \{(x,y)|0 \le x \le 1, 2 \le y \le 3\}$ tartományon.

$$\iint_T f(x,y)d(x,y) = \int_0^1 \int_2^3 x^2y\,dydx = \int_0^1 \left[x^2\frac{y^2}{2}\right]_2^3 dx =$$

$$\int_0^1 x^2\frac{9}{2} - x^2\frac{4}{2}dx = \int_0^1 \frac{5}{2}x^2dx = \left[\frac{5}{2}\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{5}{6} - 0 = \frac{5}{6}$$

vagy

$$\iint_T f(x,y)d(x,y) = \int_2^3 \int_0^1 x^2y\,dxdy =$$

Példa

1. példa Számítsuk ki az $f(x,y) = x^2y$ függvény integrálját a $T = \{(x,y)|0 \leq x \leq 1, 2 \leq y \leq 3\}$ tartományon.

$$\iint\limits_T f(x,y)d(x,y) = \int_0^1 \int_2^3 x^2y\,dydx = \int_0^1 \left[x^2\frac{y^2}{2}\right]_2^3 dx =$$

$$\int_0^1 x^2\frac{9}{2} - x^2\frac{4}{2}dx = \int_0^1 \frac{5}{2}x^2dx = \left[\frac{5}{2}\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{5}{6} - 0 = \frac{5}{6}$$

vagy

$$\iint\limits_T f(x,y)d(x,y) = \int_2^3 \int_0^1 x^2y\,dxdy = \int_2^3 \left[\frac{x^3}{3}y\right]_0^1 dy =$$

Példa

1. példa Számítsuk ki az $f(x,y) = x^2y$ függvény integrálját a $T = \{(x,y)|0 \leq x \leq 1, 2 \leq y \leq 3\}$ tartományon.

$$\iint_T f(x,y)d(x,y) = \int_0^1 \int_2^3 x^2y\,dydx = \int_0^1 \left[x^2\frac{y^2}{2}\right]_2^3 dx =$$

$$\int_0^1 x^2\frac{9}{2} - x^2\frac{4}{2}dx = \int_0^1 \frac{5}{2}x^2dx = \left[\frac{5}{2}\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{5}{6} - 0 = \frac{5}{6}$$

vagy

$$\iint_T f(x,y)d(x,y) = \int_2^3 \int_0^1 x^2y\,dxdy = \int_2^3 \left[\frac{x^3}{3}y\right]_0^1 dy =$$

$$\int_2^3 \frac{1}{3}y - 0dy = \int_2^3 \frac{1}{3}ydy =$$

Példa

1. példa Számítsuk ki az $f(x,y) = x^2y$ függvény integrálját a $T = \{(x,y)|0 \le x \le 1, 2 \le y \le 3\}$ tartományon.

$$\iint_T f(x,y)d(x,y) = \int_0^1 \int_2^3 x^2y\,dydx = \int_0^1 \left[x^2\frac{y^2}{2}\right]_2^3 dx =$$

$$\int_0^1 x^2\frac{9}{2} - x^2\frac{4}{2}dx = \int_0^1 \frac{5}{2}x^2dx = \left[\frac{5}{2}\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{5}{6} - 0 = \frac{5}{6}$$

vagy

$$\iint_T f(x,y)d(x,y) = \int_2^3 \int_0^1 x^2y\,dxdy = \int_2^3 \left[\frac{x^3}{3}y\right]_0^1 dy =$$

$$\int_2^3 \frac{1}{3}y - 0dy = \int_2^3 \frac{1}{3}ydy = \left[\frac{1}{3}\frac{y^2}{2}\right]_2^3 = \frac{9}{6} - \frac{4}{6} = \frac{5}{6}$$

Példa

2. példa Számítsuk ki az $f(x,y) = 3xe^{-xy}$ függvény integrálját a $T = \{(x,y)|0 \leq x \leq 1, 1 \leq y \leq 2\}$ tartományon.

Példa

2. példa Számítsuk ki az $f(x, y) = 3xe^{-xy}$ függvény integrálját a $T = \{(x, y) | 0 \leq x \leq 1, 1 \leq y \leq 2\}$ tartományon.
Ebben a feladatban is végezhetjük az integrálást tetszőleges sorrendben, de itt érdemes az y szerinti integrálással kezdeni, mert az x szerinti egy parciális integrál lenne:

$$\iint_T f(x, y) d(x, y) = \int_0^1 \int_1^2 3xe^{-xy}\, dydx =$$

Példa

2. példa Számítsuk ki az $f(x,y) = 3xe^{-xy}$ függvény integrálját a $T = \{(x,y)|0 \leq x \leq 1, 1 \leq y \leq 2\}$ tartományon.
Ebben a feladatban is végezhetjük az integrálást tetszőleges sorrendben, de itt érdemes az y szerinti integrálással kezdeni, mert az x szerinti egy parciális integrál lenne:

$$\iint_T f(x,y)d(x,y) = \int_0^1 \int_1^2 3xe^{-xy}\,dydx = \int_0^1 -3\int_1^2 -xe^{-xy}\,dydx =$$

$$= -3\int_0^1 \left[e^{-xy}\right]_1^2 dx = -3\int_0^1 e^{-2x} - e^{-x}dx = -3\left[\frac{e^{-2x}}{-2} + e^{-x}\right]_0^1 =$$

$$= -3(\frac{e^{-2}}{-2} + e^{-1} - \frac{1}{-2} - 1) = \frac{3 - 6e + 3e^2}{2e^2}$$

Szorzat alakú függvények integrálása téglalaptartományon

Legyen most $f(x,y) = g(x)h(y)$ alakú függvény, melyet a $T = [a,b] \times [c,d]$ tartományon integrálunk:

$$\iint_T f(x,y)d(x,y) = \int_a^b \left(\int_c^d g(x)h(y)dy \right) dx =$$

Szorzat alakú függvények integrálása téglalaptartományon

Legyen most $f(x,y) = g(x)h(y)$ alakú függvény, melyet a $T = [a,b] \times [c,d]$ tartományon integrálunk:

$$\iint\limits_T f(x,y)d(x,y) = \int_a^b \left(\int_c^d g(x)h(y)dy \right) dx = \int_a^b g(x) \left(\int_c^d h(y)dy \right) dx$$

Ezt azért tehetjük meg, mert a $g(x)$ rész az y szerinti integrálás szempontjából konstans.

Szorzat alakú függvények integrálása téglalaptartományon

Legyen most $f(x,y)=g(x)h(y)$ alakú függvény, melyet a $T=[a,b]\times[c,d]$ tartományon integrálunk:

$$\iint\limits_T f(x,y)d(x,y)=\int_a^b\left(\int_c^d g(x)h(y)dy\right)dx=\int_a^b g(x)\left(\int_c^d h(y)dy\right)dx$$

Ezt azért tehetjük meg, mert a $g(x)$ rész az y szerinti integrálás szempontjából konstans. A kapott forumálában a zárojeles rész egy sima egyváltozós határozott integrál, így kiértékelve konstanst kapunk, amit kiemelhetünk a külső integrálból:

$$\int_a^b g(x)\left(\int_c^d h(y)dy\right)dx=\left(\int_c^d h(y)dy\right)\left(\int_a^b g(x)dx\right)$$

Szorzat alakú függvények integrálása téglalaptartományon

Legyen most $f(x,y) = g(x)h(y)$ alakú függvény, melyet a $T = [a,b] \times [c,d]$ tartományon integrálunk:

$$\iint_T f(x,y)d(x,y) = \int_a^b \left(\int_c^d g(x)h(y)dy \right) dx = \int_a^b g(x) \left(\int_c^d h(y)dy \right) dx$$

Ezt azért tehetjük meg, mert a $g(x)$ rész az y szerinti integrálás szempontjából konstans. A kapott forumálában a zárojeles rész egy sima egyváltozós határozott integrál, így kiértékelve konstanst kapunk, amit kiemelhetünk a külső integrálból:

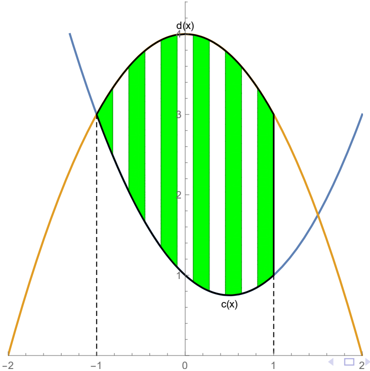
$$\int_a^b g(x) \left(\int_c^d h(y)dy \right) dx = \left(\int_c^d h(y)dy \right) \left(\int_a^b g(x)dx \right)$$

Tehát szorzat típusú kétváltozós függvények téglalaptartományon vett kettősintegrálja integrálja szétbontható két egyes integrál szorzatára.

x irányú normáltartomány

Definíció

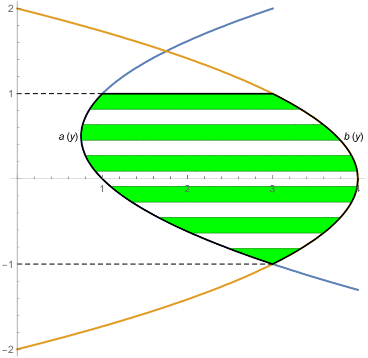
*A $T \subset \mathbb{R}^2$ tartomány x irányú normáltartomány*nak nevezzük, ha $T = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \le x \le b, c(x) \le y \le d(x)\}$, ahol $a, b \in \mathbb{R}$ és $c(x)$, $d(x)$ folytonos függvények $[a, b]$-n.*



y irányú normáltartomány

Definíció

*A $T \subset \mathbb{R}^2$ tartomány y irányú normáltartomány*nak nevezzük, ha $T = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : c \leq y \leq d, a(y) \leq x \leq d(y)\}$, ahol $c, d \in \mathbb{R}$ és $a(y)$, $b(y)$ folytonos függvények $[c, d]$-n.*



Integrálás normáltartományon

Tétel (Fubini)

Legyen az $f : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ *függvény folytonos a* $T = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b, c(x) \leq y \leq d(x)\}$ *tartományon ahol* $a, b \in \mathbb{R}$ *és* $c(x)$*,* $d(x)$ *folytonos függvények* $[a, b]$*-n. Ekkor*

$$\iint\limits_T f(x, y)d(x, y) = \int_a^b \left(\int_{c(x)}^{d(x)} f(x, y)dy \right) dx$$

Integrálás normáltartományon

Tétel (Fubini)

Legyen az $f : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ *függvény folytonos a* $T = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b, c(x) \leq y \leq d(x)\}$ *tartományon ahol* $a, b \in \mathbb{R}$ *és* $c(x)$, $d(x)$ *folytonos függvények* $[a, b]$*-n. Ekkor*

$$\iint\limits_T f(x,y)d(x,y) = \int_a^b \left(\int_{c(x)}^{d(x)} f(x,y)dy \right) dx$$

Legyen a $g : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ *függvény folytonos a* $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : c \leq y \leq d, a(y) \leq x \leq d(y)\}$ *tartományon, ahol* $c, d \in \mathbb{R}$ *és* $a(y)$, $b(y)$ *folytonos függvények* $[c, d]$*-n. Ekkor*

$$\iint\limits_S f(x,y)d(x,y) = \int_c^d \left(\int_{a(y)}^{b(y)} f(x,y)dx \right) dy$$

Példa

3. példa Számítsuk ki az $f(x, y) = xy$ függvény integrálját a $T = \{(x, y)|1 \leq x \leq 3, x^2 \leq y \leq 4x\}$ tartományon.

Példa

3. példa Számítsuk ki az $f(x,y) = xy$ függvény integrálját a $T = \{(x,y) | 1 \leq x \leq 3, x^2 \leq y \leq 4x\}$ tartományon.

A megadott tartomány egy x irányú normáltartomány, így az integrálunk felírható az alábbi formában:

$$\iint\limits_T f(x,y) d(x,y) = \int_1^3 \int_{x^2}^{4x} xy \, dy dx = \int_1^3 \left[x\frac{y^2}{2} \right]_{x^2}^{4x} dx = \int_1^3 8x^3 - \frac{x^5}{2} dx =$$

Példa

3. példa Számítsuk ki az $f(x,y) = xy$ függvény integrálját a $T = \{(x,y)|1 \leq x \leq 3, x^2 \leq y \leq 4x\}$ tartományon.
A megadott tartomány egy x irányú normáltartomány, így az integrálunk felírható az alábbi formában:

$$\iint\limits_T f(x,y)d(x,y) = \int_1^3 \int_{x^2}^{4x} xy\, dydx = \int_1^3 \left[x\frac{y^2}{2}\right]_{x^2}^{4x} dx = \int_1^3 8x^3 - \frac{x^5}{2} dx =$$

$$= \left[2x^4 - \frac{x^6}{12}\right]_1^3 =$$

Példa

3. példa Számítsuk ki az $f(x,y) = xy$ függvény integrálját a $T = \{(x,y) | 1 \leq x \leq 3, x^2 \leq y \leq 4x\}$ tartományon.
A megadott tartomány egy x irányú normáltartomány, így az integrálunk felírható az alábbi formában:

$$\iint_T f(x,y) d(x,y) = \int_1^3 \int_{x^2}^{4x} xy \, dy dx = \int_1^3 \left[x \frac{y^2}{2} \right]_{x^2}^{4x} dx = \int_1^3 8x^3 - \frac{x^5}{2} dx =$$

$$= \left[2x^4 - \frac{x^6}{12} \right]_1^3 = 162 - \frac{729}{12} - 2 + \frac{1}{12} = 160 - \frac{182}{3} = \frac{298}{3} \approx 99,333$$

Példa

4. példa Számítsuk ki az $f(x, y) = e^{x^2}$ függvény integrálját a $T = \{(x, y)|0 \leq y \leq 2, \frac{y}{2} \leq x \leq 1\}$ tartományon.

Példa

4. példa Számítsuk ki az $f(x, y) = e^{x^2}$ függvény integrálját a $T = \{(x, y) | 0 \leq y \leq 2, \frac{y}{2} \leq x \leq 1\}$ tartományon.
A megadott tartomány egy y irányú normáltartomány, így az integrálunk felírható az alábbi formában:

$$\iint_T f(x, y) d(x, y) = \int_0^2 \int_{\frac{y}{2}}^1 e^{x^2} \, dx dy = \dots$$

Az e^{x^2} függvénynek nincs primitív függvénye ezért így nem lehet integrálni.

Példa

4. példa Számítsuk ki az $f(x,y)=e^{x^2}$ függvény integrálját a $T=\left\{(x,y)|0\le y\le 2, \frac{y}{2}\le x\le 1\right\}$ tartományon.
A megadott tartomány egy y irányú normáltartomány, így az integrálunk felírható az alábbi formában:

$$\iint\limits_T f(x,y)d(x,y)=\int_0^2\int_{\frac{y}{2}}^1 e^{x^2}\,dxdy=\ldots$$

Az e^{x^2} függvénynek nincs primitív függvénye ezért így nem lehet integrálni.
Megoládás: Cseréljük fel az integrálás sorrendjét ugy, hogy előbb y szerint kelljen integrálni. Első lépésben ábrázoljuk a megadott tartományt, mert a határok meg fognak változni:

Példa

4. példa Számítsuk ki az $f(x,y)=e^{x^2}$ függvény integrálját a $T=\{(x,y)|0\leq y\leq 2, \frac{y}{2}\leq x\leq 1\}$ tartományon.
A megadott tartomány egy y irányú normáltartomány, így az integrálunk felírható az alábbi formában:

$$\iint_T f(x,y)d(x,y)=\int_0^2\int_{\frac{y}{2}}^1 e^{x^2}\,dxdy=\dots$$

Az e^{x^2} függvénynek nincs primitív függvénye ezért így nem lehet integrálni.
Megoládás: Cseréljük fel az integrálás sorrendjét ugy, hogy előbb y szerint kelljen integrálni. Első lépésben ábrázoljuk a megadott tartományt, mert a határok meg fognak változni: $T=\{(x,y)|0\leq x\leq 1, 0\leq y\leq 2x\}$

Példa

4. példa Számítsuk ki az $f(x,y)=e^{x^2}$ függvény integrálját a $T=\{(x,y)|0\leq y\leq 2, \frac{y}{2}\leq x\leq 1\}$ tartományon.
A megadott tartomány egy y irányú normáltartomány, így az integrálunk felírható az alábbi formában:

$$\iint_T f(x,y)d(x,y)=\int_0^2\int_{\frac{y}{2}}^1 e^{x^2}\,dxdy=\dots$$

Az e^{x^2} függvénynek nincs primitív függvénye ezért így nem lehet integrálni.
Megoládás: Cseréljük fel az integrálás sorrendjét ugy, hogy előbb y szerint kelljen integrálni. Első lépésben ábrázoljuk a megadott tartományt, mert a határok meg fognak változni: $T=\{(x,y)|0\leq x\leq 1, 0\leq y\leq 2x\}$

$$\int_0^2\int_{\frac{y}{2}}^1 e^{x^2}\,dxdy=\int_0^1\int_0^{2x} e^{x^2}\,dydx=$$

Példa

4. példa Számítsuk ki az $f(x,y) = e^{x^2}$ függvény integrálját a
$T = \left\{(x,y)|0 \leq y \leq 2, \frac{y}{2} \leq x \leq 1\right\}$ tartományon.
A megadott tartomány egy y irányú normáltartomány, így az integrálunk felírható az alábbi formában:

$$\iint\limits_T f(x,y)d(x,y) = \int_0^2 \int_{\frac{y}{2}}^1 e^{x^2}\, dxdy = \dots$$

Az e^{x^2} függvénynek nincs primitív függvénye ezért így nem lehet integrálni.
Megoládás: Cseréljük fel az integrálás sorrendjét ugy, hogy előbb y szerint kelljen integrálni. Első lépésben ábrázoljuk a megadott tartományt, mert a határok meg fognak változni: $T = \left\{(x,y)|0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2x\right\}$

$$\int_0^2 \int_{\frac{y}{2}}^1 e^{x^2}\, dxdy = \int_0^1 \int_0^{2x} e^{x^2}\, dydx =$$

$$= \int_0^1 \left[ye^{x^2}\right]_0^{2x} dx = \int_0^1 2xe^{x^2} dx =$$

Példa

4. példa Számítsuk ki az $f(x,y)=e^{x^2}$ függvény integrálját a $T=\left\{(x,y)|0\le y\le 2, \frac{y}{2}\le x\le 1\right\}$ tartományon.
A megadott tartomány egy y irányú normáltartomány, így az integrálunk felírható az alábbi formában:

$$\iint\limits_T f(x,y)d(x,y)=\int_0^2\int_{\frac{y}{2}}^1 e^{x^2}\,dxdy=\dots$$

Az e^{x^2} függvénynek nincs primitív függvénye ezért így nem lehet integrálni.
Megoládás: Cseréljük fel az integrálás sorrendjét ugy, hogy előbb y szerint kelljen integrálni. Első lépésben ábrázoljuk a megadott tartományt, mert a határok meg fognak változni: $T=\left\{(x,y)|0\le x\le 1, 0\le y\le 2x\right\}$

$$\int_0^2\int_{\frac{y}{2}}^1 e^{x^2}\,dxdy=\int_0^1\int_0^{2x} e^{x^2}\,dydx=$$

$$=\int_0^1\left[ye^{x^2}\right]_0^{2x}dx=\int_0^1 2xe^{x^2}dx=\left[e^{x^2}\right]_0^1=e-1$$

Integráltranszformáció

Kérdés: Hogyan működik a helyettesítéses integrálás két változóval?

Integráltranszformáció

Kérdés: Hogyan működik a helyettesítéses integrálás két változóval?
Legyen $x = x(u, v)$ és $y = y(u, v)$, azaz bevezetjük az u és v változókat.
Mi változik?

Integráltranszformáció

Kérdés: Hogyan működik a helyettesítéses integrálás két változóval?
Legyen $x = x(u, v)$ és $y = y(u, v)$, azaz bevezetjük az u és v változókat.
Mi változik?

(1) Az integrálás tartománya változik, mert (u, v) más értékeire lesz $(x(u, v), y(u, v)) \in T$.

Integráltranszformáció

Kérdés: Hogyan működik a helyettesítéses integrálás két változóval?
Legyen $x = x(u, v)$ és $y = y(u, v)$, azaz bevezetjük az u és v változókat.
Mi változik?

(1) Az integrálás tartománya változik, mert (u, v) más értékeire lesz $(x(u, v), y(u, v)) \in T$.

(2) Az integrandus, mert az nem x és y függvénye lesz, hanem u és v függénye.

Integráltranszformáció

Kérdés: Hogyan működik a helyettesítéses integrálás két változóval?
Legyen $x = x(u, v)$ és $y = y(u, v)$, azaz bevezetjük az u és v változókat.
Mi változik?

(1) Az integrálás tartománya változik, mert (u, v) más értékeire lesz $(x(u, v), y(u, v)) \in T$.

(2) Az integrandus, mert az nem x és y függvénye lesz, hanem u és v függénye.

(3) A $d(x, y)$-ból $d(x(u, v), y(u, v))$ lesz, amit a láncszabály segítségével deriválunk és azt kapjuk, hogy $d(x, y) = |J|d(u, v)$, ahol $|J|$ a helyettesítés Jacobi-mátrixának determinánsa, azaz

$$\begin{vmatrix} x'_u(u, v) & x'_v(u, v) \\ y'_u(u, v) & y'_v(u, v) \end{vmatrix}$$

.

Integráltranszformáció

Kérdés: Hogyan működik a helyettesítéses integrálás két változóval?
Legyen $x = x(u, v)$ és $y = y(u, v)$, azaz bevezetjük az u és v változókat.
Mi változik?

(1) Az integrálás tartománya változik, mert (u, v) más értékeire lesz $(x(u, v), y(u, v)) \in T$.

(2) Az integrandus, mert az nem x és y függvénye lesz, hanem u és v függénye.

(3) A $d(x, y)$-ból $d(x(u, v), y(u, v))$ lesz, amit a láncszabály segítségével deriválunk és azt kapjuk, hogy $d(x, y) = |J|d(u, v)$, ahol $|J|$ a helyettesítés Jacobi-mátrixának determinánsa, azaz

$$\begin{vmatrix} x'_u(u,v) & x'_v(u,v) \\ y'_u(u,v) & y'_v(u,v) \end{vmatrix}$$

.

$$\iint_T f(x,y)d(x,y) = \iint_W f(x(u,v), y(u,v))|J|d(u,v)$$

Polárkoordináták

Vezessük meg az $x(r,\phi) = r\cos\phi$ és $y(r,\phi) = r\sin\phi$ helyettesítést. Ez a Descartes-koordinátarendszer jól ismert alternatívája, a polár-koordinátarendszer.

Számítsuk ki a helyettesítés Jacobi-mátrixának determinánsát:

Polárkoordináták

Vezessük meg az $x(r,\phi) = r\cos\phi$ és $y(r,\phi) = r\sin\phi$ helyettesítést. Ez a Descartes-koordinátarendszer jól ismert alternatívája, a polár-koordinátarendszer.

Számítsuk ki a helyettesítés Jacobi-mátrixának determinánsát:

$x'_r(r,\phi) = \cos\phi$, $x'_\phi(r,\phi) = -r\sin\phi$, $y'_r(r,\phi) = \sin\phi$, $y'_\phi(r,\phi) = r\cos\phi$

Tehát a Jacobi mátrix determinánsa:

$$|J| = \begin{vmatrix} \cos\phi & -r\sin\phi \\ \sin\phi & r\cos\phi \end{vmatrix} = r\cos^2\phi + r\sin^2\phi = r$$

Polárkoordináták

Vezessük meg az $x(r,\phi) = r\cos\phi$ és $y(r,\phi) = r\sin\phi$ helyettesítést. Ez a Descartes-koordinátarendszer jól ismert alternatívája, a polár-koordinátarendszer.

Számítsuk ki a helyettesítés Jacobi-mátrixának determinánsát:
$x'_r(r,\phi) = \cos\phi$, $x'_\phi(r,\phi) = -r\sin\phi$, $y'_r(r,\phi) = \sin\phi$, $y'_\phi(r,\phi) = r\cos\phi$
Tehát a Jacobi mátrix determinánsa:

$$|J| = \begin{vmatrix} \cos\phi & -r\sin\phi \\ \sin\phi & r\cos\phi \end{vmatrix} = r\cos^2\phi + r\sin^2\phi = r$$

5. példa Számítsuk ki az $f(x,y) = xy$ függvény integrálját a $T = \{(x,y) | 0 \le x \wedge 0 \le y \wedge x^2 + y^2 \le 4\}$ tartományon.

Polárkoordináták

Vezessük meg az $x(r,\phi) = r\cos\phi$ és $y(r,\phi) = r\sin\phi$ helyettesítést. Ez a Descartes-koordinátarendszer jól ismert alternatívája, a polár-koordinátarendszer.

Számítsuk ki a helyettesítés Jacobi-mátrixának determinánsát:
$x'_r(r,\phi) = \cos\phi$, $x'_\phi(r,\phi) = -r\sin\phi$, $y'_r(r,\phi) = \sin\phi$, $y'_\phi(r,\phi) = r\cos\phi$
Tehát a Jacobi mátrix determinánsa:

$$|J| = \begin{vmatrix} \cos\phi & -r\sin\phi \\ \sin\phi & r\cos\phi \end{vmatrix} = r\cos^2\phi + r\sin^2\phi = r$$

5. példa Számítsuk ki az $f(x,y) = xy$ függvény integrálját a $T = \{(x,y) | 0 \le x \wedge 0 \le y \wedge x^2 + y^2 \le 4\}$ tartományon.
A megadott tartomány egy kettő sugarú kör első síknegyedbe eső pontjaiból áll.
Ábrázoljuk a tartományt, majd térjünk át polár-koordinátarendszerre:

Polárkoordináták

Vezessük meg az $x(r,\phi) = r\cos\phi$ és $y(r,\phi) = r\sin\phi$ helyettesítést. Ez a Descartes-koordinátarendszer jól ismert alternatívája, a polár-koordinátarendszer.

Számítsuk ki a helyettesítés Jacobi-mátrixának determinánsát:

$x'_r(r,\phi) = \cos\phi$, $x'_\phi(r,\phi) = -r\sin\phi$, $y'_r(r,\phi) = \sin\phi$, $y'_\phi(r,\phi) = r\cos\phi$

Tehát a Jacobi mátrix determinánsa:

$$|J| = \begin{vmatrix} \cos\phi & -r\sin\phi \\ \sin\phi & r\cos\phi \end{vmatrix} = r\cos^2\phi + r\sin^2\phi = r$$

5. példa Számítsuk ki az $f(x,y) = xy$ függvény integrálját a $T = \{(x,y)|0 \le x \wedge 0 \le y \wedge x^2 + y^2 \le 4\}$ tartományon.

A megadott tartomány egy kettő sugarú kör első síknegyedbe eső pontjaiból áll.

Ábrázoljuk a tartományt, majd térjünk át polár-koordinátarendszerre:

$$U = \left\{(r,\phi)|0 \le r \le 2 \wedge 0 \le \phi \le \frac{\pi}{2}\right\}$$

Példa

$$\iint\limits_T f(x,y)d(x,y) =$$

Példa

$$\iint\limits_T f(x,y)d(x,y) = \iint\limits_U f(x(r,\phi), y(r,\phi))|J|d(r,\phi) =$$

Példa

$$\iint_T f(x,y)d(x,y) = \iint_U f(x(r,\phi),y(r,\phi))|J|d(r,\phi) =$$

$$= \int_0^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} r\cos\phi r\sin\phi r\, d\phi dr = \int_0^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} r^3 \cos\phi \sin\phi\, d\phi dr$$

Példa

$$\iint_T f(x,y)d(x,y) = \iint_U f(x(r,\phi), y(r,\phi))|J|d(r,\phi) =$$

$$= \int_0^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} r\cos\phi r\sin\phi r \, d\phi dr = \int_0^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} r^3 \cos\phi \sin\phi \, d\phi dr$$

Tehát az integráltranszformáció után ez szorzat alakú függvény egy téglalap alakú tartományon vett integráljába megy át, így

$$\int_0^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} r^3 \cos\phi \sin\phi \, d\phi dr = \int_0^2 r^3 \, dr \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\phi \sin\phi \, d\phi =$$

Példa

$$\iint\limits_T f(x,y)d(x,y) = \iint\limits_U f(x(r,\phi),y(r,\phi))|J|d(r,\phi) =$$

$$= \int_0^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} r\cos\phi r\sin\phi r\, d\phi dr = \int_0^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} r^3 \cos\phi \sin\phi\, d\phi dr$$

Tehát az integráltranszformáció után ez szorzat alakú függvény egy téglalap alakú tartományon vett integráljába megy át, így

$$\int_0^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} r^3 \cos\phi \sin\phi\, d\phi dr = \int_0^2 r^3\, dr \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\phi \sin\phi\, d\phi =$$

$$= \left[\frac{r^4}{4}\right]_0^2 \cdot \left[\frac{\sin^2\phi}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} =$$

Példa

$$\iint_T f(x,y)d(x,y) = \iint_U f(x(r,\phi), y(r,\phi))|J|d(r,\phi) =$$

$$= \int_0^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} r\cos\phi r\sin\phi r\, d\phi dr = \int_0^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} r^3 \cos\phi \sin\phi\, d\phi dr$$

Tehát az integráltranszformáció után ez szorzat alakú függvény egy téglalap alakú tartományon vett integráljába megy át, így

$$\int_0^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} r^3 \cos\phi \sin\phi\, d\phi dr = \int_0^2 r^3\, dr \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\phi \sin\phi\, d\phi =$$

$$= \left[\frac{r^4}{4}\right]_0^2 \cdot \left[\frac{\sin^2\phi}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = (4-0)\left(\frac{1}{2}-0\right) = 2$$

Példa

6. példa Polárkoordinátákra való áttérés segítségével számítsuk ki az $f(x, y) = 2x^2y$ függvény integrálját a $T = \{(x, y) | x \leq 0 \wedge 0 \leq y \wedge 1 \leq x^2 + y^2 \leq 9\}$ tartományon.

Példa

6. példa Polárkoordinátákra való áttérés segítségével számítsuk ki az $f(x, y) = 2x^2y$ függvény integrálját a $T = \{(x, y) | x \leq 0 \wedge 0 \leq y \wedge 1 \leq x^2 + y^2 \leq 9\}$ tartományon.
Ábrázoljuk a tartományt, majd térjünk át polár-koordinátarendszerre:

Példa

6. példa Polárkoordinátákra való áttérés segítségével számítsuk ki az $f(x,y) = 2x^2y$ függvény integrálját a $T = \{(x,y) | x \leq 0 \wedge 0 \leq y \wedge 1 \leq x^2 + y^2 \leq 9\}$ tartományon.
Ábrázoljuk a tartományt, majd térjünk át polár-koordinátarendszerre:

$$U = \left\{ (r,\phi) | 1 \leq r \leq 3 \wedge \frac{\pi}{2} \leq \phi \leq \pi \right\}$$

Példa

6. példa Polárkoordinátákra való áttérés segítségével számítsuk ki az $f(x,y) = 2x^2y$ függvény integrálját a $T = \{(x,y)|x \leq 0 \wedge 0 \leq y \wedge 1 \leq x^2 + y^2 \leq 9\}$ tartományon.
Ábrázoljuk a tartományt, majd térjünk át polár-koordinátarendszerre:

$$U = \left\{(r,\phi)|1 \leq r \leq 3 \wedge \frac{\pi}{2} \leq \phi \leq \pi\right\}$$

Áttérve polár-koordinátákra:

$$\iint_T f(x,y)d(x,y) = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \int_1^3 2r^2 \cos^2 \phi r \sin \phi r \, dr \, d\phi =$$

Példa

6. példa Polárkoordinátákra való áttérés segítségével számítsuk ki az $f(x, y) = 2x^2y$ függvény integrálját a
$T = \{(x, y)|x \leq 0 \wedge 0 \leq y \wedge 1 \leq x^2 + y^2 \leq 9\}$ tartományon.
Ábrázoljuk a tartományt, majd térjünk át polár-koordinátarendszerre:

$$U = \left\{(r, \phi)|1 \leq r \leq 3 \wedge \frac{\pi}{2} \leq \phi \leq \pi\right\}$$

Áttérve polár-koordinátákra:

$$\iint_T f(x, y)d(x, y) = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \int_1^3 2r^2 \cos^2 \phi r \sin \phi r \, dr \, d\phi =$$

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos^2 \phi \sin \phi d\phi \cdot \int_1^3 2r^4 dr =$$

Példa

6. példa Polárkoordinátákra való áttérés segítségével számítsuk ki az $f(x,y) = 2x^2y$ függvény integrálját a $T = \{(x,y)|x \leq 0 \wedge 0 \leq y \wedge 1 \leq x^2 + y^2 \leq 9\}$ tartományon.
Ábrázoljuk a tartományt, majd térjünk át polár-koordinátarendszerre:

$$U = \left\{(r,\phi)|1 \leq r \leq 3 \wedge \frac{\pi}{2} \leq \phi \leq \pi\right\}$$

Áttérve polár-koordinátákra:

$$\iint_T f(x,y)d(x,y) = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \int_1^3 2r^2 \cos^2 \phi r \sin \phi r \, dr \, d\phi =$$

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos^2 \phi \sin \phi d\phi \cdot \int_1^3 2r^4 dr = \left[\frac{-\cos^3 \phi}{3}\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cdot \left[\frac{2r^5}{5}\right]_1^3 =$$

Példa

6. példa Polárkoordinátákra való áttérés segítségével számítsuk ki az $f(x, y) = 2x^2 y$ függvény integrálját a
$T = \{(x, y) | x \leq 0 \wedge 0 \leq y \wedge 1 \leq x^2 + y^2 \leq 9\}$ tartományon.
Ábrázoljuk a tartományt, majd térjünk át polár-koordinátarendszerre:

$$U = \left\{(r, \phi) | 1 \leq r \leq 3 \wedge \frac{\pi}{2} \leq \phi \leq \pi\right\}$$

Áttérve polár-koordinátákra:

$$\iint\limits_T f(x, y) d(x, y) = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \int_1^3 2r^2 \cos^2 \phi r \sin \phi r \, dr \, d\phi =$$

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos^2 \phi \sin \phi d\phi \cdot \int_1^3 2r^4 dr = \left[\frac{-\cos^3 \phi}{3}\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cdot \left[\frac{2r^5}{5}\right]_1^3 =$$

$$= \left(\frac{-(-1)^3}{3} - 0\right) \left(\frac{2 \cdot 243}{5} - \frac{2}{5}\right) = \frac{1}{3} \left(\frac{486}{5} - \frac{2}{5}\right) = \frac{484}{15}$$

Hármas integrál

Egyváltozós integrál: Görbe alatti terület (adott intervalumon)

Hármas integrál

Egyváltozós integrál: Görbe alatti terület (adott intervalumon)
Kétváltozós integrál: Felület alatti térfogat (adott tartományon)

Hármas integrál

Egyváltozós integrál: Görbe alatti terület (adott intervalumon)
Kétváltozós integrál: Felület alatti térfogat (adott tartományon)
Hármas integrál: ???

Hármas integrál

Egyváltozós integrál: Görbe alatti terület (adott intervalumon)
Kétváltozós integrál: Felület alatti térfogat (adott tartományon)
Hármas integrál: Adott sürűségű tartomány tömege. Jelölés:

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)dV = \iiint\limits_V f(x,y,z)d(x,y,z)$$

Hármas integrál

Egyváltozós integrál: Görbe alatti terület (adott intervalumon)
Kétváltozós integrál: Felület alatti térfogat (adott tartományon)
Hármas integrál: Adott sűrűségű tartomány tömege. Jelölés:

$$\iiint_V f(x,y,z)dV = \iiint_V f(x,y,z)d(x,y,z)$$

Definíció

A $V \subset \mathbb{R}^3$ *tartományt téglatest tartománynak nevezzük, ha*
$V = \{(x,y,z) | a \leq x \leq b, c \leq y \leq d, h \leq z \leq i\} = [a,b] \times [c,d] \times [h,i]$,
ahol $a, b, c, d, h, i \in \mathbb{R}$.

Mindhárom változó valamilyen zárt intervallumon mozog *egymástól függetlenül*

Integrálás téglatest tartományon

Tétel (Fubini)

Ha $f : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}$ *függvény folytonos a* $V = [a, b] \times [c, d] \times [h, i]$ *tartományon, akkor*

$$\iiint\limits_V f(x, y, z) d(x, y, z) = \int_a^b \left(\int_c^d \left(\int_h^i f(x, y, z) dz \right) dy \right) dx$$

és a három integrál tetszőleges (6 féle) sorrendben felírható.

Tehát a hármas integrál átalakítható egy háromszoros integrállá, ahol előbb az egyik változó szerint integrálunk (a másik két változót paraméternek tekintve), majd a Newton-Leibniz formula után ezen változó eltűnik és a másik két változó szerinti kettősintegrál kiszámításával kapjuk meg az eredményt.

Példa

7. példa Számítsuk ki az $f(x, y, z) = 3xy^2z^3$ függvény integrálját a $V = [1, 2] \times [2, 3] \times [0, 4]$ tartományon.

Példa

7. példa Számítsuk ki az $f(x,y,z) = 3xy^2z^3$ függvény integrálját a $V = [1,2] \times [2,3] \times [0,4]$ tartományon.
A konvenció alapján: $V = \{(x,y,z)|1 \leq x \leq 2, 2 \leq y \leq 3, 0 \leq z \leq 4\}$

Példa

7. példa Számítsuk ki az $f(x,y,z) = 3xy^2z^3$ függvény integrálját a $V = [1,2] \times [2,3] \times [0,4]$ tartományon.
A konvenció alapján: $V = \{(x,y,z) | 1 \leq x \leq 2, 2 \leq y \leq 3, 0 \leq z \leq 4\}$ és a Fubini tétel alapján:

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)dV = \int_1^2 \int_2^3 \int_0^4 3xy^2z^3 dzdydx =$$

Példa

7. példa Számítsuk ki az $f(x,y,z)=3xy^2z^3$ függvény integrálját a $V=[1,2]\times[2,3]\times[0,4]$ tartományon.
A konvenció alapján: $V=\{(x,y,z)|1\le x\le 2, 2\le y\le 3, 0\le z\le 4\}$ és a Fubini tétel alapján:

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)dV=\int_1^2\int_2^3\int_0^4 3xy^2z^3dzdydx=\int_1^2\int_2^3\left[3xy^2\frac{z^4}{4}\right]_0^4dydx=$$

Példa

7. példa Számítsuk ki az $f(x,y,z) = 3xy^2z^3$ függvény integrálját a $V = [1,2] \times [2,3] \times [0,4]$ tartományon.
A konvenció alapján: $V = \{(x,y,z) | 1 \le x \le 2, 2 \le y \le 3, 0 \le z \le 4\}$ és a Fubini tétel alapján:

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)dV = \int_1^2 \int_2^3 \int_0^4 3xy^2z^3 dzdydx = \int_1^2 \int_2^3 \left[3xy^2 \frac{z^4}{4}\right]_0^4 dydx =$$

$$= \int_1^2 \int_2^3 192xy^2 dydx = \int_1^2 \left[192x \frac{y^3}{3}\right]_2^3 dx =$$

Példa

7. példa Számítsuk ki az $f(x,y,z) = 3xy^2z^3$ függvény integrálját a $V = [1,2] \times [2,3] \times [0,4]$ tartományon.
A konvenció alapján: $V = \{(x,y,z) | 1 \le x \le 2, 2 \le y \le 3, 0 \le z \le 4\}$ és a Fubini tétel alapján:

$$\iiint_V f(x,y,z)dV = \int_1^2 \int_2^3 \int_0^4 3xy^2z^3 dzdydx = \int_1^2 \int_2^3 \left[3xy^2 \frac{z^4}{4}\right]_0^4 dydx =$$

$$= \int_1^2 \int_2^3 192xy^2 dydx = \int_1^2 \left[192x \frac{y^3}{3}\right]_2^3 dx = \int_1^2 64x(27-8)dx =$$

$$= \int_1^2 1216x dx = \left[608x^2\right]_1^2 = 608(4-1) = 1824$$

Integrálás normáltartományon

Normáltartományból is Fubini tételből is 6 féle van:

Definíció

A $V \subset \mathbb{R}^3$ tartomány $x_1 x_2$ irányú normáltartománynak nevezzük, ha $V = \{(x_{1-3}) \in \mathbb{R}^3 : a \leq x_1 \leq b, c(x_1) \leq x_2 \leq d(x_1), h(x_1, x_2) \leq x_3 \leq i(x_1, x_2)\}$, *ahol $a, b \in \mathbb{R}$, $c(x_1)$, $d(x_1)$ folytonos függvények $[a, b]$-n és $h(x_1, x_2)$, $i(x_1, x_2)$ pedig foytonos függvények ha $(x_1, x_2) \in [a, b] \times [c(x_1), d(x_1)]$.*

Integrálás normáltartományon

Normáltartományból is Fubini tételből is 6 féle van:

Definíció

A $V \subset \mathbb{R}^3$ tartomány x_1x_2 irányú normáltartománynak nevezzük, ha $V = \{(x_{1-3}) \in \mathbb{R}^3 : a \leq x_1 \leq b, c(x_1) \leq x_2 \leq d(x_1), h(x_1,x_2) \leq x_3 \leq i(x_1,x_2)\}$, *ahol* $a, b \in \mathbb{R}$, $c(x_1)$, $d(x_1)$ *folytonos függvények* $[a,b]$*-n és* $h(x_1,x_2)$, $i(x_1,x_2)$ *pedig foytonos függvények ha* $(x_1,x_2) \in [a,b] \times [c(x_1), d(x_1)]$.

Tétel (Fubini)

Legyen az $f : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}$ *függvény folytonos a* $V = \{(x_{1-3}) \in \mathbb{R}^3 : a \leq x_1 \leq b, c(x_1) \leq x_2 \leq d(x_1), h(x_1,x_2) \leq x_3 \leq i(x_1,x_2)\}$ *tartományon ahol* $a, b \in \mathbb{R}$, $c(x_1)$, $d(x_1)$ *folytonos függvények* $[a,b]$*-n és* $h(x_1,x_2)$, $i(x_1,x_2)$ *pedig foytonos függvények ha* $(x_1,x_2) \in [a,b] \times [c(x_1), d(x_1)]$. *Ekkor*

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)d(x,y,z) = \int_a^b \left(\int_{c(x_1)}^{d(x_1)} \left(\int_{h(x_1,x_2)}^{i(x_1,x_2)} f(x_{1-3})dx_3 \right) dx_2 \right) dx_1$$

Példa

8. példa Számítsuk ki a $(0,0,0)$, $(2,0,0)$, $(0,3,0)$ és $(0,0,4)$ pontok által meghatározott tetraéder térfogatát.

Példa

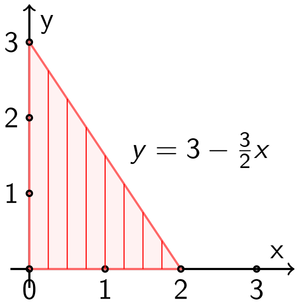
8. példa Számítsuk ki a $(0,0,0)$, $(2,0,0)$, $(0,3,0)$ és $(0,0,4)$ pontok által meghatározott tetraéder térfogatát.

Mivel ez egy véges tartomány, mindenképpen felírható, mint normáltartomány. Rögzítsük első iránynak az x-et, ekkor $x \in [0,2]$ és második iránynak az y-t, ekkor az xy síkban való felrajzolás után

Példa

8. példa Számítsuk ki a $(0,0,0)$, $(2,0,0)$, $(0,3,0)$ és $(0,0,4)$ pontok által meghatározott tetraéder térfogatát.

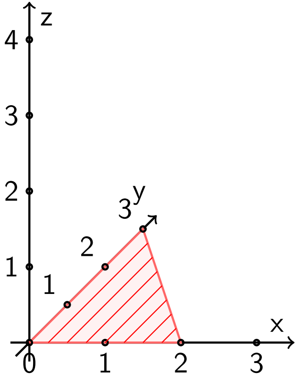
Mivel ez egy véges tartomány, mindenképpen felírható, mint normáltartomány. Rögzítsük első iránynak az x-et, ekkor $x \in [0,2]$ és második iránynak az y-t, ekkor az xy síkban való felrajzolás után $y \in \left[0, 3 - \frac{3}{2}x\right]$.



Példa

8. példa Számítsuk ki a $(0,0,0)$, $(2,0,0)$, $(0,3,0)$ és $(0,0,4)$ pontok által meghatározott tetraéder térfogatát.

Mivel ez egy véges tartomány, mindenképpen felírható, mint normáltartomány. Rögzítsük első iránynak az x-et, ekkor $x \in [0,2]$ és második iránynak az y-t, ekkor az xy síkban való felrajzolás után $y \in \left[0, 3 - \frac{3}{2}x\right]$.

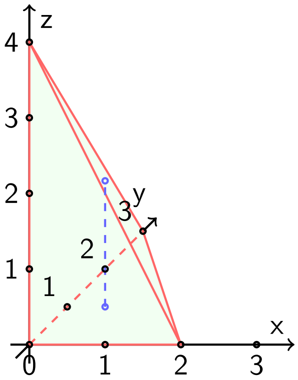


Példa

8. példa Számítsuk ki a $(0,0,0)$, $(2,0,0)$, $(0,3,0)$ és $(0,0,4)$ pontok által meghatározott tetraéder térfogatát.

Mivel ez egy véges tartomány, mindenképpen felírható, mint normáltartomány. Rögzítsük első iránynak az x-et, ekkor $x \in [0,2]$ és második iránynak az y-t, ekkor az xy síkban való felrajzolás után $y \in \left[0, 3 - \frac{3}{2}x\right]$.

Ha lerögzítjük (x,y) értékét, akkor a z 0-tól mehet a tetraéder egyetlen nem derékszögű lapjáig aminek normálvektorát 3 pontjából a szokott módon határozzuk meg, azaz két vele párhuzamos vektor keresztszorzatakén: $(2,0-4) \times (0,3,-4) = (12,8,6)$, és egy pontja például a $(0,0,4)$, így a síkegyenlet: $12x+8y+6(z-4) = 0 \Rightarrow z = \dfrac{12-6x-4y}{3}$.



Példa

Tehát a tetraéder felírható, mint xy irányú normáltartomány:
$T = \left\{(x, y, z) | 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 3 - \frac{3}{2}x, 0 \leq z \leq \frac{12-6x-4y}{3}\right\}$, már csak a térfogat kell.

Példa

Tehát a tetraéder felírható, mint *xy* irányú normáltartomány:
$T = \left\{(x,y,z) | 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 3 - \frac{3}{2}x, 0 \leq z \leq \frac{12-6x-4y}{3}\right\}$, már csak a térfogat kell. Ehhez integrálnunk kell az azonosan 1 függvényt, amit a Fubini tétel miatt az alábbi módon számíthatunk ki:

$$V = \iiint_T 1 \, d(x,y,z) = \int_0^2 \int_0^{3-\frac{3}{2}x} \int_0^{\frac{12-6x-4y}{3}} 1 \, dzdydx =$$

Példa

Tehát a tetraéder felírható, mint xy irányú normáltartomány:
$T = \left\{(x, y, z) | 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 3 - \frac{3}{2}x, 0 \leq z \leq \frac{12-6x-4y}{3}\right\}$, már csak a térfogat kell. Ehhez integrálnunk kell az azonosan 1 függvényt, amit a Fubini tétel miatt az alábbi módon számíthatunk ki:

$$V = \iiint_T 1\, d(x, y, z) = \int_0^2 \int_0^{3-\frac{3}{2}x} \int_0^{\frac{12-6x-4y}{3}} 1\, dzdydx =$$

$$= \int_0^2 \int_0^{3-\frac{3}{2}x} [z]_0^{4-2x-\frac{4}{3}y}\, dydx = \int_0^2 \int_0^{3-\frac{3}{2}x} 4 - 2x - \frac{4}{3}y\, dydx =$$

Példa

Tehát a tetraéder felírható, mint xy irányú normáltartomány:
$T = \left\{(x, y, z) | 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 3 - \frac{3}{2}x, 0 \leq z \leq \frac{12-6x-4y}{3}\right\}$, már csak a térfogat kell. Ehhez integrálnunk kell az azonosan 1 függvényt, amit a Fubini tétel miatt az alábbi módon számíthatunk ki:

$$V = \iiint_T 1\, d(x, y, z) = \int_0^2 \int_0^{3-\frac{3}{2}x} \int_0^{\frac{12-6x-4y}{3}} 1\, dzdydx =$$

$$= \int_0^2 \int_0^{3-\frac{3}{2}x} [z]_0^{4-2x-\frac{4}{3}y}\, dydx = \int_0^2 \int_0^{3-\frac{3}{2}x} 4 - 2x - \frac{4}{3}y\, dydx =$$

$$= \int_0^2 \left[4y - 2xy - \frac{2}{3}y^2\right]_0^{3-\frac{3}{2}x} dx =$$

Példa

Tehát a tetraéder felírható, mint xy irányú normáltartomány:
$T = \left\{(x, y, z)|0 \le x \le 2, 0 \le y \le 3 - \frac{3}{2}x, 0 \le z \le \frac{12-6x-4y}{3}\right\}$, már csak a térfogat kell. Ehhez integrálnunk kell az azonosan 1 függvényt, amit a Fubini tétel miatt az alábbi módon számíthatunk ki:

$$V = \iiint_T 1\, d(x, y, z) = \int_0^2 \int_0^{3-\frac{3}{2}x} \int_0^{\frac{12-6x-4y}{3}} 1\, dzdydx =$$

$$= \int_0^2 \int_0^{3-\frac{3}{2}x} [z]_0^{4-2x-\frac{4}{3}y}\, dydx = \int_0^2 \int_0^{3-\frac{3}{2}x} 4 - 2x - \frac{4}{3}y\, dydx =$$

$$= \int_0^2 \left[4y - 2xy - \frac{2}{3}y^2\right]_0^{3-\frac{3}{2}x} dx = \int_0^2 12-6x-6x+3x^2-6+6x-\frac{3}{2}x^2\, dx =$$

Példa

Tehát a tetraéder felírható, mint xy irányú normáltartomány:
$T = \left\{(x,y,z) | 0 \le x \le 2, 0 \le y \le 3 - \frac{3}{2}x, 0 \le z \le \frac{12-6x-4y}{3}\right\}$, már csak a térfogat kell. Ehhez integrálnunk kell az azonosan 1 függvényt, amit a Fubini tétel miatt az alábbi módon számíthatunk ki:

$$V = \iiint_T 1 \, d(x,y,z) = \int_0^2 \int_0^{3-\frac{3}{2}x} \int_0^{\frac{12-6x-4y}{3}} 1 \, dz dy dx =$$

$$= \int_0^2 \int_0^{3-\frac{3}{2}x} [z]_0^{4-2x-\frac{4}{3}y} \, dy dx = \int_0^2 \int_0^{3-\frac{3}{2}x} 4 - 2x - \frac{4}{3} y \, dy dx =$$

$$= \int_0^2 \left[4y - 2xy - \frac{2}{3}y^2\right]_0^{3-\frac{3}{2}x} dx = \int_0^2 12 - 6x - 6x + 3x^2 - 6 + 6x - \frac{3}{2}x^2 \, dx =$$

$$= \int_0^2 6 - 6x + \frac{3}{2}x^2 \, dx =$$

Példa

Tehát a tetraéder felírható, mint xy irányú normáltartomány:
$T = \left\{(x,y,z)|0 \le x \le 2, 0 \le y \le 3 - \frac{3}{2}x, 0 \le z \le \frac{12-6x-4y}{3}\right\}$, már csak a térfogat kell. Ehhez integrálnunk kell az azonosan 1 függvényt, amit a Fubini tétel miatt az alábbi módon számíthatunk ki:

$$V = \iiint_T 1\, d(x,y,z) = \int_0^2 \int_0^{3-\frac{3}{2}x} \int_0^{\frac{12-6x-4y}{3}} 1\, dzdydx =$$

$$= \int_0^2 \int_0^{3-\frac{3}{2}x} [z]_0^{4-2x-\frac{4}{3}y}\, dydx = \int_0^2 \int_0^{3-\frac{3}{2}x} 4 - 2x - \frac{4}{3}y\, dydx =$$

$$= \int_0^2 \left[4y - 2xy - \frac{2}{3}y^2\right]_0^{3-\frac{3}{2}x} dx = \int_0^2 12-6x-6x+3x^2-6+6x-\frac{3}{2}x^2\, dx =$$

$$= \int_0^2 6 - 6x + \frac{3}{2}x^2\, dx = \left[6x - 3x^2 + \frac{1}{2}x^3\right]_0^2 = 12 - 12 + 4 = 4$$

Példa

Tehát a tetraéder felírható, mint xy irányú normáltartomány:
$T = \left\{(x, y, z)|0 \le x \le 2, 0 \le y \le 3 - \frac{3}{2}x, 0 \le z \le \frac{12-6x-4y}{3}\right\}$, már csak a térfogat kell. Ehhez integrálnunk kell az azonosan 1 függvényt, amit a Fubini tétel miatt az alábbi módon számíthatunk ki:

$$V = \iiint_T 1\, d(x, y, z) = \int_0^2 \int_0^{3-\frac{3}{2}x} \int_0^{\frac{12-6x-4y}{3}} 1\, dzdydx =$$

$$= \int_0^2 \int_0^{3-\frac{3}{2}x} [z]_0^{4-2x-\frac{4}{3}y}\, dydx = \int_0^2 \int_0^{3-\frac{3}{2}x} 4 - 2x - \frac{4}{3}y\, dydx =$$

$$= \int_0^2 \left[4y - 2xy - \frac{2}{3}y^2\right]_0^{3-\frac{3}{2}x} dx = \int_0^2 12-6x-6x+3x^2-6+6x-\frac{3}{2}x^2\, dx =$$

$$= \int_0^2 6 - 6x + \frac{3}{2}x^2\, dx = \left[6x - 3x^2 + \frac{1}{2}x^3\right]_0^2 = 12 - 12 + 4 = 4$$

Ellenőrzés: térfogat = alapterület x magasság $/3 = \dfrac{\frac{2\cdot 3}{2}\cdot 4}{3} = 4$

Integráltranszformáció

Tétel

Legyen az $f : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}$ *függvény integrálható a* $V \subset \mathbb{R}^3$ *tartományon és* $x(u,v,w)$, $y(u,v,w)$ *és* $z(u,v,w)$ *minden változójuk szerint parciálisan deriválható függvények, amelyek a* V *tartomány pontjai és az* (u,v,w) *számhármasok bizonyos* W *halmaza között (az* x, y, z *legfeljebb véges számú értékének kivételével) kölcsönösen egyértelmű megfeleltetést létesítenek. Ekkor az* f *függvény hármas integrálja kifejezhető a következőképpen:*

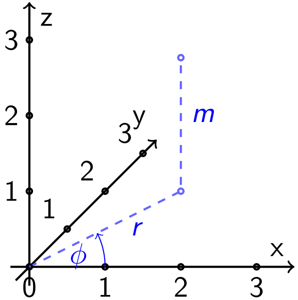
$$\iiint\limits_V f(x,y,z)\,d(x,y,z) =$$

$$= \iiint\limits_W f(x(u,v,w), y(u,v,w), z(u,v,w)) \left| \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)} \right| d(u,v,w),$$ *ahol*

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{bmatrix}$$ *az úgynevezett Jacobi-mátrix.*

Hengerkoordináták

A síkban használt polár-koordinátarendszert bővítjük ki 3 dimenzióssá az alábbi módon: $x(r,\phi,m) = r\cos\phi$, $y(r,\phi,m) = r\sin\phi$, $z(r,\phi,m) = m$.

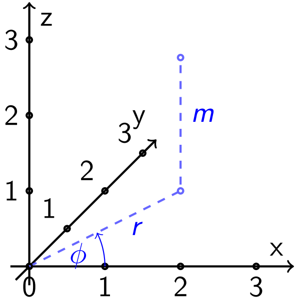


Hengerkoordináták

A síkban használt polár-koordinátarendszert bővítjük ki 3 dimenzióssá az alábbi módon: $x(r, \phi, m) = r\cos\phi$, $y(r, \phi, m) = r\sin\phi$, $z(r, \phi, m) = m$. Ekkor kiszámítható a Jacobi-mátrix determinánsa:

$$|J| = \begin{vmatrix} \cos\phi & -r\sin\phi & 0 \\ \sin\phi & r\cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} \cos\phi & -r\sin\phi \\ \sin\phi & r\cos\phi \end{vmatrix} = r\cos^2\phi + r\sin^2\phi = r$$

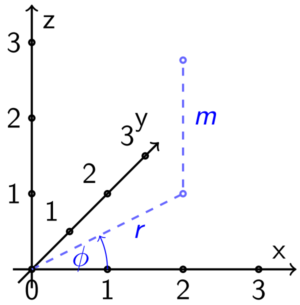


Hengerkoordináták

A síkban használt polár-koordinátarendszert bővítjük ki 3 dimenzióssá az alábbi módon: $x(r,\phi,m) = r\cos\phi$, $y(r,\phi,m) = r\sin\phi$, $z(r,\phi,m) = m$. Ekkor kiszámítható a Jacobi-mátrix determinánsa:

$$|J| = \begin{vmatrix} \cos\phi & -r\sin\phi & 0 \\ \sin\phi & r\cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} \cos\phi & -r\sin\phi \\ \sin\phi & r\cos\phi \end{vmatrix} = r\cos^2\phi + r\sin^2\phi = r$$



A hengerkoordináták jól használhatóak olyan tartományokon vett integrálok kiszámítására, melyek forgásszimmetrikusak, vagy hengerbe illeszthetőek, pl kúp.

Példa

9. példa Számítsuk ki az R sugarú, M magasságú henger térfogatát.

Példa

9. példa Számítsuk ki az R sugarú, M magasságú henger térfogatát.
Ekkor a tartományunk a következő alakú:
$V = \{(x, y, z)|x^2 + y^2 \leq R^2, 0 \leq z \leq M\}$,

Példa

9. példa Számítsuk ki az R sugarú, M magasságú henger térfogatát.
Ekkor a tartományunk a következő alakú:
$V = \{(x, y, z) | x^2 + y^2 \leq R^2, 0 \leq z \leq M\}$, amit átírhatunk hengerkoordinátákra:
$W = \{(r, \phi, m) | 0 \leq r \leq R, 0 \leq \phi \leq 2\pi, 0 \leq m \leq M\}$, így az integrál a következőképpen módosul:

$$\iiint_V 1 d(x, y, z) = \iiint_W 1 \cdot r\, d(r, \phi, m) = \int_0^R \int_0^{2\pi} \int_0^M r\, dm d\phi dr =$$

Példa

9. példa Számítsuk ki az R sugarú, M magasságú henger térfogatát. Ekkor a tartományunk a következő alakú:
$V = \{(x,y,z)|x^2+y^2 \leq R^2, 0 \leq z \leq M\}$, amit átírhatunk hengerkoordinátákra:
$W = \{(r,\phi,m)|0 \leq r \leq R, 0 \leq \phi \leq 2\pi, 0 \leq m \leq M\}$, így az integrál a következőképpen módosul:

$$\iiint\limits_V 1 d(x,y,z) = \iiint\limits_W 1 \cdot r\, d(r,\phi,m) = \int_0^R \int_0^{2\pi} \int_0^M r\, dm d\phi dr =$$

$$= \int_0^R \int_0^{2\pi} [rm]_0^M \, d\phi dr = \int_0^R \int_0^{2\pi} rM\, d\phi dr =$$

Példa

9. példa Számítsuk ki az R sugarú, M magasságú henger térfogatát.
Ekkor a tartományunk a következő alakú:
$V = \{(x, y, z) | x^2 + y^2 \leq R^2, 0 \leq z \leq M\}$, amit átírhatunk hengerkoordinátákra:
$W = \{(r, \phi, m) | 0 \leq r \leq R, 0 \leq \phi \leq 2\pi, 0 \leq m \leq M\}$, így az integrál a következőképpen módosul:

$$\iiint\limits_V 1 d(x, y, z) = \iiint\limits_W 1 \cdot r \, d(r, \phi, m) = \int_0^R \int_0^{2\pi} \int_0^M r \, dm d\phi dr =$$

$$= \int_0^R \int_0^{2\pi} [rm]_0^M \, d\phi dr = \int_0^R \int_0^{2\pi} rM \, d\phi dr = \int_0^R [rM\phi]_0^{2\pi} \, dr =$$

$$= \int_0^R 2\pi r M \, dr =$$

Példa

9. példa Számítsuk ki az R sugarú, M magasságú henger térfogatát. Ekkor a tartományunk a következő alakú:
$V = \{(x,y,z)|x^2+y^2 \leq R^2, 0 \leq z \leq M\}$, amit átírhatunk hengerkoordinátákra:
$W = \{(r,\phi,m)|0 \leq r \leq R, 0 \leq \phi \leq 2\pi, 0 \leq m \leq M\}$, így az integrál a következőképpen módosul:

$$\iiint\limits_V 1 d(x,y,z) = \iiint\limits_W 1 \cdot r\, d(r,\phi,m) = \int_0^R \int_0^{2\pi} \int_0^M r\, dm d\phi dr =$$

$$= \int_0^R \int_0^{2\pi} [rm]_0^M \, d\phi dr = \int_0^R \int_0^{2\pi} rM\, d\phi dr = \int_0^R [rM\phi]_0^{2\pi} \, dr =$$

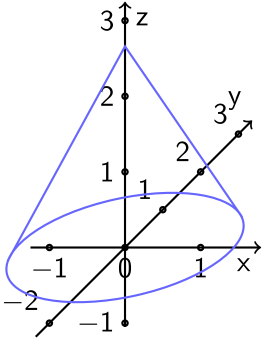
$$= \int_0^R 2\pi rM\, dr = \left[2\pi M \frac{r^2}{2}\right]_0^R = R^2 \pi M$$

Példa

10. példa Számítsuk ki az R sugarú, M magasságú henger térfogatát.

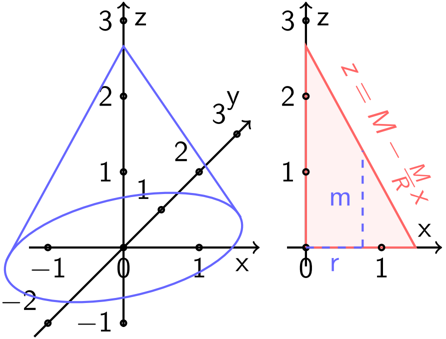
Példa

10. példa Számítsuk ki az R sugarú, M magasságú henger térfogatát. Rögtön hengerkoordinátákban írjuk fel a tartományunkat. Ha a kúp alapkörének sugara R, akkor $0 \leq r \leq R$ és mivel forgásszimmetrikus a tartomány, ezért $0 \leq \phi \leq 2\pi$. Csak az m értéke kérdéses:



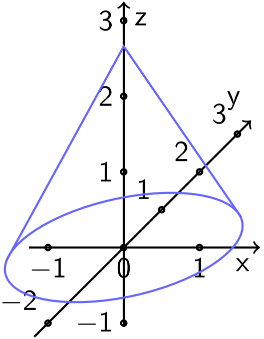
Példa

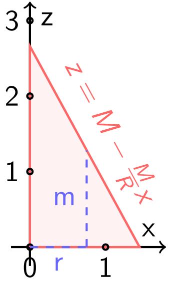
10. példa Számítsuk ki az R sugarú, M magasságú henger térfogatát. Rögtön hengerkoordinátákban írjuk fel a tartományunkat. Ha a kúp alapkörének sugara R, akkor $0 \leq r \leq R$ és mivel forgásszimmetrikus a tartomány, ezért $0 \leq \phi \leq 2\pi$. Csak az m értéke kérdéses:



Példa

10. példa Számítsuk ki az R sugarú, M magasságú henger térfogatát. Rögtön hengerkoordinátákban írjuk fel a tartományunkat. Ha a kúp alapkörének sugara R, akkor $0 \leq r \leq R$ és mivel forgásszimmetrikus a tartomány, ezért $0 \leq \phi \leq 2\pi$. Csak az m értéke kérdéses:

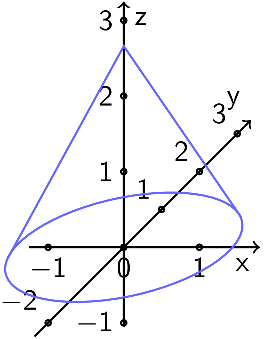


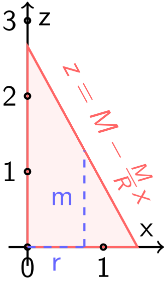


$$V = \{(r, \phi, m) | 0 \leq r \leq R,$$
$$0 \leq \phi \leq 2\pi, 0 \leq m \leq \frac{R-r}{R} M\}$$

Példa

10. példa Számítsuk ki az R sugarú, M magasságú henger térfogatát. Rögtön hengerkoordinátákban írjuk fel a tartományunkat. Ha a kúp alapkörének sugara R, akkor $0 \leq r \leq R$ és mivel forgásszimmetrikus a tartomány, ezért $0 \leq \phi \leq 2\pi$. Csak az m értéke kérdéses:





$$V = \{(r, \phi, m) | 0 \leq r \leq R, \\ 0 \leq \phi \leq 2\pi, 0 \leq m \leq \tfrac{R-r}{R} M\}$$

$$\iiint_{kúp} 1 \, d(x, y, z) = \iiint_V 1 \cdot r \, d(r, \phi, m) =$$

$$= \int_0^R \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{R-r}{R} M} r \, dm d\phi dr = \ldots$$

Példa

$$\int_0^R \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{R-r}{R}M} r\, dm d\phi dr = \int_0^R \int_0^{2\pi} [rm]_0^{\frac{R-r}{R}M}\, d\phi dr =$$

$$= \int_0^R \int_0^{2\pi} \frac{R-r}{R} Mr\, d\phi dr =$$

Példa

$$\int_0^R \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{R-r}{R}M} r\, dm d\phi dr = \int_0^R \int_0^{2\pi} [rm]_0^{\frac{R-r}{R}M} \, d\phi dr =$$

$$= \int_0^R \int_0^{2\pi} \frac{R-r}{R} Mr\, d\phi dr = \int_0^R \left[\frac{R-r}{R} Mr\phi\right]_0^{2\pi} \, dr =$$

$$= \int_0^R 2\pi \frac{R-r}{R} Mr\, dr = \int_0^R \frac{2\pi M}{R} (Rr - r^2)\, dr =$$

Példa

$$\int_0^R \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{R-r}{R}M} r\, dm d\phi dr = \int_0^R \int_0^{2\pi} [rm]_0^{\frac{R-r}{R}M} \, d\phi dr =$$

$$= \int_0^R \int_0^{2\pi} \frac{R-r}{R} Mr \, d\phi dr = \int_0^R \left[\frac{R-r}{R} Mr\phi \right]_0^{2\pi} dr =$$

$$= \int_0^R 2\pi \frac{R-r}{R} Mr \, dr = \int_0^R \frac{2\pi M}{R} (Rr - r^2) \, dr =$$

$$= \left[\frac{2\pi M}{R} \left(R\frac{r^2}{2} - \frac{r^3}{3} \right) \right]_0^R = \frac{2\pi M}{R} \left(\frac{R^3}{2} - \frac{R^3}{3} \right) = \frac{\pi M R^2}{3}$$

Példa

$$\int_0^R \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{R-r}{R}M} r\, dm d\phi dr = \int_0^R \int_0^{2\pi} [rm]_0^{\frac{R-r}{R}M}\, d\phi dr =$$

$$= \int_0^R \int_0^{2\pi} \frac{R-r}{R} Mr\, d\phi dr = \int_0^R \left[\frac{R-r}{R} Mr\phi\right]_0^{2\pi} dr =$$

$$= \int_0^R 2\pi \frac{R-r}{R} Mr\, dr = \int_0^R \frac{2\pi M}{R}(Rr - r^2)\, dr =$$

$$= \left[\frac{2\pi M}{R}\left(R\frac{r^2}{2} - \frac{r^3}{3}\right)\right]_0^R = \frac{2\pi M}{R}\left(\frac{R^3}{2} - \frac{R^3}{3}\right) = \frac{\pi M R^2}{3} = \frac{(R^2\pi)M}{3}$$

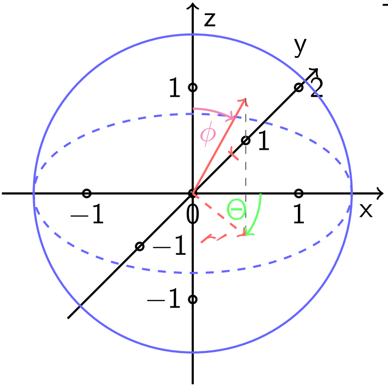
Gömbi koordináták

Új koordinátarendszer:

r: origótól mért távolság $r \in \mathbb{R}_0^+$

Θ: xy síkra vett vetület szöge az x tengely pozitív felétől $\Theta \in [0, 2\pi]$

ϕ: z tengely pozitív felével bezárt szög $\phi \in [0, \pi]$



Trigonometria segítségével: $r' = r \sin \phi$

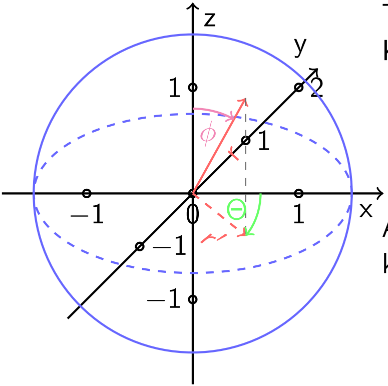
Gömbi koordináták

Új koordinátarendszer:

r: origótól mért távolság $r \in \mathbb{R}_0^+$

Θ: xy síkra vett vetület szöge az x tengely pozitív felétől $\Theta \in [0, 2\pi]$

ϕ: z tengely pozitív felével bezárt szög $\phi \in [0, \pi]$



Trigonometria segítségével: $r' = r \sin \phi$

Kijezhető, hogy

$$x(r, \Theta, \phi) = r' \cos \Theta = r \sin \phi \cos \Theta$$

$$y(r, \Theta, \phi) = r' \sin \Theta = r \sin \phi \sin \Theta$$

$$z(r, \Theta, \phi) = r \cos \phi$$

Az előbbi transzformációt szokás gömbi koordinátázásnak nevezni.

Gömbi koordinátázás Jacobi-mátrixa

Írjuk fel az áttérés Jacobi-mátrixának determinánsát:

$$|J| = \begin{vmatrix} \sin\phi\cos\Theta & r\cos\phi\cos\Theta & -r\sin\phi\sin\Theta \\ \sin\phi\sin\Theta & r\cos\phi\sin\Theta & r\sin\phi\cos\Theta \\ \cos\phi & -r\sin\phi & 0 \end{vmatrix} =$$

Gömbi koordinátázás Jacobi-mátrixa

Írjuk fel az áttérés Jacobi-mátrixának determinánsát:

$$|J| = \begin{vmatrix} \sin\phi\cos\Theta & r\cos\phi\cos\Theta & -r\sin\phi\sin\Theta \\ \sin\phi\sin\Theta & r\cos\phi\sin\Theta & r\sin\phi\cos\Theta \\ \cos\phi & -r\sin\phi & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= \cos\phi \begin{vmatrix} r\cos\phi\cos\Theta & -r\sin\phi\sin\Theta \\ r\cos\phi\sin\Theta & r\sin\phi\cos\Theta \end{vmatrix} + r\sin\phi \begin{vmatrix} \sin\phi\cos\Theta & -r\sin\phi\sin\Theta \\ \sin\phi\sin\Theta & r\sin\phi\cos\Theta \end{vmatrix} =$$

Gömbi koordinátázás Jacobi-mátrixa

Írjuk fel az áttérés Jacobi-mátrixának determinánsát:

$$|J| = \begin{vmatrix} \sin\phi\cos\Theta & r\cos\phi\cos\Theta & -r\sin\phi\sin\Theta \\ \sin\phi\sin\Theta & r\cos\phi\sin\Theta & r\sin\phi\cos\Theta \\ \cos\phi & -r\sin\phi & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= \cos\phi \begin{vmatrix} r\cos\phi\cos\Theta & -r\sin\phi\sin\Theta \\ r\cos\phi\sin\Theta & r\sin\phi\cos\Theta \end{vmatrix} + r\sin\phi \begin{vmatrix} \sin\phi\cos\Theta & -r\sin\phi\sin\Theta \\ \sin\phi\sin\Theta & r\sin\phi\cos\Theta \end{vmatrix} =$$

$$= \cos\phi(r^2\sin\phi\cos\phi\cos^2\Theta + r^2\sin\phi\cos\phi\sin^2\Theta) +$$
$$+ r\sin\phi(r\sin^2\phi\cos^2\Theta + r\sin^2\phi\sin^2\Theta) =$$

Gömbi koordinátázás Jacobi-mátrixa

Írjuk fel az áttérés Jacobi-mátrixának determinánsát:

$$|J| = \begin{vmatrix} \sin\phi\cos\Theta & r\cos\phi\cos\Theta & -r\sin\phi\sin\Theta \\ \sin\phi\sin\Theta & r\cos\phi\sin\Theta & r\sin\phi\cos\Theta \\ \cos\phi & -r\sin\phi & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= \cos\phi \begin{vmatrix} r\cos\phi\cos\Theta & -r\sin\phi\sin\Theta \\ r\cos\phi\sin\Theta & r\sin\phi\cos\Theta \end{vmatrix} + r\sin\phi \begin{vmatrix} \sin\phi\cos\Theta & -r\sin\phi\sin\Theta \\ \sin\phi\sin\Theta & r\sin\phi\cos\Theta \end{vmatrix} =$$

$$= \cos\phi(r^2\sin\phi\cos\phi\cos^2\Theta + r^2\sin\phi\cos\phi\sin^2\Theta) +$$
$$+ r\sin\phi(r\sin^2\phi\cos^2\Theta + r\sin^2\phi\sin^2\Theta) =$$

$$= r^2\sin\phi\cos^2\phi(\cos^2\Theta + \sin^2\Theta) + r^2\sin^3\phi(\cos^2\Theta + \sin^2\Theta) =$$

Gömbi koordinátázás Jacobi-mátrixa

Írjuk fel az áttérés Jacobi-mátrixának determinánsát:

$$|J| = \begin{vmatrix} \sin\phi\cos\Theta & r\cos\phi\cos\Theta & -r\sin\phi\sin\Theta \\ \sin\phi\sin\Theta & r\cos\phi\sin\Theta & r\sin\phi\cos\Theta \\ \cos\phi & -r\sin\phi & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= \cos\phi \begin{vmatrix} r\cos\phi\cos\Theta & -r\sin\phi\sin\Theta \\ r\cos\phi\sin\Theta & r\sin\phi\cos\Theta \end{vmatrix} + r\sin\phi \begin{vmatrix} \sin\phi\cos\Theta & -r\sin\phi\sin\Theta \\ \sin\phi\sin\Theta & r\sin\phi\cos\Theta \end{vmatrix} =$$

$$= \cos\phi(r^2\sin\phi\cos\phi\cos^2\Theta + r^2\sin\phi\cos\phi\sin^2\Theta) +$$
$$+ r\sin\phi(r\sin^2\phi\cos^2\Theta + r\sin^2\phi\sin^2\Theta) =$$

$$= r^2\sin\phi\cos^2\phi(\cos^2\Theta + \sin^2\Theta) + r^2\sin^3\phi(\cos^2\Theta + \sin^2\Theta) =$$

$$= r^2\sin\phi\cos^2\phi + r^2\sin^3\phi =$$

Gömbi koordinátázás Jacobi-mátrixa

Írjuk fel az áttérés Jacobi-mátrixának determinánsát:

$$|J| = \begin{vmatrix} \sin\phi\cos\Theta & r\cos\phi\cos\Theta & -r\sin\phi\sin\Theta \\ \sin\phi\sin\Theta & r\cos\phi\sin\Theta & r\sin\phi\cos\Theta \\ \cos\phi & -r\sin\phi & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= \cos\phi \begin{vmatrix} r\cos\phi\cos\Theta & -r\sin\phi\sin\Theta \\ r\cos\phi\sin\Theta & r\sin\phi\cos\Theta \end{vmatrix} + r\sin\phi \begin{vmatrix} \sin\phi\cos\Theta & -r\sin\phi\sin\Theta \\ \sin\phi\sin\Theta & r\sin\phi\cos\Theta \end{vmatrix} =$$

$$= \cos\phi(r^2\sin\phi\cos\phi\cos^2\Theta + r^2\sin\phi\cos\phi\sin^2\Theta) +$$
$$+ r\sin\phi(r\sin^2\phi\cos^2\Theta + r\sin^2\phi\sin^2\Theta) =$$

$$= r^2\sin\phi\cos^2\phi(\cos^2\Theta + \sin^2\Theta) + r^2\sin^3\phi(\cos^2\Theta + \sin^2\Theta) =$$

$$= r^2\sin\phi\cos^2\phi + r^2\sin^3\phi = r^2\sin\phi(\cos^2\phi + \sin^2\phi) = r^2\sin\phi$$

Példa

11. példa Számítsuk ki az R sugarú gömb térfogatát.

Példa

11. példa Számítsuk ki az R sugarú gömb térfogatát.
Gömbi koordinátákat fogunk használni:
$V = \{(r, \Theta, \phi) | 0 \leq r \leq R, 0 \leq \Theta \leq 2\pi, 0 \leq \phi \leq \pi\}$, tehát

$$\iiint_{gömb} 1 \, d(x, y, z) = \iiint_V 1 \cdot r^2 \sin\phi \, d(r, \Theta, \phi) =$$

Példa

11. példa Számítsuk ki az R sugarú gömb térfogatát.
Gömbi koordinátákat fogunk használni:
$V=\{(r,\Theta,\phi)|0\le r\le R, 0\le\Theta\le 2\pi, 0\le\phi\le\pi\}$, tehát

$$\iiint\limits_{gömb} 1\, d(x,y,z) = \iiint\limits_{V} 1\cdot r^2\sin\phi\, d(r,\Theta,\phi) =$$

$$= \int_0^R\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} r^2\sin\phi\, d\phi d\Theta dr = \int_0^R\int_0^{2\pi}\left[-r^2\cos\phi\right]_0^{\pi} d\Theta dr =$$

$$\int_0^R\int_0^{2\pi} 2r^2\, d\Theta dr =$$

Példa

11. példa Számítsuk ki az R sugarú gömb térfogatát.
Gömbi koordinátákat fogunk használni:
$V = \{(r, \Theta, \phi) | 0 \leq r \leq R, 0 \leq \Theta \leq 2\pi, 0 \leq \phi \leq \pi\}$, tehát

$$\iiint\limits_{gömb} 1 \, d(x, y, z) = \iiint\limits_{V} 1 \cdot r^2 \sin\phi \, d(r, \Theta, \phi) =$$

$$= \int_0^R \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} r^2 \sin\phi \, d\phi d\Theta dr = \int_0^R \int_0^{2\pi} \left[-r^2 \cos\phi\right]_0^{\pi} d\Theta dr =$$

$$\int_0^R \int_0^{2\pi} 2r^2 \, d\Theta dr = \int_0^R \left[2r^2\Theta\right]_0^{2\pi} dr = \int_0^R 4\pi r^2 \, dr =$$

Példa

11. példa Számítsuk ki az R sugarú gömb térfogatát.
Gömbi koordinátákat fogunk használni:
$V = \{(r, \Theta, \phi) | 0 \leq r \leq R, 0 \leq \Theta \leq 2\pi, 0 \leq \phi \leq \pi\}$, tehát

$$\iiint_{gömb} 1 \, d(x, y, z) = \iiint_{V} 1 \cdot r^2 \sin\phi \, d(r, \Theta, \phi) =$$

$$= \int_0^R \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} r^2 \sin\phi \, d\phi d\Theta dr = \int_0^R \int_0^{2\pi} \left[-r^2 \cos\phi\right]_0^{\pi} d\Theta dr =$$

$$\int_0^R \int_0^{2\pi} 2r^2 \, d\Theta dr = \int_0^R \left[2r^2\Theta\right]_0^{2\pi} dr = \int_0^R 4\pi r^2 \, dr =$$

$$= \left[4\pi \frac{r^3}{3}\right]_0^R = 4\pi \frac{R^3}{3} = \frac{4R^3\pi}{3}$$

Példa

12. példa Számítsuk ki az alábbi T tartomány térfogatát:
$T = \{(x, y, z) | 1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 9, 0 \leq x, 0 \leq y, 0 \leq z\}$

Példa

12. példa Számítsuk ki az alábbi T tartomány térfogatát:
$T = \{(x, y, z) | 1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 9, 0 \leq x, 0 \leq y, 0 \leq z\}$
A tartomány meghatározásában szereplő egyenlőtlenségek szerint T az 1 sugarú gömbön kívüli, de 3 sugarú gömbön belüli, pozitív térnyolcadba eső pontok halmaza. Írjuk át gömbi koordinátákba:

Példa

12. példa Számítsuk ki az alábbi T tartomány térfogatát:
$T = \{(x, y, z)|1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 9, 0 \leq x, 0 \leq y, 0 \leq z\}$
A tartomány meghatározásában szereplő egyenlőtlenségek szerint T az 1 sugarú gömbön kívüli, de 3 sugarú gömbön belüli, pozitív térnyolcadba eső pontok halmaza. Írjuk át gömbi koordinátákba:
$V = \{(r, \Theta, \phi)|1 \leq r \leq 3, 0 \leq \Theta \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq \phi \leq \frac{\pi}{2}\}$, tehát

$$\iiint_T 1\, d(x, y, z) = \iiint_V 1 \cdot r^2 \sin\phi\, d(r, \Theta, \phi) =$$

$$= \int_1^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} r^2 \sin\phi\, d\phi d\Theta dr =$$

Példa

12. példa Számítsuk ki az alábbi T tartomány térfogatát:
$T = \{(x, y, z)|1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 9, 0 \leq x, 0 \leq y, 0 \leq z\}$
A tartomány meghatározásában szereplő egyenlőtlenségek szerint T az 1 sugarú gömbön kívüli, de 3 sugarú gömbön belüli, pozitív térnyolcadba eső pontok halmaza. Írjuk át gömbi koordinátákba:
$V = \{(r, \Theta, \phi)|1 \leq r \leq 3, 0 \leq \Theta \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq \phi \leq \frac{\pi}{2}\}$, tehát

$$\iiint_T 1\, d(x, y, z) = \iiint_V 1 \cdot r^2 \sin\phi \, d(r, \Theta, \phi) =$$

$$= \int_1^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} r^2 \sin\phi \, d\phi d\Theta dr = \int_1^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[-r^2 \cos\phi\right]_0^{\frac{\pi}{2}} \, d\Theta dr =$$

$$= \int_1^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} r^2 \, d\Theta dr =$$

Példa

12. példa Számítsuk ki az alábbi T tartomány térfogatát:
$T = \{(x,y,z)|1 \leq x^2+y^2+z^2 \leq 9, 0 \leq x, 0 \leq y, 0 \leq z\}$
A tartomány meghatározásában szereplő egyenlőtlenségek szerint T az 1 sugarú gömbön kívüli, de 3 sugarú gömbön belüli, pozitív térnyolcadba eső pontok halmaza. Írjuk át gömbi koordinátákba:
$V = \{(r,\Theta,\phi)|1 \leq r \leq 3, 0 \leq \Theta \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq \phi \leq \frac{\pi}{2}\}$, tehát

$$\iiint\limits_T 1\,d(x,y,z) = \iiint\limits_V 1 \cdot r^2 \sin\phi\, d(r,\Theta,\phi) =$$

$$= \int_1^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} r^2 \sin\phi\, d\phi d\Theta dr = \int_1^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[-r^2\cos\phi\right]_0^{\frac{\pi}{2}} d\Theta dr =$$

$$= \int_1^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} r^2\, d\Theta dr = \int_1^3 \left[r^2\Theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}} dr = \int_1^3 \frac{\pi}{2} r^2\, dr =$$

Példa

12. példa Számítsuk ki az alábbi T tartomány térfogatát:
$T = \{(x, y, z) | 1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 9, 0 \leq x, 0 \leq y, 0 \leq z\}$
A tartomány meghatározásában szereplő egyenlőtlenségek szerint T az 1 sugarú gömbön kívüli, de 3 sugarú gömbön belüli, pozitív térnyolcadba eső pontok halmaza. Írjuk át gömbi koordinátákba:
$V = \{(r, \Theta, \phi) | 1 \leq r \leq 3, 0 \leq \Theta \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq \phi \leq \frac{\pi}{2}\}$, tehát

$$\iiint_T 1\, d(x, y, z) = \iiint_V 1 \cdot r^2 \sin\phi\, d(r, \Theta, \phi) =$$

$$= \int_1^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} r^2 \sin\phi\, d\phi d\Theta dr = \int_1^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[-r^2 \cos\phi\right]_0^{\frac{\pi}{2}} d\Theta dr =$$

$$= \int_1^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} r^2\, d\Theta dr = \int_1^3 \left[r^2 \Theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}} dr = \int_1^3 \frac{\pi}{2} r^2\, dr =$$

$$= \left[\frac{\pi}{2} \frac{r^3}{3}\right]_1^3 = \frac{\pi}{2} \frac{27-1}{3} = \frac{13\pi}{3}$$