

Vektorok és koordináta geometria

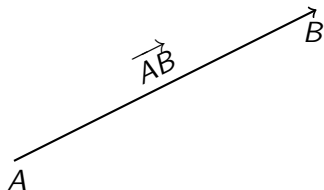
Matematika A2x

2020 ősz

Vektorok

Vektor: Irányított szakasz, vagy rendezett pontpár mely közül az első a kezdőpont, a második a végpont. Minden vektornak van:

- nagysága
- iránya



Vektorok

Vektor: Irányított szakasz, vagy rendezett pontpár mely közül az első a kezdőpont, a második a végpont. Minden vektornak van:

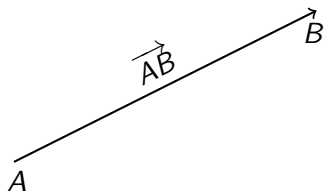
- nagysága
- iránya

Két vektort egyenlőnek tekintünk, ha eltolással egymásba vihetők.

Egy $\mathbf{v}$ **vektor hossza**, vagy nagysága a kezdőpont és végpont távolsága.

Jelölés: $|\mathbf{v}|$.

Ha ez 1, akkor **egységvektor**, ha 0, akkor **nullvektor**. A nullvektor iránya tetszőleges.

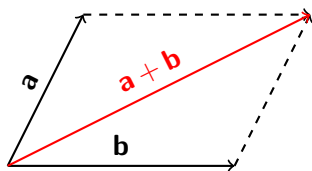


Vektorműveletek – Vektorok összeadása, kivonása

Vektor összeadása: Parallelogramma szabály

Tulajdonságok:

- kommutatív: $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a}$
- asszociatív: $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c} = \mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c})$

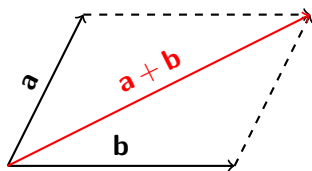


Vektorműveletek – Vektorok összeadása, kivonása

Vektor összeadása: Paralelogramma szabály

Tulajdonságok:

- kommutatív: $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a}$
- asszociatív: $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c} = \mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c})$



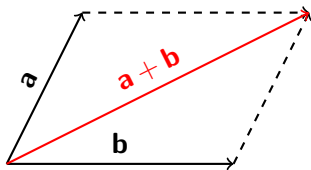
Egy $\mathbf{v}$ vektor **ellentettvektora** $-\mathbf{v}$, ha $\mathbf{v} + (-\mathbf{v}) = \mathbf{0}$

Vektorműveletek – Vektorok összeadása, kivonása

Vektor összeadása: Paralelogramma szabály

Tulajdonságok:

- kommutatív: $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a}$
- asszociatív: $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c} = \mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c})$

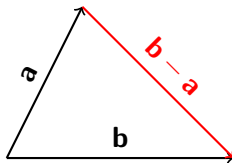
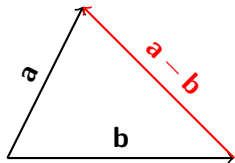


Egy $\mathbf{v}$ vektor **ellentettvektora** $-\mathbf{v}$, ha $\mathbf{v} + (-\mathbf{v}) = \mathbf{0}$

Vektor kivonása: Paralelogramma szabály

Tulajdonságok:

- antikommutatív: $\mathbf{a} - \mathbf{b} = -(\mathbf{b} - \mathbf{a})$



Vektorműveletek – Vektorok szorzása valós számmal

Definíció

Legyen $\lambda \in \mathbb{R}$ és $\mathbf{v}$ egy vektor. Ekkor a $\lambda \cdot \mathbf{v}$ is egy vektor, melynek

- nagysága:

Vektorműveletek – Vektorok szorzása valós számmal

Definíció

Legyen $\lambda \in \mathbb{R}$ és $\mathbf{v}$ egy vektor. Ekkor a $\lambda \cdot \mathbf{v}$ is egy vektor, melynek

- *nagysága:* $|\lambda \cdot \mathbf{v}| = |\lambda| \cdot |\mathbf{v}|$, ahol az első $|\cdot|$ egy szám abszolút érték, míg a második egy vektor hossza
- *iránya:*

Vektorműveletek – Vektorok szorzása valós számmal

Definíció

Legyen $\lambda \in \mathbb{R}$ és $\mathbf{v}$ egy vektor. Ekkor a $\lambda \cdot \mathbf{v}$ is egy vektor, melynek

- *nagysága:* $|\lambda \cdot \mathbf{v}| = |\lambda| \cdot |\mathbf{v}|$, ahol az első $|\cdot|$ egy szám abszolút érték, míg a második egy vektor hossza
- *iránya:*
 - ▶ $\mathbf{v}$ -vel megegyező, ha $\lambda > 0$

Vektorműveletek – Vektorok szorzása valós számmal

Definíció

Legyen $\lambda \in \mathbb{R}$ és $\mathbf{v}$ egy vektor. Ekkor a $\lambda \cdot \mathbf{v}$ is egy vektor, melynek

- *nagysága:* $|\lambda \cdot \mathbf{v}| = |\lambda| \cdot |\mathbf{v}|$, ahol az első $|\cdot|$ egy szám abszolút érték, míg a második egy vektor hossza
- *iránya:*
 - ▶ $\mathbf{v}$ -vel megegyező, ha $\lambda > 0$
 - ▶ $\mathbf{v}$ -vel ellentétes, ha $\lambda < 0$

Vektorműveletek – Vektorok szorzása valós számmal

Definíció

Legyen $\lambda \in \mathbb{R}$ és $\mathbf{v}$ egy vektor. Ekkor a $\lambda \cdot \mathbf{v}$ is egy vektor, melynek

- *nagysága:* $|\lambda \cdot \mathbf{v}| = |\lambda| \cdot |\mathbf{v}|$, ahol az első $|\cdot|$ egy szám abszolút érték, míg a második egy vektor hossza
- *iránya:*
 - ▶ $\mathbf{v}$ -vel megegyező, ha $\lambda > 0$
 - ▶ $\mathbf{v}$ -vel ellentétes, ha $\lambda < 0$
 - ▶ nullvektor, ha $\lambda = 0$

Tulajdonságok:

Vektorműveletek – Vektorok szorzása valós számmal

Definíció

Legyen $\lambda \in \mathbb{R}$ és $\mathbf{v}$ egy vektor. Ekkor a $\lambda \cdot \mathbf{v}$ is egy vektor, melynek

- *nagysága*: $|\lambda \cdot \mathbf{v}| = |\lambda| \cdot |\mathbf{v}|$, ahol az első $|\cdot|$ egy szám abszolút érték, míg a második egy vektor hossza
- *iránya*:
 - ▶ $\mathbf{v}$ -vel megegyező, ha $\lambda > 0$
 - ▶ $\mathbf{v}$ -vel ellentétes, ha $\lambda < 0$
 - ▶ nullvektor, ha $\lambda = 0$

Tulajdonságok:

- asszociatív: $\lambda(\mu\mathbf{v}) = (\lambda\mu)\mathbf{v}$

Vektorműveletek – Vektorok szorzása valós számmal

Definíció

Legyen $\lambda \in \mathbb{R}$ és $\mathbf{v}$ egy vektor. Ekkor a $\lambda \cdot \mathbf{v}$ is egy vektor, melynek

- *nagysága*: $|\lambda \cdot \mathbf{v}| = |\lambda| \cdot |\mathbf{v}|$, ahol az első $|\cdot|$ egy szám abszolút érték, míg a második egy vektor hossza
- *iránya*:
 - ▶ $\mathbf{v}$ -vel megegyező, ha $\lambda > 0$
 - ▶ $\mathbf{v}$ -vel ellentétes, ha $\lambda < 0$
 - ▶ nullvektor, ha $\lambda = 0$

Tulajdonságok:

- asszociatív: $\lambda(\mu\mathbf{v}) = (\lambda\mu)\mathbf{v}$
- disztributív: $(\lambda + \mu)\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v} + \mu\mathbf{v}$

Vektorműveletek – Vektorok szorzása valós számmal

Definíció

Legyen $\lambda \in \mathbb{R}$ és $\mathbf{v}$ egy vektor. Ekkor a $\lambda \cdot \mathbf{v}$ is egy vektor, melynek

- *nagysága:* $|\lambda \cdot \mathbf{v}| = |\lambda| \cdot |\mathbf{v}|$, ahol az első $|\cdot|$ egy szám abszolút érték, míg a második egy vektor hossza
- *iránya:*
 - ▶ $\mathbf{v}$ -vel megegyező, ha $\lambda > 0$
 - ▶ $\mathbf{v}$ -vel ellentétes, ha $\lambda < 0$
 - ▶ nullvektor, ha $\lambda = 0$

Tulajdonságok:

- asszociatív: $\lambda(\mu\mathbf{v}) = (\lambda\mu)\mathbf{v}$
- disztributív: $(\lambda + \mu)\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v} + \mu\mathbf{v}$
- disztributív: $\lambda(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = \lambda\mathbf{u} + \lambda\mathbf{v}$

Vektorműveletek – Vektorok szorzása valós számmal

Definíció

Legyen $\lambda \in \mathbb{R}$ és $\mathbf{v}$ egy vektor. Ekkor a $\lambda \cdot \mathbf{v}$ is egy vektor, melynek

- *nagysága:* $|\lambda \cdot \mathbf{v}| = |\lambda| \cdot |\mathbf{v}|$, ahol az első $|\cdot|$ egy szám abszolút érték, míg a második egy vektor hossza
- *iránya:*
 - ▶ $\mathbf{v}$ -vel megegyező, ha $\lambda > 0$
 - ▶ $\mathbf{v}$ -vel ellentétes, ha $\lambda < 0$
 - ▶ nullvektor, ha $\lambda = 0$

Tulajdonságok:

- asszociatív: $\lambda(\mu\mathbf{v}) = (\lambda\mu)\mathbf{v}$
- disztributív: $(\lambda + \mu)\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v} + \mu\mathbf{v}$
- disztributív: $\lambda(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = \lambda\mathbf{u} + \lambda\mathbf{v}$

Adott $\mathbf{v}$ irányú egységvektor:

Vektorműveletek – Vektorok szorzása valós számmal

Definíció

Legyen $\lambda \in \mathbb{R}$ és $\mathbf{v}$ egy vektor. Ekkor a $\lambda \cdot \mathbf{v}$ is egy vektor, melynek

- *nagysága:* $|\lambda \cdot \mathbf{v}| = |\lambda| \cdot |\mathbf{v}|$, ahol az első $|\cdot|$ egy szám abszolút érték, míg a második egy vektor hossza
- *iránya:*
 - ▶ $\mathbf{v}$ -vel megegyező, ha $\lambda > 0$
 - ▶ $\mathbf{v}$ -vel ellentétes, ha $\lambda < 0$
 - ▶ nullvektor, ha $\lambda = 0$

Tulajdonságok:

- asszociatív: $\lambda(\mu\mathbf{v}) = (\lambda\mu)\mathbf{v}$
- disztributív: $(\lambda + \mu)\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v} + \mu\mathbf{v}$
- disztributív: $\lambda(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = \lambda\mathbf{u} + \lambda\mathbf{v}$

Adott $\mathbf{v}$ irányú egységvektor: $\mathbf{v}_e = \frac{1}{|\mathbf{v}|}\mathbf{v}$

Koordináták

Koordináták (most): A térbeli vektorokat a valós számhármassokkal ($\mathbb{R}^3$) azonosítjuk, melyek a végpontot jelölik. A kezdőpont az origó.

Koordináták

Koordináták (most): A térbeli vektorokat a valós számhármassokkal ($\mathbb{R}^3$) azonosítjuk, melyek a végpontot jelölik. A kezdőpont az origó.

1. **példa** Legyen $\mathbf{u} = (3, 2, 1)$, $\mathbf{v} = (1, 0, -2)$, $\lambda = 3$ és $\mu = -2$. Számítsuk ki a $\mathbf{u} + \mathbf{v}$, $\mathbf{v} - \mathbf{u}$, $|\mathbf{u}|$, $\lambda\mathbf{u}$ és $\mu\mathbf{v}$ kifejezéseket.

Koordináták

Koordináták (most): A térbeli vektorokat a valós számhármassokkal ($\mathbb{R}^3$) azonosítjuk, melyek a végpontot jelölik. A kezdőpont az origó.

1. **példa** Legyen $\mathbf{u} = (3, 2, 1)$, $\mathbf{v} = (1, 0, -2)$, $\lambda = 3$ és $\mu = -2$. Számítsuk ki a $\mathbf{u} + \mathbf{v}$, $\mathbf{v} - \mathbf{u}$, $|\mathbf{u}|$, $\lambda\mathbf{u}$ és $\mu\mathbf{v}$ kifejezéseket.

- $\mathbf{u} + \mathbf{v} = (3, 2, 1) + (1, 0, -2) =$

Koordináták

Koordináták (most): A térbeli vektorokat a valós számhármassokkal ($\mathbb{R}^3$) azonosítjuk, melyek a végpontot jelölik. A kezdőpont az origó.

1. **példa** Legyen $\mathbf{u} = (3, 2, 1)$, $\mathbf{v} = (1, 0, -2)$, $\lambda = 3$ és $\mu = -2$. Számítsuk ki a $\mathbf{u} + \mathbf{v}$, $\mathbf{v} - \mathbf{u}$, $|\mathbf{u}|$, $\lambda\mathbf{u}$ és $\mu\mathbf{v}$ kifejezéseket.

- $\mathbf{u} + \mathbf{v} = (3, 2, 1) + (1, 0, -2) = (4, 2, -1)$

Koordináták

Koordináták (most): A térbeli vektorokat a valós számhármassokkal ($\mathbb{R}^3$) azonosítjuk, melyek a végpontot jelölik. A kezdőpont az origó.

1. **példa** Legyen $\mathbf{u} = (3, 2, 1)$, $\mathbf{v} = (1, 0, -2)$, $\lambda = 3$ és $\mu = -2$. Számítsuk ki a $\mathbf{u} + \mathbf{v}$, $\mathbf{v} - \mathbf{u}$, $|\mathbf{u}|$, $\lambda\mathbf{u}$ és $\mu\mathbf{v}$ kifejezéseket.

- $\mathbf{u} + \mathbf{v} = (3, 2, 1) + (1, 0, -2) = (4, 2, -1)$
- $\mathbf{v} - \mathbf{u} = (1, 0, -2) - (3, 2, 1) =$

Koordináták

Koordináták (most): A térbeli vektorokat a valós számhármassokkal ($\mathbb{R}^3$) azonosítjuk, melyek a végpontot jelölik. A kezdőpont az origó.

1. **példa** Legyen $\mathbf{u} = (3, 2, 1)$, $\mathbf{v} = (1, 0, -2)$, $\lambda = 3$ és $\mu = -2$. Számítsuk ki a $\mathbf{u} + \mathbf{v}$, $\mathbf{v} - \mathbf{u}$, $|\mathbf{u}|$, $\lambda\mathbf{u}$ és $\mu\mathbf{v}$ kifejezéseket.

- $\mathbf{u} + \mathbf{v} = (3, 2, 1) + (1, 0, -2) = (4, 2, -1)$
- $\mathbf{v} - \mathbf{u} = (1, 0, -2) - (3, 2, 1) = (-2, -2, -3)$

Koordináták

Koordináták (most): A térbeli vektorokat a valós számhármassokkal ($\mathbb{R}^3$) azonosítjuk, melyek a végpontot jelölik. A kezdőpont az origó.

1. **példa** Legyen $\mathbf{u} = (3, 2, 1)$, $\mathbf{v} = (1, 0, -2)$, $\lambda = 3$ és $\mu = -2$. Számítsuk ki a $\mathbf{u} + \mathbf{v}$, $\mathbf{v} - \mathbf{u}$, $|\mathbf{u}|$, $\lambda\mathbf{u}$ és $\mu\mathbf{v}$ kifejezéseket.

- $\mathbf{u} + \mathbf{v} = (3, 2, 1) + (1, 0, -2) = (4, 2, -1)$
- $\mathbf{v} - \mathbf{u} = (1, 0, -2) - (3, 2, 1) = (-2, -2, -3)$
- $|\mathbf{u}| = |(3, 2, 1)| =$

Koordináták

Koordináták (most): A térbeli vektorokat a valós számhármassokkal ($\mathbb{R}^3$) azonosítjuk, melyek a végpontot jelölik. A kezdőpont az origó.

1. **példa** Legyen $\mathbf{u} = (3, 2, 1)$, $\mathbf{v} = (1, 0, -2)$, $\lambda = 3$ és $\mu = -2$. Számítsuk ki a $\mathbf{u} + \mathbf{v}$, $\mathbf{v} - \mathbf{u}$, $|\mathbf{u}|$, $\lambda\mathbf{u}$ és $\mu\mathbf{v}$ kifejezéseket.

- $\mathbf{u} + \mathbf{v} = (3, 2, 1) + (1, 0, -2) = (4, 2, -1)$
- $\mathbf{v} - \mathbf{u} = (1, 0, -2) - (3, 2, 1) = (-2, -2, -3)$
- $|\mathbf{u}| = |(3, 2, 1)| = \sqrt{3^2 + 2^2 + 1^2} = \sqrt{14}$

Koordináták

Koordináták (most): A térbeli vektorokat a valós számhármassokkal ($\mathbb{R}^3$) azonosítjuk, melyek a végpontot jelölik. A kezdőpont az origó.

1. **példa** Legyen $\mathbf{u} = (3, 2, 1)$, $\mathbf{v} = (1, 0, -2)$, $\lambda = 3$ és $\mu = -2$. Számítsuk ki a $\mathbf{u} + \mathbf{v}$, $\mathbf{v} - \mathbf{u}$, $|\mathbf{u}|$, $\lambda\mathbf{u}$ és $\mu\mathbf{v}$ kifejezéseket.

- $\mathbf{u} + \mathbf{v} = (3, 2, 1) + (1, 0, -2) = (4, 2, -1)$
- $\mathbf{v} - \mathbf{u} = (1, 0, -2) - (3, 2, 1) = (-2, -2, -3)$
- $|\mathbf{u}| = |(3, 2, 1)| = \sqrt{3^2 + 2^2 + 1^2} = \sqrt{14}$
- $\lambda\mathbf{u} = 3(3, 2, 1) =$

Koordináták

Koordináták (most): A térbeli vektorokat a valós számhármassokkal ($\mathbb{R}^3$) azonosítjuk, melyek a végpontot jelölik. A kezdőpont az origó.

1. **példa** Legyen $\mathbf{u} = (3, 2, 1)$, $\mathbf{v} = (1, 0, -2)$, $\lambda = 3$ és $\mu = -2$. Számítsuk ki a $\mathbf{u} + \mathbf{v}$, $\mathbf{v} - \mathbf{u}$, $|\mathbf{u}|$, $\lambda\mathbf{u}$ és $\mu\mathbf{v}$ kifejezéseket.

- $\mathbf{u} + \mathbf{v} = (3, 2, 1) + (1, 0, -2) = (4, 2, -1)$
- $\mathbf{v} - \mathbf{u} = (1, 0, -2) - (3, 2, 1) = (-2, -2, -3)$
- $|\mathbf{u}| = |(3, 2, 1)| = \sqrt{3^2 + 2^2 + 1^2} = \sqrt{14}$
- $\lambda\mathbf{u} = 3(3, 2, 1) = (9, 6, 3)$

Koordináták

Koordináták (most): A térbeli vektorokat a valós számhármassokkal ($\mathbb{R}^3$) azonosítjuk, melyek a végpontot jelölik. A kezdőpont az origó.

1. **példa** Legyen $\mathbf{u} = (3, 2, 1)$, $\mathbf{v} = (1, 0, -2)$, $\lambda = 3$ és $\mu = -2$. Számítsuk ki a $\mathbf{u} + \mathbf{v}$, $\mathbf{v} - \mathbf{u}$, $|\mathbf{u}|$, $\lambda\mathbf{u}$ és $\mu\mathbf{v}$ kifejezéseket.

- $\mathbf{u} + \mathbf{v} = (3, 2, 1) + (1, 0, -2) = (4, 2, -1)$
- $\mathbf{v} - \mathbf{u} = (1, 0, -2) - (3, 2, 1) = (-2, -2, -3)$
- $|\mathbf{u}| = |(3, 2, 1)| = \sqrt{3^2 + 2^2 + 1^2} = \sqrt{14}$
- $\lambda\mathbf{u} = 3(3, 2, 1) = (9, 6, 3)$
- $\mu\mathbf{v} = -2(1, 0, -2) = (-2, 0, 4)$

Skaláris szorzás

Definíció

Az $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$ vektorok *skaláris szorzata* $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle := |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \cos \alpha$ SKALÁR, ahol α a két vektor által bezárt szög. Alternatív jelölés: $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = \mathbf{a} \mathbf{b}$ és $\mathbf{a} \mathbf{b} \in \mathbb{R}$

Skaláris szorzás

Definíció

Az $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$ vektorok *skaláris szorzata* $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle := |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \cos \alpha$ SKALÁR, ahol α a két vektor által bezárt szög. Alternatív jelölés: $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = \mathbf{a} \mathbf{b}$ és $\mathbf{a} \mathbf{b} \in \mathbb{R}$

Kiszámítása koordinátákkal: Ha $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$ és $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$, akkor $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$

Skaláris szorzás

Definíció

Az $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$ vektorok *skaláris szorzata* $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle := |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \cos \alpha$ SKALÁR, ahol α a két vektor által bezárt szög. Alternatív jelölés: $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = \mathbf{a} \mathbf{b}$ és $\mathbf{a} \mathbf{b} \in \mathbb{R}$

Kiszámítása koordinátákkal: Ha $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$ és $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$, akkor
 $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$

Tulajdonságok:

Skaláris szorzás

Definíció

Az $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$ vektorok *skaláris szorzata* $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle := |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \cos \alpha$ SKALÁR, ahol α a két vektor által bezárt szög. Alternatív jelölés: $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = \mathbf{a} \mathbf{b}$ és $\mathbf{a} \mathbf{b} \in \mathbb{R}$

Kiszámítása koordinátákkal: Ha $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$ és $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$, akkor
 $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$

Tulajdonságok:

- kommutatív: $\mathbf{a} \mathbf{b} = \mathbf{b} \mathbf{a}$

Skaláris szorzás

Definíció

Az $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$ vektorok *skaláris szorzata* $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle := |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \cos \alpha$ SKALÁR, ahol α a két vektor által bezárt szög. Alternatív jelölés: $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = \mathbf{a} \mathbf{b}$ és $\mathbf{a} \mathbf{b} \in \mathbb{R}$

Kiszámítása koordinátákkal: Ha $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$ és $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$, akkor
 $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$

Tulajdonságok:

- kommutatív: $\mathbf{a} \mathbf{b} = \mathbf{b} \mathbf{a}$
- disztributív: $(\lambda \mathbf{a}) \mathbf{b} = \lambda (\mathbf{a} \mathbf{b})$

Skaláris szorzás

Definíció

Az $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$ vektorok *skaláris szorzata* $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle := |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \cos \alpha$ SKALÁR, ahol α a két vektor által bezárt szög. Alternatív jelölés: $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = \mathbf{a} \mathbf{b}$ és $\mathbf{a} \mathbf{b} \in \mathbb{R}$

Kiszámítása koordinátákkal: Ha $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$ és $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$, akkor $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$

Tulajdonságok:

- kommutatív: $\mathbf{a} \mathbf{b} = \mathbf{b} \mathbf{a}$
- disztributív: $(\lambda \mathbf{a}) \mathbf{b} = \lambda (\mathbf{a} \mathbf{b})$
- disztributív: $\mathbf{a} (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \mathbf{b} + \mathbf{a} \mathbf{c}$

Skaláris szorzás

Definíció

Az $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$ vektorok *skaláris szorzata* $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle := |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \cos \alpha$ SKALÁR, ahol α a két vektor által bezárt szög. Alternatív jelölés: $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = \mathbf{a} \mathbf{b}$ és $\mathbf{a} \mathbf{b} \in \mathbb{R}$

Kiszámítása koordinátákkal: Ha $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$ és $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$, akkor $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$

Tulajdonságok:

- kommutatív: $\mathbf{a} \mathbf{b} = \mathbf{b} \mathbf{a}$
- disztributív: $(\lambda \mathbf{a}) \mathbf{b} = \lambda (\mathbf{a} \mathbf{b})$
- disztributív: $\mathbf{a} (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \mathbf{b} + \mathbf{a} \mathbf{c}$
- pozitív definit: $\mathbf{a} \mathbf{a} = |\mathbf{a}|^2 \geq 0$ és $= 0 \Leftrightarrow \mathbf{a}$ nullvektor.

Skaláris szorzás

Definíció

Az $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$ vektorok *skaláris szorzata* $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle := |\mathbf{a}||\mathbf{b}| \cos \alpha$ SKALÁR, ahol α a két vektor által bezárt szög. Alternatív jelölés: $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = \mathbf{a}\mathbf{b}$ és $\mathbf{a}\mathbf{b} \in \mathbb{R}$

Kiszámítása koordinátákkal: Ha $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$ és $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$, akkor $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$

Tulajdonságok:

- kommutatív: $\mathbf{a}\mathbf{b} = \mathbf{b}\mathbf{a}$
- disztributív: $(\lambda \mathbf{a})\mathbf{b} = \lambda(\mathbf{a}\mathbf{b})$
- disztributív: $\mathbf{a}(\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a}\mathbf{b} + \mathbf{a}\mathbf{c}$
- pozitív definit: $\mathbf{a}\mathbf{a} = |\mathbf{a}|^2 \geq 0$ és $= 0 \Leftrightarrow \mathbf{a}$ nullvektor.

Tétel

Két vektor skaláris szorzata 0 akkor és csak akkor, ha merőlegesek.

Skaláris szorzás

Definíció

Az $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$ vektorok *skaláris szorzata* $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle := |\mathbf{a}||\mathbf{b}| \cos \alpha$ SKALÁR, ahol α a két vektor által bezárt szög. Alternatív jelölés: $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = \mathbf{a}\mathbf{b}$ és $\mathbf{a}\mathbf{b} \in \mathbb{R}$

Kiszámítása koordinátákkal: Ha $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$ és $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$, akkor $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$

Tulajdonságok:

- kommutatív: $\mathbf{a}\mathbf{b} = \mathbf{b}\mathbf{a}$
- disztributív: $(\lambda \mathbf{a})\mathbf{b} = \lambda(\mathbf{a}\mathbf{b})$
- disztributív: $\mathbf{a}(\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a}\mathbf{b} + \mathbf{a}\mathbf{c}$
- pozitív definit: $\mathbf{a}\mathbf{a} = |\mathbf{a}|^2 \geq 0$ és $= 0 \Leftrightarrow \mathbf{a}$ nullvektor.

Tétel

Két vektor skaláris szorzata 0 akkor és csak akkor, ha merőlegesek.

Biz.: $\mathbf{a}\mathbf{b} = |\mathbf{a}||\mathbf{b}| \cos \alpha = 0 \Leftrightarrow$ valamelyik tényező 0.

Skaláris szorzás

Definíció

Az $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$ vektorok *skaláris szorzata* $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle := |\mathbf{a}||\mathbf{b}| \cos \alpha$ SKALÁR, ahol α a két vektor által bezárt szög. Alternatív jelölés: $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = \mathbf{a}\mathbf{b}$ és $\mathbf{a}\mathbf{b} \in \mathbb{R}$

Kiszámítása koordinátákkal: Ha $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$ és $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$, akkor $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$

Tulajdonságok:

- kommutatív: $\mathbf{a}\mathbf{b} = \mathbf{b}\mathbf{a}$
- disztributív: $(\lambda \mathbf{a})\mathbf{b} = \lambda(\mathbf{a}\mathbf{b})$
- disztributív: $\mathbf{a}(\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a}\mathbf{b} + \mathbf{a}\mathbf{c}$
- pozitív definit: $\mathbf{a}\mathbf{a} = |\mathbf{a}|^2 \geq 0$ és $= 0 \Leftrightarrow \mathbf{a}$ nullvektor.

Tétel

Két vektor skaláris szorzata 0 akkor és csak akkor, ha merőlegesek.

Biz.: $\mathbf{a}\mathbf{b} = |\mathbf{a}||\mathbf{b}| \cos \alpha = 0 \Leftrightarrow$ valamelyik tényező 0.

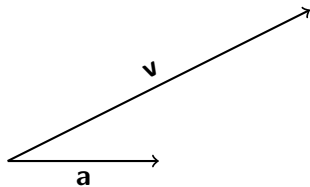
Skaláris szorzás alkalmazásai

Vektor felbontása másikkal párhuzamos és arra merőleges komponensekre:

Skaláris szorzás alkalmazásai

Vektor felbontása másikkal párhuzamos és arra merőleges komponensekre:

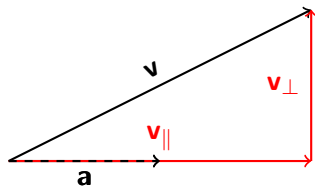
Legyen adott egy $\mathbf{v}$ vektor, amit fel szeretnénk bontani az $\mathbf{a}$ vektorral párhuzamos ($\mathbf{v}_{\parallel}$) és arra merőleges ($\mathbf{v}_{\perp}$) komponensekre: $\mathbf{v} = \mathbf{v}_{\parallel} + \mathbf{v}_{\perp}$



Skaláris szorzás alkalmazásai

Vektor felbontása másikkal párhuzamos és arra merőleges komponensekre:

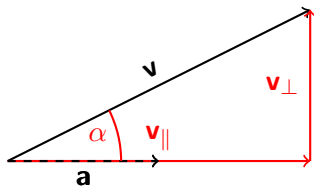
Legyen adott egy $\mathbf{v}$ vektor, amit fel szeretnénk bontani az $\mathbf{a}$ vektorral párhuzamos ($\mathbf{v}_{\parallel}$) és arra merőleges ($\mathbf{v}_{\perp}$) komponensekre: $\mathbf{v} = \mathbf{v}_{\parallel} + \mathbf{v}_{\perp}$



Skaláris szorzás alkalmazásai

Vektor felbontása másikkal párhuzamos és arra merőleges komponensekre:

Legyen adott egy $\mathbf{v}$ vektor, amit fel szeretnénk bontani az $\mathbf{a}$ vektorral párhuzamos ($\mathbf{v}_{\parallel}$) és arra merőleges ($\mathbf{v}_{\perp}$) komponensekre: $\mathbf{v} = \mathbf{v}_{\parallel} + \mathbf{v}_{\perp}$



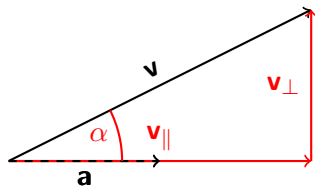
A trigonometrikus függvények definíciója alapján:

$\cos \alpha = \frac{|\mathbf{v}_{\parallel}|}{|\mathbf{v}|} \Rightarrow |\mathbf{v}_{\parallel}| = |\mathbf{v}| \cos \alpha$, vagyis megvan a hosszunk, már csak egy adott irányú egységvektor kell.

Skaláris szorzás alkalmazásai

Vektor felbontása másikkal párhuzamos és arra merőleges komponensekre:

Legyen adott egy $\mathbf{v}$ vektor, amit fel szeretnénk bontani az $\mathbf{a}$ vektorral párhuzamos ($\mathbf{v}_{\parallel}$) és arra merőleges ($\mathbf{v}_{\perp}$) komponensekre: $\mathbf{v} = \mathbf{v}_{\parallel} + \mathbf{v}_{\perp}$



A trigonometrikus függvények definíciója alapján:

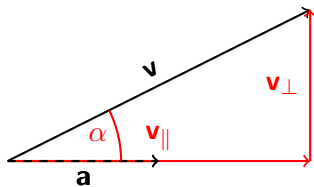
$$\cos \alpha = \frac{|\mathbf{v}_{\parallel}|}{|\mathbf{v}|} \Rightarrow |\mathbf{v}_{\parallel}| = |\mathbf{v}| \cos \alpha, \text{ vagyis megvan a hosszunk, már csak egy}$$

adott irányú egységvektor kell. Adott $\mathbf{a}$ irányú egységvektor: $\mathbf{a}_0 = \frac{1}{|\mathbf{a}|} \mathbf{a}$, amiből már megállapítható $\mathbf{v}_{\parallel}$:

Skaláris szorzás alkalmazásai

Vektor felbontása másikkal párhuzamos és arra merőleges komponensekre:

Legyen adott egy $\mathbf{v}$ vektor, amit fel szeretnénk bontani az $\mathbf{a}$ vektorral párhuzamos ($\mathbf{v}_{\parallel}$) és arra merőleges ($\mathbf{v}_{\perp}$) komponensekre: $\mathbf{v} = \mathbf{v}_{\parallel} + \mathbf{v}_{\perp}$



A trigonometrikus függvények definíciója alapján:

$$\cos \alpha = \frac{|\mathbf{v}_{\parallel}|}{|\mathbf{v}|} \Rightarrow |\mathbf{v}_{\parallel}| = |\mathbf{v}| \cos \alpha, \text{ vagyis megvan a hosszunk, már csak egy}$$

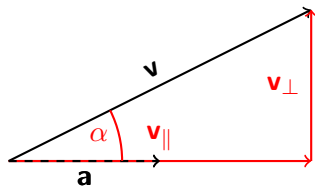
adott irányú egységvektor kell. Adott $\mathbf{a}$ irányú egységvektor: $\mathbf{a}_0 = \frac{1}{|\mathbf{a}|} \mathbf{a}$,

$$\text{amiből már megállapítható } \mathbf{v}_{\parallel} : \mathbf{v}_{\parallel} = |\mathbf{v}_{\parallel}| \mathbf{a}_0 = \frac{|\mathbf{v}| \cos \alpha}{|\mathbf{a}|} \mathbf{a} =$$

Skaláris szorzás alkalmazásai

Vektor felbontása másikkal párhuzamos és arra merőleges komponensekre:

Legyen adott egy $\mathbf{v}$ vektor, amit fel szeretnénk bontani az $\mathbf{a}$ vektorral párhuzamos ($\mathbf{v}_{\parallel}$) és arra merőleges ($\mathbf{v}_{\perp}$) komponensekre: $\mathbf{v} = \mathbf{v}_{\parallel} + \mathbf{v}_{\perp}$



A trigonometrikus függvények definíciója alapján:

$$\cos \alpha = \frac{|\mathbf{v}_{\parallel}|}{|\mathbf{v}|} \Rightarrow |\mathbf{v}_{\parallel}| = |\mathbf{v}| \cos \alpha, \text{ vagyis megvan a hosszunk, már csak egy}$$

adott irányú egységvektor kell. Adott $\mathbf{a}$ irányú egységvektor: $\mathbf{a}_0 = \frac{1}{|\mathbf{a}|} \mathbf{a}$,

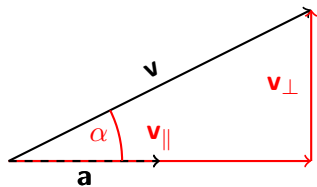
$$\text{amiből már megállapítható } \mathbf{v}_{\parallel} : \mathbf{v}_{\parallel} = |\mathbf{v}_{\parallel}| \mathbf{a}_0 = \frac{|\mathbf{v}| \cos \alpha}{|\mathbf{a}|} \mathbf{a} =$$

$$= \frac{|\mathbf{a}| |\mathbf{v}| \cos \alpha}{|\mathbf{a}|^2} \mathbf{a} \Rightarrow \mathbf{v}_{\parallel} = \frac{\langle \mathbf{a}, \mathbf{v} \rangle}{\langle \mathbf{a}, \mathbf{a} \rangle} \mathbf{a}$$

Skaláris szorzás alkalmazásai

Vektor felbontása másikkal párhuzamos és arra merőleges komponensekre:

Legyen adott egy $\mathbf{v}$ vektor, amit fel szeretnénk bontani az $\mathbf{a}$ vektorral párhuzamos ($\mathbf{v}_{\parallel}$) és arra merőleges ($\mathbf{v}_{\perp}$) komponensekre: $\mathbf{v} = \mathbf{v}_{\parallel} + \mathbf{v}_{\perp}$



A trigonometrikus függvények definíciója alapján:

$$\cos \alpha = \frac{|\mathbf{v}_{\parallel}|}{|\mathbf{v}|} \Rightarrow |\mathbf{v}_{\parallel}| = |\mathbf{v}| \cos \alpha, \text{ vagyis megvan a hosszunk, már csak egy}$$

adott irányú egységvektor kell. Adott $\mathbf{a}$ irányú egységvektor: $\mathbf{a}_0 = \frac{1}{|\mathbf{a}|} \mathbf{a}$,

$$\text{amiből már megállapítható } \mathbf{v}_{\parallel} : \mathbf{v}_{\parallel} = |\mathbf{v}_{\parallel}| \mathbf{a}_0 = \frac{|\mathbf{v}| \cos \alpha}{|\mathbf{a}|} \mathbf{a} =$$

$$= \frac{|\mathbf{a}| |\mathbf{v}| \cos \alpha}{|\mathbf{a}|^2} \mathbf{a} \Rightarrow \mathbf{v}_{\parallel} = \frac{\langle \mathbf{a}, \mathbf{v} \rangle}{\langle \mathbf{a}, \mathbf{a} \rangle} \mathbf{a}, \text{ és látható } \mathbf{v}_{\perp} = \mathbf{v} - \mathbf{v}_{\parallel} = \mathbf{v} - \frac{\langle \mathbf{a}, \mathbf{v} \rangle}{\langle \mathbf{a}, \mathbf{a} \rangle} \mathbf{a}.$$

Példa

2. példa Bontsuk fel a $\mathbf{u} = (3, 2, 1)$ vektor a $\mathbf{v} = (1, 0, -2)$ vektorral párhuzamos és arra merőleges komponensekre.

Példa

2. példa Bontsuk fel a $\mathbf{u} = (3, 2, 1)$ vektor a $\mathbf{v} = (1, 0, -2)$ vektorral párhuzamos és arra merőleges komponensekre.

Az alkalmazandó formula most: $\mathbf{u}_{\parallel} = \frac{\langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle}{\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle} \mathbf{v}$ és $\mathbf{u}_{\perp} = \mathbf{u} - \mathbf{u}_{\parallel}$

Példa

2. példa Bontsuk fel a $\mathbf{u} = (3, 2, 1)$ vektor a $\mathbf{v} = (1, 0, -2)$ vektorral párhuzamos és arra merőleges komponensekre.

Az alkalmazandó formula most: $\mathbf{u}_{\parallel} = \frac{\langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle}{\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle} \mathbf{v}$ és $\mathbf{u}_{\perp} = \mathbf{u} - \mathbf{u}_{\parallel}$

$$\mathbf{u}_{\parallel} = \frac{1 \cdot 3 + 0 \cdot 2 + (-2) \cdot 1}{1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 + (-2) \cdot (-2)} (1, 0, -2) =$$

Példa

2. példa Bontsuk fel a $\mathbf{u} = (3, 2, 1)$ vektor a $\mathbf{v} = (1, 0, -2)$ vektorral párhuzamos és arra merőleges komponensekre.

Az alkalmazandó formula most: $\mathbf{u}_{\parallel} = \frac{\langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle}{\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle} \mathbf{v}$ és $\mathbf{u}_{\perp} = \mathbf{u} - \mathbf{u}_{\parallel}$

$$\mathbf{u}_{\parallel} = \frac{1 \cdot 3 + 0 \cdot 2 + (-2) \cdot 1}{1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 + (-2) \cdot (-2)} (1, 0, -2) = \frac{1}{5} (1, 0, -2) = \left(\frac{1}{5}, 0, -\frac{2}{5} \right)$$

Példa

2. példa Bontsuk fel a $\mathbf{u} = (3, 2, 1)$ vektor a $\mathbf{v} = (1, 0, -2)$ vektorral párhuzamos és arra merőleges komponensekre.

Az alkalmazandó formula most: $\mathbf{u}_{\parallel} = \frac{\langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle}{\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle} \mathbf{v}$ és $\mathbf{u}_{\perp} = \mathbf{u} - \mathbf{u}_{\parallel}$

$$\mathbf{u}_{\parallel} = \frac{1 \cdot 3 + 0 \cdot 2 + (-2) \cdot 1}{1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 + (-2) \cdot (-2)} (1, 0, -2) = \frac{1}{5} (1, 0, -2) = \left(\frac{1}{5}, 0, -\frac{2}{5} \right)$$

$$\mathbf{u}_{\perp} = (\mathbf{u} - \mathbf{u}_{\parallel}) = (3, 2, 1) - \left(\frac{1}{5}, 0, -\frac{2}{5} \right) =$$

Példa

2. példa Bontsuk fel a $\mathbf{u} = (3, 2, 1)$ vektor a $\mathbf{v} = (1, 0, -2)$ vektorral párhuzamos és arra merőleges komponensekre.

Az alkalmazandó formula most: $\mathbf{u}_{\parallel} = \frac{\langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle}{\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle} \mathbf{v}$ és $\mathbf{u}_{\perp} = \mathbf{u} - \mathbf{u}_{\parallel}$

$$\mathbf{u}_{\parallel} = \frac{1 \cdot 3 + 0 \cdot 2 + (-2) \cdot 1}{1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 + (-2) \cdot (-2)} (1, 0, -2) = \frac{1}{5} (1, 0, -2) = \left(\frac{1}{5}, 0, -\frac{2}{5} \right)$$

$$\mathbf{u}_{\perp} = (\mathbf{u} - \mathbf{u}_{\parallel}) = (3, 2, 1) - \left(\frac{1}{5}, 0, -\frac{2}{5} \right) = \left(\frac{14}{5}, 2, \frac{7}{5} \right)$$

Példa

2. példa Bontsuk fel a $\mathbf{u} = (3, 2, 1)$ vektor a $\mathbf{v} = (1, 0, -2)$ vektorral párhuzamos és arra merőleges komponensekre.

Az alkalmazandó formula most: $\mathbf{u}_{\parallel} = \frac{\langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle}{\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle} \mathbf{v}$ és $\mathbf{u}_{\perp} = \mathbf{u} - \mathbf{u}_{\parallel}$

$$\mathbf{u}_{\parallel} = \frac{1 \cdot 3 + 0 \cdot 2 + (-2) \cdot 1}{1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 + (-2) \cdot (-2)} (1, 0, -2) = \frac{1}{5} (1, 0, -2) = \left(\frac{1}{5}, 0, -\frac{2}{5} \right)$$

$$\mathbf{u}_{\perp} = (\mathbf{u} - \mathbf{u}_{\parallel}) = (3, 2, 1) - \left(\frac{1}{5}, 0, -\frac{2}{5} \right) = \left(\frac{14}{5}, 2, \frac{7}{5} \right)$$

Ellőrzés:

$$\mathbf{u}_{\parallel} \perp \mathbf{u}_{\perp} \Leftrightarrow 0 = \langle \mathbf{u}_{\parallel}, \mathbf{u}_{\perp} \rangle = \left\langle \left(\frac{1}{5}, 0, -\frac{2}{5} \right), \left(\frac{14}{5}, 2, \frac{7}{5} \right) \right\rangle = \frac{14}{25} + 0 - \frac{14}{25} = 0$$

Példa

2. példa Bontsuk fel a $\mathbf{u} = (3, 2, 1)$ vektor a $\mathbf{v} = (1, 0, -2)$ vektorral párhuzamos és arra merőleges komponensekre.

Az alkalmazandó formula most: $\mathbf{u}_{\parallel} = \frac{\langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle}{\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle} \mathbf{v}$ és $\mathbf{u}_{\perp} = \mathbf{u} - \mathbf{u}_{\parallel}$

$$\mathbf{u}_{\parallel} = \frac{1 \cdot 3 + 0 \cdot 2 + (-2) \cdot 1}{1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 + (-2) \cdot (-2)} (1, 0, -2) = \frac{1}{5} (1, 0, -2) = \left(\frac{1}{5}, 0, -\frac{2}{5} \right)$$

$$\mathbf{u}_{\perp} = (\mathbf{u} - \mathbf{u}_{\parallel}) = (3, 2, 1) - \left(\frac{1}{5}, 0, -\frac{2}{5} \right) = \left(\frac{14}{5}, 2, \frac{7}{5} \right)$$

Ellőrzés:

$$\mathbf{u}_{\parallel} \perp \mathbf{u}_{\perp} \Leftrightarrow 0 = \langle \mathbf{u}_{\parallel}, \mathbf{u}_{\perp} \rangle = \left\langle \left(\frac{1}{5}, 0, -\frac{2}{5} \right), \left(\frac{14}{5}, 2, \frac{7}{5} \right) \right\rangle = \frac{14}{25} + 0 - \frac{14}{25} = 0$$

Két vektor szöge

Példa

2. példa Bontsuk fel a $\mathbf{u} = (3, 2, 1)$ vektor a $\mathbf{v} = (1, 0, -2)$ vektorral párhuzamos és arra merőleges komponensekre.

Az alkalmazandó formula most: $\mathbf{u}_{\parallel} = \frac{\langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle}{\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle} \mathbf{v}$ és $\mathbf{u}_{\perp} = \mathbf{u} - \mathbf{u}_{\parallel}$

$$\mathbf{u}_{\parallel} = \frac{1 \cdot 3 + 0 \cdot 2 + (-2) \cdot 1}{1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 + (-2) \cdot (-2)} (1, 0, -2) = \frac{1}{5} (1, 0, -2) = \left(\frac{1}{5}, 0, -\frac{2}{5} \right)$$

$$\mathbf{u}_{\perp} = (\mathbf{u} - \mathbf{u}_{\parallel}) = (3, 2, 1) - \left(\frac{1}{5}, 0, -\frac{2}{5} \right) = \left(\frac{14}{5}, 2, \frac{7}{5} \right)$$

Ellenőrzés:

$$\mathbf{u}_{\parallel} \perp \mathbf{u}_{\perp} \Leftrightarrow 0 = \langle \mathbf{u}_{\parallel}, \mathbf{u}_{\perp} \rangle = \left\langle \left(\frac{1}{5}, 0, -\frac{2}{5} \right), \left(\frac{14}{5}, 2, \frac{7}{5} \right) \right\rangle = \frac{14}{25} + 0 - \frac{14}{25} = 0$$

Két vektor szöge

$$\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \cos \alpha \Rightarrow \cos \alpha = \frac{\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle}{|\mathbf{a}| |\mathbf{b}|}$$

Példa

2. példa Bontsuk fel a $\mathbf{u} = (3, 2, 1)$ vektor a $\mathbf{v} = (1, 0, -2)$ vektorral párhuzamos és arra merőleges komponensekre.

Az alkalmazandó formula most: $\mathbf{u}_{\parallel} = \frac{\langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle}{\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle} \mathbf{v}$ és $\mathbf{u}_{\perp} = \mathbf{u} - \mathbf{u}_{\parallel}$

$$\mathbf{u}_{\parallel} = \frac{1 \cdot 3 + 0 \cdot 2 + (-2) \cdot 1}{1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 + (-2) \cdot (-2)} (1, 0, -2) = \frac{1}{5} (1, 0, -2) = \left(\frac{1}{5}, 0, -\frac{2}{5} \right)$$

$$\mathbf{u}_{\perp} = (\mathbf{u} - \mathbf{u}_{\parallel}) = (3, 2, 1) - \left(\frac{1}{5}, 0, -\frac{2}{5} \right) = \left(\frac{14}{5}, 2, \frac{7}{5} \right)$$

Ellenőrzés:

$$\mathbf{u}_{\parallel} \perp \mathbf{u}_{\perp} \Leftrightarrow 0 = \langle \mathbf{u}_{\parallel}, \mathbf{u}_{\perp} \rangle = \left\langle \left(\frac{1}{5}, 0, -\frac{2}{5} \right), \left(\frac{14}{5}, 2, \frac{7}{5} \right) \right\rangle = \frac{14}{25} + 0 - \frac{14}{25} = 0$$

Két vektor szöge

$$\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \cos \alpha \Rightarrow \cos \alpha = \frac{\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle}{|\mathbf{a}| |\mathbf{b}|}$$

3. példa Számítsuk ki az $\mathbf{u} = (3, 2, 1)$ és $\mathbf{v} = (1, 0, -2)$ vektorok szögét!

Példa

2. példa Bontsuk fel a $\mathbf{u} = (3, 2, 1)$ vektor a $\mathbf{v} = (1, 0, -2)$ vektorral párhuzamos és arra merőleges komponensekre.

Az alkalmazandó formula most: $\mathbf{u}_{\parallel} = \frac{\langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle}{\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle} \mathbf{v}$ és $\mathbf{u}_{\perp} = \mathbf{u} - \mathbf{u}_{\parallel}$

$$\mathbf{u}_{\parallel} = \frac{1 \cdot 3 + 0 \cdot 2 + (-2) \cdot 1}{1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 + (-2) \cdot (-2)} (1, 0, -2) = \frac{1}{5} (1, 0, -2) = \left(\frac{1}{5}, 0, -\frac{2}{5} \right)$$

$$\mathbf{u}_{\perp} = (\mathbf{u} - \mathbf{u}_{\parallel}) = (3, 2, 1) - \left(\frac{1}{5}, 0, -\frac{2}{5} \right) = \left(\frac{14}{5}, 2, \frac{7}{5} \right)$$

Ellenőrzés:

$$\mathbf{u}_{\parallel} \perp \mathbf{u}_{\perp} \Leftrightarrow 0 = \langle \mathbf{u}_{\parallel}, \mathbf{u}_{\perp} \rangle = \left\langle \left(\frac{1}{5}, 0, -\frac{2}{5} \right), \left(\frac{14}{5}, 2, \frac{7}{5} \right) \right\rangle = \frac{14}{25} + 0 - \frac{14}{25} = 0$$

Két vektor szöge

$$\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \cos \alpha \Rightarrow \cos \alpha = \frac{\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle}{|\mathbf{a}| |\mathbf{b}|}$$

3. példa Számítsuk ki az $\mathbf{u} = (3, 2, 1)$ és $\mathbf{v} = (1, 0, -2)$ vektorok szögét!

$$\cos \alpha = \frac{\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle}{|\mathbf{u}| |\mathbf{v}|} = \frac{1}{\sqrt{14} \sqrt{5}}$$

Példa

2. példa Bontsuk fel a $\mathbf{u} = (3, 2, 1)$ vektor a $\mathbf{v} = (1, 0, -2)$ vektorral párhuzamos és arra merőleges komponensekre.

Az alkalmazandó formula most: $\mathbf{u}_{\parallel} = \frac{\langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle}{\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle} \mathbf{v}$ és $\mathbf{u}_{\perp} = \mathbf{u} - \mathbf{u}_{\parallel}$

$$\mathbf{u}_{\parallel} = \frac{1 \cdot 3 + 0 \cdot 2 + (-2) \cdot 1}{1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 + (-2) \cdot (-2)} (1, 0, -2) = \frac{1}{5} (1, 0, -2) = \left(\frac{1}{5}, 0, -\frac{2}{5} \right)$$

$$\mathbf{u}_{\perp} = (\mathbf{u} - \mathbf{u}_{\parallel}) = (3, 2, 1) - \left(\frac{1}{5}, 0, -\frac{2}{5} \right) = \left(\frac{14}{5}, 2, \frac{7}{5} \right)$$

Ellőrzés:

$$\mathbf{u}_{\parallel} \perp \mathbf{u}_{\perp} \Leftrightarrow 0 = \langle \mathbf{u}_{\parallel}, \mathbf{u}_{\perp} \rangle = \left\langle \left(\frac{1}{5}, 0, -\frac{2}{5} \right), \left(\frac{14}{5}, 2, \frac{7}{5} \right) \right\rangle = \frac{14}{25} + 0 - \frac{14}{25} = 0$$

Két vektor szöge

$$\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \cos \alpha \Rightarrow \cos \alpha = \frac{\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle}{|\mathbf{a}| |\mathbf{b}|}$$

3. példa Számítsuk ki az $\mathbf{u} = (3, 2, 1)$ és $\mathbf{v} = (1, 0, -2)$ vektorok szögét!

$$\cos \alpha = \frac{\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle}{|\mathbf{u}| |\mathbf{v}|} = \frac{1}{\sqrt{14} \sqrt{5}} \Rightarrow \alpha = \arccos \left(\frac{1}{\sqrt{70}} \right) \approx 83,135^\circ$$

Vektoriális (kereszt)szorzás

A skaláris szorzással ellentétben itt az eredmény egy VEKTOR és ez a művelet csak CSAK $\mathbb{R}^3$ -ben van definiálva.

Definíció

Az $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$ vektorok *vektoriális szorzata* $\mathbf{a} \times \mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$, ha

- $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = |\mathbf{a}||\mathbf{b}| \sin \alpha$, ahol α $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ által bezárt szög,

Vektoriális (kereszt)szorzás

A skaláris szorzással ellentétben itt az eredmény egy VEKTOR és ez a művelet csak CSAK $\mathbb{R}^3$ -ben van definiálva.

Definíció

Az $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$ vektorok *vektoriális szorzata* $\mathbf{a} \times \mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$, ha

- $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = |\mathbf{a}||\mathbf{b}| \sin \alpha$, ahol α $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ által bezárt szög,
- $\mathbf{a} \times \mathbf{b} \perp \mathbf{a}, \mathbf{b}$,

Vektoriális (kereszt)szorzás

A skaláris szorzással ellentétben itt az eredmény egy VEKTOR és ez a művelet csak CSAK $\mathbb{R}^3$ -ben van definiálva.

Definíció

Az $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$ vektorok *vektoriális szorzata* $\mathbf{a} \times \mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$, ha

- $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = |\mathbf{a}||\mathbf{b}| \sin \alpha$, ahol α $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ által bezárt szög,
- $\mathbf{a} \times \mathbf{b} \perp \mathbf{a}, \mathbf{b}$,
- $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ és $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ ebben a sorrendben jobbsodrású rendszert alkot.

Vektoriális (kereszt)szorzás

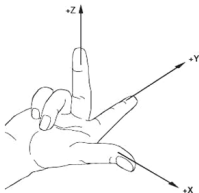
A skaláris szorzással ellentétben itt az eredmény egy VEKTOR és ez a művelet csak CSAK $\mathbb{R}^3$ -ben van definiálva.

Definíció

Az $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$ vektorok *vektoriális szorzata* $\mathbf{a} \times \mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$, ha

- $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = |\mathbf{a}||\mathbf{b}| \sin \alpha$, ahol α $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ által bezárt szög,
- $\mathbf{a} \times \mathbf{b} \perp \mathbf{a}, \mathbf{b}$,
- $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ és $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ ebben a sorrendben jobbsodrású rendszert alkot.

Jobbsodrású rendszer: Az $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ és $\mathbf{z}$ vektorok jobbsodrású rendszert alkotnak, ha:



Vektoriális szorzás tulajdonságai

- antikommutatív: $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -(\mathbf{b} \times \mathbf{a})$

Vektoriális szorzás tulajdonságai

- antikommutatív: $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -(\mathbf{b} \times \mathbf{a})$
- lineáris: $\lambda(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = (\lambda\mathbf{a}) \times \mathbf{b} = \mathbf{a} \times (\lambda\mathbf{b})$

Vektoriális szorzás tulajdonságai

- antikommutatív: $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -(\mathbf{b} \times \mathbf{a})$
- lineáris: $\lambda(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = (\lambda\mathbf{a}) \times \mathbf{b} = \mathbf{a} \times (\lambda\mathbf{b})$
- disztributív: $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \times \mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{c} + \mathbf{b} \times \mathbf{c}$
- disztributív: $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \times \mathbf{b} + \mathbf{a} \times \mathbf{c}$

Vektoriális szorzás tulajdonságai

- antikommutatív: $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -(\mathbf{b} \times \mathbf{a})$
- lineáris: $\lambda(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = (\lambda\mathbf{a}) \times \mathbf{b} = \mathbf{a} \times (\lambda\mathbf{b})$
- disztributív: $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \times \mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{c} + \mathbf{b} \times \mathbf{c}$
- disztributív: $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \times \mathbf{b} + \mathbf{a} \times \mathbf{c}$

Tétel

$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{0}$ akkor és csak akkor, ha $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ párhuzamosak.

Vektoriális szorzás tulajdonságai

- antikommutatív: $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -(\mathbf{b} \times \mathbf{a})$
- lineáris: $\lambda(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = (\lambda\mathbf{a}) \times \mathbf{b} = \mathbf{a} \times (\lambda\mathbf{b})$
- disztributív: $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \times \mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{c} + \mathbf{b} \times \mathbf{c}$
- disztributív: $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \times \mathbf{b} + \mathbf{a} \times \mathbf{c}$

Tétel

$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{0}$ akkor és csak akkor, ha $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ párhuzamosak.

Geometriai jelentés: Két vektor vektoriális szorzatának nagysága megadja a felfeszített paralelogramma területét.

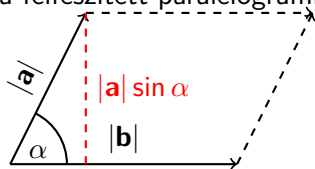
Vektoriális szorzás tulajdonságai

- antikommutatív: $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -(\mathbf{b} \times \mathbf{a})$
- lineáris: $\lambda(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = (\lambda\mathbf{a}) \times \mathbf{b} = \mathbf{a} \times (\lambda\mathbf{b})$
- disztributív: $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \times \mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{c} + \mathbf{b} \times \mathbf{c}$
- disztributív: $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \times \mathbf{b} + \mathbf{a} \times \mathbf{c}$

Tétel

$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = 0$ akkor és csak akkor, ha $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ párhuzamosak.

Geometriai jelentés: Két vektor vektoriális szorzatának nagysága megadja a felfeszített paralelogramma területét.



$$T = \text{alap} \cdot \text{magasság} = |\mathbf{b}| |\mathbf{a}| \sin \alpha = |\mathbf{a} \times \mathbf{b}|$$

Vektoriális szorzás kiszámítása koordinátákkal

Sarrus-szabály: Legyen $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$ és $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$ vektorok. Ekkor

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} =$$

Vektoriális szorzás kiszámítása koordinátákkal

Sarrus-szabály: Legyen $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$ és $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$ vektorok. Ekkor

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

Vektoriális szorzás kiszámítása koordinátákkal

Sarrus-szabály: Legyen $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$ és $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$ vektorok. Ekkor

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} \\ a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}$$

Vektoriális szorzás kiszámítása koordinátákkal

Sarrus-szabály: Legyen $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$ és $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$ vektorok. Ekkor

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} \\ a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}$$

Vektoriális szorzás kiszámítása koordinátákkal

Sarrus-szabály: Legyen $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$ és $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$ vektorok. Ekkor

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} \\ a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = a_2 b_3 \mathbf{i} + a_3 b_1 \mathbf{j} + a_1 b_2 \mathbf{k}$$

Vektoriális szorzás kiszámítása koordinátákkal

Sarrus-szabály: Legyen $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$ és $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$ vektorok. Ekkor

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = a_2 b_3 \mathbf{i} + a_3 b_1 \mathbf{j} + a_1 b_2 \mathbf{k}$$

Vektoriális szorzás kiszámítása koordinátákkal

Sarrus-szabály: Legyen $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$ és $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$ vektorok. Ekkor

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} \\ a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = a_2 b_3 \mathbf{i} + a_3 b_1 \mathbf{j} + a_1 b_2 \mathbf{k} - (a_2 b_1 \mathbf{k} + a_3 b_2 \mathbf{i} + a_1 b_3 \mathbf{j})$$

Vektoriális szorzás kiszámítása koordinátákkal

Sarrus-szabály: Legyen $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$ és $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$ vektorok. Ekkor

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} \\ a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = a_2 b_3 \mathbf{i} + a_3 b_1 \mathbf{j} + a_1 b_2 \mathbf{k} - (a_2 b_1 \mathbf{k} + a_3 b_2 \mathbf{i} + a_1 b_3 \mathbf{j})$$

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}$$

Vektoriális szorzás kiszámítása koordinátákkal

Sarrus-szabály: Legyen $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$ és $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$ vektorok. Ekkor

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} \\ a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = a_2 b_3 \mathbf{i} + a_3 b_1 \mathbf{j} + a_1 b_2 \mathbf{k} - (a_2 b_1 \mathbf{k} + a_3 b_2 \mathbf{i} + a_1 b_3 \mathbf{j})$$

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}$$

4. példa Számítsuk ki az $\mathbf{u} = (3, 2, 1)$ és $\mathbf{v} = (1, 0, -2)$ vektorok vektoriális szorzatát.

Vektoriális szorzás kiszámítása koordinátákkal

Sarrus-szabály: Legyen $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$ és $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$ vektorok. Ekkor

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} \\ a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = a_2 b_3 \mathbf{i} + a_3 b_1 \mathbf{j} + a_1 b_2 \mathbf{k} - (a_2 b_1 \mathbf{k} + a_3 b_2 \mathbf{i} + a_1 b_3 \mathbf{j})$$

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}$$

4. példa Számítsuk ki az $\mathbf{u} = (3, 2, 1)$ és $\mathbf{v} = (1, 0, -2)$ vektorok vektoriális szorzatát.

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{vmatrix}$$

Vektoriális szorzás kiszámítása koordinátákkal

Sarrus-szabály: Legyen $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$ és $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$ vektorok. Ekkor

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} \\ a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = a_2 b_3 \mathbf{i} + a_3 b_1 \mathbf{j} + a_1 b_2 \mathbf{k} - (a_2 b_1 \mathbf{k} + a_3 b_2 \mathbf{i} + a_1 b_3 \mathbf{j})$$

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}$$

4. példa Számítsuk ki az $\mathbf{u} = (3, 2, 1)$ és $\mathbf{v} = (1, 0, -2)$ vektorok vektoriális szorzatát.

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} \\ 3 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}$$

Vektoriális szorzás kiszámítása koordinátákkal

Sarrus-szabály: Legyen $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$ és $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$ vektorok. Ekkor

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} \\ a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = a_2 b_3 \mathbf{i} + a_3 b_1 \mathbf{j} + a_1 b_2 \mathbf{k} - (a_2 b_1 \mathbf{k} + a_3 b_2 \mathbf{i} + a_1 b_3 \mathbf{j})$$

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}$$

4. példa Számítsuk ki az $\mathbf{u} = (3, 2, 1)$ és $\mathbf{v} = (1, 0, -2)$ vektorok vektoriális szorzatát.

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} \\ 3 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}$$

Vektoriális szorzás kiszámítása koordinátákkal

Sarrus-szabály: Legyen $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$ és $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$ vektorok. Ekkor

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} \\ a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = a_2 b_3 \mathbf{i} + a_3 b_1 \mathbf{j} + a_1 b_2 \mathbf{k} - (a_2 b_1 \mathbf{k} + a_3 b_2 \mathbf{i} + a_1 b_3 \mathbf{j})$$

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}$$

4. példa Számítsuk ki az $\mathbf{u} = (3, 2, 1)$ és $\mathbf{v} = (1, 0, -2)$ vektorok vektoriális szorzatát.

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} \\ 3 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -4\mathbf{i} + 1\mathbf{j} + 0\mathbf{k}$$

Vektoriális szorzás kiszámítása koordinátákkal

Sarrus-szabály: Legyen $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$ és $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$ vektorok. Ekkor

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} \\ a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = a_2 b_3 \mathbf{i} + a_3 b_1 \mathbf{j} + a_1 b_2 \mathbf{k} - (a_2 b_1 \mathbf{k} + a_3 b_2 \mathbf{i} + a_1 b_3 \mathbf{j})$$

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}$$

4. példa Számítsuk ki az $\mathbf{u} = (3, 2, 1)$ és $\mathbf{v} = (1, 0, -2)$ vektorok vektoriális szorzatát.

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} \\ 3 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -4\mathbf{i} + 1\mathbf{j} + 0\mathbf{k}$$

Vektoriális szorzás kiszámítása koordinátákkal

Sarrus-szabály: Legyen $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$ és $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$ vektorok. Ekkor

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} \\ a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = a_2 b_3 \mathbf{i} + a_3 b_1 \mathbf{j} + a_1 b_2 \mathbf{k} - (a_2 b_1 \mathbf{k} + a_3 b_2 \mathbf{i} + a_1 b_3 \mathbf{j})$$

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}$$

4. példa Számítsuk ki az $\mathbf{u} = (3, 2, 1)$ és $\mathbf{v} = (1, 0, -2)$ vektorok vektoriális szorzatát.

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} \\ 3 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -4\mathbf{i} + 1\mathbf{j} + 0\mathbf{k} - (2\mathbf{k} + 0\mathbf{i} - 6\mathbf{j})$$

Vektoriális szorzás kiszámítása koordinátákkal

Sarrus-szabály: Legyen $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$ és $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$ vektorok. Ekkor

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} \\ a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = a_2 b_3 \mathbf{i} + a_3 b_1 \mathbf{j} + a_1 b_2 \mathbf{k} - (a_2 b_1 \mathbf{k} + a_3 b_2 \mathbf{i} + a_1 b_3 \mathbf{j})$$

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}$$

4. példa Számítsuk ki az $\mathbf{u} = (3, 2, 1)$ és $\mathbf{v} = (1, 0, -2)$ vektorok vektoriális szorzatát.

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{vmatrix} = -4\mathbf{i} + 1\mathbf{j} - 2\mathbf{k} + 6\mathbf{j} = \begin{pmatrix} -4 \\ 7 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Vegyes szorzat

Három vektort szorzunk össze úgy, hogy a végeredmény egy SKALÁR.

Definíció

Legyen $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ és $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^3$ vektorok. Ekkor a három vektor **vegyes szorzatán** az $\mathbf{abc} := \langle \mathbf{a} \times \mathbf{b}, \mathbf{c} \rangle$ (előbb vektoriális, majd skaláris szorzás) számot értjük.

Vegyes szorzat

Három vektort szorzunk össze úgy, hogy a végeredmény egy SKALÁR.

Definíció

Legyen $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ és $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^3$ vektorok. Ekkor a három vektor *vegyes szorzatán* az $\mathbf{abc} := \langle \mathbf{a} \times \mathbf{b}, \mathbf{c} \rangle$ (előbb vektoriális, majd skaláris szorzás) számot értjük.

Tulajdonságok:

- antikommutatív: $\mathbf{abc} = -\mathbf{acb}$ és $\mathbf{abc} = -\mathbf{bac}$

Vegyes szorzat

Három vektort szorzunk össze úgy, hogy a végeredmény egy SKALÁR.

Definíció

Legyen $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ és $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^3$ vektorok. Ekkor a három vektor *vegyes szorzatán* az $\mathbf{abc} := \langle \mathbf{a} \times \mathbf{b}, \mathbf{c} \rangle$ (előbb vektoriális, majd skaláris szorzás) számot értjük.

Tulajdonságok:

- antikommutatív: $\mathbf{abc} = -\mathbf{acb}$ és $\mathbf{abc} = -\mathbf{bac}$
- ciklikus: $\mathbf{abc} = \mathbf{bca} = \mathbf{cab}$

Vegyes szorzat

Három vektort szorzunk össze úgy, hogy a végeredmény egy SKALÁR.

Definíció

Legyen $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ és $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^3$ vektorok. Ekkor a három vektor **vegyes szorzatán** az $\mathbf{abc} := \langle \mathbf{a} \times \mathbf{b}, \mathbf{c} \rangle$ (előbb vektoriális, majd skaláris szorzás) számot értjük.

Tulajdonságok:

- antikommutatív: $\mathbf{abc} = -\mathbf{acb}$ és $\mathbf{abc} = -\mathbf{bac}$
- ciklikus: $\mathbf{abc} = \mathbf{bca} = \mathbf{cab}$

Geometriai jelentés: Három vektor vegyes szorzata megadja a felfeszített paralelepipedon előjeles térfogatát.

Vegyes szorzat

Három vektort szorzunk össze úgy, hogy a végeredmény egy SKALÁR.

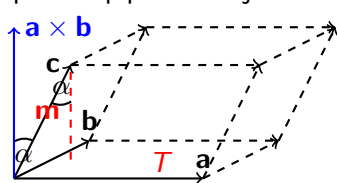
Definíció

Legyen $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ és $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^3$ vektorok. Ekkor a három vektor **vegyes szorzatán** az $\mathbf{abc} := \langle \mathbf{a} \times \mathbf{b}, \mathbf{c} \rangle$ (előbb vektoriális, majd skaláris szorzás) számot értjük.

Tulajdonságok:

- antikommutatív: $\mathbf{abc} = -\mathbf{acb}$ és $\mathbf{abc} = -\mathbf{bac}$
- ciklikus: $\mathbf{abc} = \mathbf{bca} = \mathbf{cab}$

Geometriai jelentés: Három vektor vegyes szorzata megadja a felfeszített paralelepipedon előjeles térfogatát.



$$V = \text{alap} \cdot \text{magasság} = T \cdot m$$

$$T = |\mathbf{a} \times \mathbf{b}| \text{ és } m = |\mathbf{c}| \cos \alpha$$

$$V = T \cdot m = |\mathbf{a} \times \mathbf{b}| |\mathbf{c}| \cos \alpha = \langle \mathbf{a} \times \mathbf{b}, \mathbf{c} \rangle = \mathbf{abc}$$

Ha $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ és $\mathbf{c}$ nem jobbrendszer, akkor $\mathbf{abc} < 0$, ezért az $|\cdot|$ használata javasolt: $V = |\mathbf{abc}|$

Vegyes szorzás koordinátákkal

Legyen $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$ és $\mathbf{c} = (c_1, c_2, c_3)$ vektorok. Ekkor az $\mathbf{abc}$ vegyes szorzatot az $\langle \mathbf{a} \times \mathbf{b}, \mathbf{c} \rangle = \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \times \mathbf{c} \rangle$ alapján:

$$\mathbf{abc} = \left\langle \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \right\rangle$$

Vegyes szorzás koordinátákkal

Legyen $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$ és $\mathbf{c} = (c_1, c_2, c_3)$ vektorok. Ekkor az $\mathbf{abc}$ vegyes szorzatot az $\langle \mathbf{a} \times \mathbf{b}, \mathbf{c} \rangle = \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \times \mathbf{c} \rangle$ alapján:

$$\mathbf{abc} = \left\langle \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \right\rangle$$

Ekkor viszont a skaláris és vektoriális szorzás definíciói alapján a_1 -el van szorozva minden, ami a vektoriális szorzatban $\mathbf{i}$ -vel, a_2 -vel, ami $\mathbf{j}$ -vel és a_3 -al, ami $\mathbf{k}$ -val.

Vegyes szorzás koordinátákkal

Legyen $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$ és $\mathbf{c} = (c_1, c_2, c_3)$ vektorok. Ekkor az $\mathbf{abc}$ vegyes szorzatot az $\langle \mathbf{a} \times \mathbf{b}, \mathbf{c} \rangle = \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \times \mathbf{c} \rangle$ alapján:

$$\mathbf{abc} = \left\langle \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \right\rangle$$

Ekkor viszont a skaláris és vektoriális szorzás definíciói alapján a_1 -el van szorozva minden, ami a vektoriális szorzatban $\mathbf{i}$ -vel, a_2 -vel, ami $\mathbf{j}$ -vel és a_3 -al, ami $\mathbf{k}$ -val. Ezért akár az $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ -t ki is cserélhetjük a_1, a_2, a_3 -ra:

$$\mathbf{abc} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 b_2 c_3 + a_2 b_3 c_1 + a_3 b_1 c_2 - a_3 b_2 c_1 - a_1 b_3 c_2 - a_2 b_1 c_3$$

Példa

5. példa Számítsuk ki az $\mathbf{a} = (1, 2, 3)$, $\mathbf{b} = (1, 0, -2)$ és $\mathbf{c} = (3, -2, 1)$ vektorok vegyes szorzatát.

Példa

5. példa Számítsuk ki az $\mathbf{a} = (1, 2, 3)$, $\mathbf{b} = (1, 0, -2)$ és $\mathbf{c} = (3, -2, 1)$ vektorok vegyes szorzatát.

Az előzőek alapján:

$$\mathbf{abc} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & -2 \\ 3 & -2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & -2 \\ 3 & -2 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} =$$

Példa

5. példa Számítsuk ki az $\mathbf{a} = (1, 2, 3)$, $\mathbf{b} = (1, 0, -2)$ és $\mathbf{c} = (3, -2, 1)$ vektorok vegyes szorzatát.

Az előzőek alapján:

$$\mathbf{abc} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & -2 \\ 3 & -2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & -2 \\ 3 & -2 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} =$$

$$= 1 \cdot 0 \cdot 1 + 2 \cdot (-2) \cdot 3 + 3 \cdot 1 \cdot (-2) - 3 \cdot 0 \cdot 3 - 1 \cdot (-2) \cdot (-2) - 2 \cdot 1 \cdot 1 =$$

Példa

5. példa Számítsuk ki az $\mathbf{a} = (1, 2, 3)$, $\mathbf{b} = (1, 0, -2)$ és $\mathbf{c} = (3, -2, 1)$ vektorok vegyes szorzatát.

Az előzőek alapján:

$$\mathbf{abc} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & -2 \\ 3 & -2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & -2 \\ 3 & -2 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} =$$

$$= 1 \cdot 0 \cdot 1 + 2 \cdot (-2) \cdot 3 + 3 \cdot 1 \cdot (-2) - 3 \cdot 0 \cdot 3 - 1 \cdot (-2) \cdot (-2) - 2 \cdot 1 \cdot 1 =$$

$$= 0 - 12 - 6 - 0 - 4 - 2 = -24$$

Sík egyenlete

Kérdés: Milyen $\mathbf{v} = (x, y, z)$ vektorok lesznek merőlegesek egy adott $\mathbf{n} = (n_1, n_2, n_3)$ vektorra?

Sík egyenlete

Kérdés: Milyen $\mathbf{v} = (x, y, z)$ vektorok lesznek merőlegesek egy adott $\mathbf{n} = (n_1, n_2, n_3)$ vektorra?

Válasz: Két vektor pontosan akkor merőleges egymásra, ha a skaláris szorzatuk nulla, tehát $\langle \mathbf{v}, \mathbf{n} \rangle = n_1x + n_2y + n_3z = 0$

Sík egyenlete

Kérdés: Milyen $\mathbf{v} = (x, y, z)$ vektorok lesznek merőlegesek egy adott $\mathbf{n} = (n_1, n_2, n_3)$ vektorra?

Válasz: Két vektor pontosan akkor merőleges egymásra, ha a skaláris szorzatuk nulla, tehát $\langle \mathbf{v}, \mathbf{n} \rangle = n_1x + n_2y + n_3z = 0$

Kérdés: Mi azon pontok mértani helye a térben, melyekbe az origóból mutató vektor merőleges egy adott vektorra?

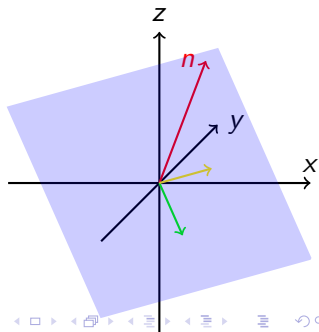
Sík egyenlete

Kérdés: Milyen $\mathbf{v} = (x, y, z)$ vektorok lesznek merőlegesek egy adott $\mathbf{n} = (n_1, n_2, n_3)$ vektorra?

Válasz: Két vektor pontosan akkor merőleges egymásra, ha a skaláris szorzatuk nulla, tehát $\langle \mathbf{v}, \mathbf{n} \rangle = n_1x + n_2y + n_3z = 0$

Kérdés: Mi azon pontok mértani helye a térben, melyekbe az origóból mutató vektor merőleges egy adott vektorra?

Válasz: Ezen pontok egy olyan origón átmenő síkot határoznak meg, mely merőleges az adott vektorra.



Sík egyenlete

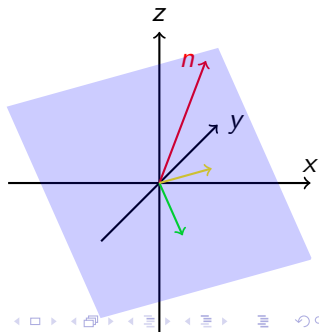
Kérdés: Milyen $\mathbf{v} = (x, y, z)$ vektorok lesznek merőlegesek egy adott $\mathbf{n} = (n_1, n_2, n_3)$ vektorra?

Válasz: Két vektor pontosan akkor merőleges egymásra, ha a skaláris szorzatuk nulla, tehát $\langle \mathbf{v}, \mathbf{n} \rangle = n_1x + n_2y + n_3z = 0$

Kérdés: Mi azon pontok mértani helye a térben, melyekbe az origóból mutató vektor merőleges egy adott vektorra?

Válasz: Ezen pontok egy olyan origón átmenő síkot határoznak meg, mely merőleges az adott vektorra.

Kérdés: Hogyan írjuk fel olyan sík egyenletét, ami nem az origón megy át, hanem a $P_0(x_0, y_0, z_0)$ ponton?



Sík egyenlete

Kérdés: Milyen $\mathbf{v} = (x, y, z)$ vektorok lesznek merőlegesek egy adott $\mathbf{n} = (n_1, n_2, n_3)$ vektorra?

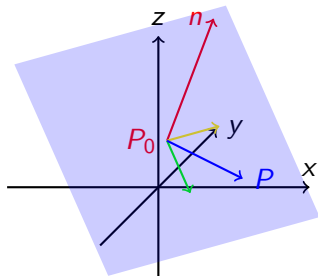
Válasz: Két vektor pontosan akkor merőleges egymásra, ha a skaláris szorzatuk nulla, tehát $\langle \mathbf{v}, \mathbf{n} \rangle = n_1x + n_2y + n_3z = 0$

Kérdés: Mi azon pontok mértani helye a térben, melyekbe az origóból mutató vektor merőleges egy adott vektorra?

Válasz: Ezen pontok egy olyan origón átmenő síkot határoznak meg, mely merőleges az adott vektorra.

Kérdés: Hogyan írjuk fel olyan sík egyenletét, ami nem az origón megy át, hanem a $P_0(x_0, y_0, z_0)$ ponton?

Válasz: Akkor a $\overrightarrow{P_0P}$ vektornak merőlegesnek kell lennie $\mathbf{n}$ -re, ahol $P(x, y, z)$: $\langle \overrightarrow{P_0P}, \mathbf{n} \rangle = 0$
 $n_1(x - x_0) + n_2(y - y_0) + n_3(z - z_0) = 0$



Sík egyenlete

Kérdés: Milyen $\mathbf{v} = (x, y, z)$ vektorok lesznek merőlegesek egy adott $\mathbf{n} = (n_1, n_2, n_3)$ vektorra?

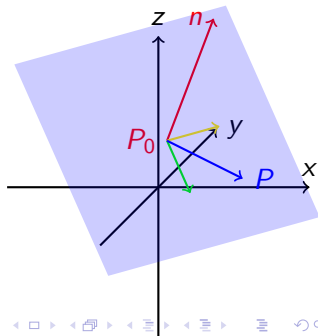
Válasz: Két vektor pontosan akkor merőleges egymásra, ha a skaláris szorzatuk nulla, tehát $\langle \mathbf{v}, \mathbf{n} \rangle = n_1x + n_2y + n_3z = 0$

Kérdés: Mi azon pontok mértani helye a térben, melyekbe az origóból mutató vektor merőleges egy adott vektorra?

Válasz: Ezen pontok egy olyan origón átmenő síkot határoznak meg, mely merőleges az adott vektorra.

Kérdés: Hogyan írjuk fel olyan sík egyenletét, ami nem az origón megy át, hanem a $P_0(x_0, y_0, z_0)$ ponton?

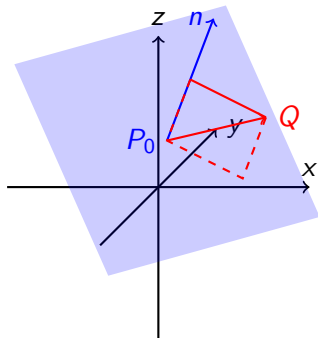
Válasz: Akkor a $\overrightarrow{P_0P}$ vektornak merőlegesnek kell lennie $\mathbf{n}$ -re, ahol $P(x, y, z)$: $\langle \overrightarrow{P_0P}, \mathbf{n} \rangle = 0$
 $n_1x + n_2y + n_3z = n_1x_0 + n_2y_0 + n_3z_0 := d$



Pont és sík távolsága

Kérdés: Hogyan állapítjuk meg egy pont és egy sík távolságát? **Válasz:** Ha jól megnézzük az ábrát, látható, hogy a pont és sík távolsága megegyezik a $\overrightarrow{P_0Q}$ vektor $\mathbf{n}$ irányával párhuzamos komponensének hosszával, azaz $d = |\overrightarrow{P_0Q}| \cos \phi$, ahol ϕ az $\mathbf{n}$ és a $\overrightarrow{P_0Q}$ vektorok szöge, tehát $d = |\overrightarrow{P_0Q}| \cos \phi =$

$$\frac{|\mathbf{n}| |\overrightarrow{P_0Q}| \cos \phi}{|\mathbf{n}|} = \frac{\langle \mathbf{n}, \overrightarrow{P_0Q} \rangle}{|\mathbf{n}|}$$

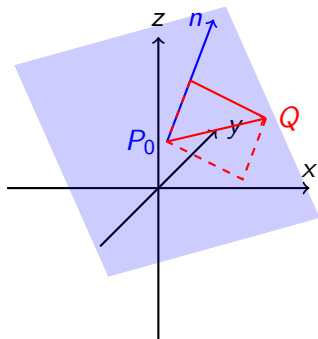


Pont és sík távolsága

Kérdés: Hogyan állapítjuk meg egy pont és egy sík távolságát? **Válasz:** Ha jól megnézzük az ábrát, látható, hogy a pont és sík távolsága megegyezik a $\overrightarrow{P_0Q}$ vektor $\mathbf{n}$ irányával párhuzamos komponensének hosszával, azaz $d = |\overrightarrow{P_0Q}| \cos \phi$, ahol ϕ az $\mathbf{n}$ és a $\overrightarrow{P_0Q}$ vektorok szöge, tehát $d = |\overrightarrow{P_0Q}| \cos \phi =$

$$\frac{|\mathbf{n}| |\overrightarrow{P_0Q}| \cos \phi}{|\mathbf{n}|} = \frac{\langle \mathbf{n}, \overrightarrow{P_0Q} \rangle}{|\mathbf{n}|}$$

De ez csak annyiban különbözik a sík egyenletétől, hogy (x, y, z) helyett (q_1, q_2, q_3) -at kell írunk és az egész le van osztva $\mathbf{n}$ hosszával.



Pont és sík távolsága

Kérdés: Hogyan állapítjuk meg egy pont és egy sík távolságát? **Válasz:** Ha jól megnézzük az ábrát, látható, hogy a pont és sík távolsága megegyezik a $\overrightarrow{P_0Q}$ vektor $\mathbf{n}$ irányával párhuzamos komponensének hosszával, azaz $d = |\overrightarrow{P_0Q}| \cos \phi$, ahol ϕ az $\mathbf{n}$ és a $\overrightarrow{P_0Q}$ vektorok szöge, tehát $d = |\overrightarrow{P_0Q}| \cos \phi =$

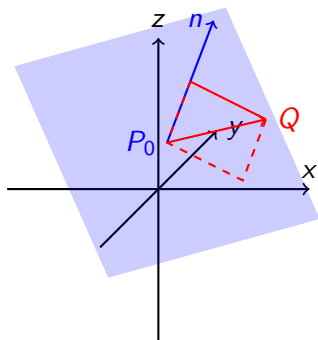
$$\frac{|\mathbf{n}| |\overrightarrow{P_0Q}| \cos \phi}{|\mathbf{n}|} = \frac{\langle \mathbf{n}, \overrightarrow{P_0Q} \rangle}{|\mathbf{n}|}$$

De ez csak annyiban különbözik a sík egyenletétől, hogy (x, y, z) helyett (q_1, q_2, q_3) -at kell írunk és az egész le van osztva $\mathbf{n}$ hosszával.

Definíció

Az $\mathbf{n} = (n_1, n_2, n_3)$ normálvektorú, $P_0(x_0, y_0, z_0)$ ponton átmenő sík

Hesse-fél alakja: $\frac{n_1x + n_2y + n_3z - d}{\sqrt{n_1^2 + n_2^2 + n_3^2}} = 0$, ahol $d = n_1x_0 + n_2y_0 + n_3z_0$.



Példa

6. példa Írjuk fel annak az α síknak az egyenletét Hesse alakban, mely merőleges az $\mathbf{n} = (2, 2, -1)$ vektorra és átmegy a $P_0(1, 3, 5)$ ponton. Adjuk meg a $Q(1, 0, 2)$ pont távolságát a síktól.

Példa

6. példa Írjuk fel annak az α síknak az egyenletét Hesse alakban, mely merőleges az $\mathbf{n} = (2, 2, -1)$ vektorra és átmegy a $P_0(1, 3, 5)$ ponton.

Adjuk meg a $Q(1, 0, 2)$ pont távolságát a síktól.

A sík egyenlete felírható:

$$n_1x + n_2y + n_3z = n_1x_0 + n_2y_0 + n_3z_0 \Rightarrow 2x + 2y - z = 2 + 6 - 5 = 3$$

Példa

6. példa Írjuk fel annak az α síknak az egyenletét Hesse alakban, mely merőleges az $\mathbf{n} = (2, 2, -1)$ vektorra és átmegy a $P_0(1, 3, 5)$ ponton.

Adjuk meg a $Q(1, 0, 2)$ pont távolságát a síktól.

A sík egyenlete felírható:

$$n_1x + n_2y + n_3z = n_1x_0 + n_2y_0 + n_3z_0 \Rightarrow 2x + 2y - z = 2 + 6 - 5 = 3$$

Mivel $|\mathbf{n}| = \sqrt{2^2 + 2^2 + (-1)^2} = \sqrt{9} = 3$, ezért a sík Hesse alakban:

$$\alpha : \frac{2}{3}x + \frac{2}{3}y - \frac{1}{3}z - 1 = 0$$

Példa

6. példa Írjuk fel annak az α síknak az egyenletét Hesse alakban, mely merőleges az $\mathbf{n} = (2, 2, -1)$ vektorra és átmegy a $P_0(1, 3, 5)$ ponton.

Adjuk meg a $Q(1, 0, 2)$ pont távolságát a síktól.

A sík egyenlete felírható:

$$n_1x + n_2y + n_3z = n_1x_0 + n_2y_0 + n_3z_0 \Rightarrow 2x + 2y - z = 2 + 6 - 5 = 3$$

Mivel $|\mathbf{n}| = \sqrt{2^2 + 2^2 + (-1)^2} = \sqrt{9} = 3$, ezért a sík Hesse alakban:

$$\alpha : \frac{2}{3}x + \frac{2}{3}y - \frac{1}{3}z - 1 = 0$$

$$\text{Így kiszámolható, hogy } d(\alpha, Q) = \left| \frac{2}{3} \cdot 1 + \frac{2}{3} \cdot 0 - \frac{1}{3} \cdot 2 - 1 \right| = 1$$

Példa

6. példa Írjuk fel annak az α síknak az egyenletét Hesse alakban, mely merőleges az $\mathbf{n} = (2, 2, -1)$ vektorra és átmegy a $P_0(1, 3, 5)$ ponton.

Adjuk meg a $Q(1, 0, 2)$ pont távolságát a síktól.

A sík egyenlete felírható:

$$n_1x + n_2y + n_3z = n_1x_0 + n_2y_0 + n_3z_0 \Rightarrow 2x + 2y - z = 2 + 6 - 5 = 3$$

Mivel $|\mathbf{n}| = \sqrt{2^2 + 2^2 + (-1)^2} = \sqrt{9} = 3$, ezért a sík Hesse alakban:

$$\alpha: \frac{2}{3}x + \frac{2}{3}y - \frac{1}{3}z - 1 = 0$$

Így kiszámolható, hogy $d(\alpha, Q) = \left| \frac{2}{3} \cdot 1 + \frac{2}{3} \cdot 0 - \frac{1}{3} \cdot 2 - 1 \right| = 1$

7. példa Írjuk fel annak a β síknak az egyenletét, mely párhuzamos a $\mathbf{v}_1 = (3, 2, 1)$ -el és $\mathbf{v}_2 = (1, 0, -2)$ -vel és illeszkedik a $P_0(1, 0, -1)$ -ra.

Példa

6. példa Írjuk fel annak az α síknak az egyenletét Hesse alakban, mely merőleges az $\mathbf{n} = (2, 2, -1)$ vektorra és átmegy a $P_0(1, 3, 5)$ ponton.

Adjuk meg a $Q(1, 0, 2)$ pont távolságát a síktól.

A sík egyenlete felírható:

$$n_1x + n_2y + n_3z = n_1x_0 + n_2y_0 + n_3z_0 \Rightarrow 2x + 2y - z = 2 + 6 - 5 = 3$$

Mivel $|\mathbf{n}| = \sqrt{2^2 + 2^2 + (-1)^2} = \sqrt{9} = 3$, ezért a sík Hesse alakban:

$$\alpha: \frac{2}{3}x + \frac{2}{3}y - \frac{1}{3}z - 1 = 0$$

$$\text{Így kiszámolható, hogy } d(\alpha, Q) = \left| \frac{2}{3} \cdot 1 + \frac{2}{3} \cdot 0 - \frac{1}{3} \cdot 2 - 1 \right| = 1$$

7. példa Írjuk fel annak a β síknak az egyenletét, mely párhuzamos a $\mathbf{v}_1 = (3, 2, 1)$ -el és $\mathbf{v}_2 = (1, 0, -2)$ -vel és illeszkedik a $P_0(1, 0, -1)$ -ra. Adott a pont, tehát keresendő még a normálvektor, mely merőleges minden síkban futó, síkkal párhuzamos vektorra, így $\mathbf{v}_1$ és $\mathbf{v}_2$ -re is. Egy vektor például, mely merőleges $\mathbf{v}_1$ -re és $\mathbf{v}_2$ -re is:

Példa

6. példa Írjuk fel annak az α síknak az egyenletét Hesse alakban, mely merőleges az $\mathbf{n} = (2, 2, -1)$ vektorra és átmegy a $P_0(1, 3, 5)$ ponton.

Adjuk meg a $Q(1, 0, 2)$ pont távolságát a síktól.

A sík egyenlete felírható:

$$n_1x + n_2y + n_3z = n_1x_0 + n_2y_0 + n_3z_0 \Rightarrow 2x + 2y - z = 2 + 6 - 5 = 3$$

Mivel $|\mathbf{n}| = \sqrt{2^2 + 2^2 + (-1)^2} = \sqrt{9} = 3$, ezért a sík Hesse alakban:

$$\alpha: \frac{2}{3}x + \frac{2}{3}y - \frac{1}{3}z - 1 = 0$$

Így kiszámolható, hogy $d(\alpha, Q) = \left| \frac{2}{3} \cdot 1 + \frac{2}{3} \cdot 0 - \frac{1}{3} \cdot 2 - 1 \right| = 1$

7. példa Írjuk fel annak a β síknak az egyenletét, mely párhuzamos a $\mathbf{v}_1 = (3, 2, 1)$ -el és $\mathbf{v}_2 = (1, 0, -2)$ -vel és illeszkedik a $P_0(1, 0, -1)$ -ra.

Adott a pont, tehát keresendő még a normálvektor, mely merőleges minden síkban futó, síkkal párhuzamos vektorra, így $\mathbf{v}_1$ és $\mathbf{v}_2$ -re is. Egy vektor például, mely merőleges $\mathbf{v}_1$ -re és $\mathbf{v}_2$ -re is: $\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2 = (-4, 7, -2)$.

Példa

6. példa Írjuk fel annak az α síknak az egyenletét Hesse alakban, mely merőleges az $\mathbf{n} = (2, 2, -1)$ vektorra és átmegy a $P_0(1, 3, 5)$ ponton. Adjuk meg a $Q(1, 0, 2)$ pont távolságát a síktól.

A sík egyenlete felírható:

$$n_1x + n_2y + n_3z = n_1x_0 + n_2y_0 + n_3z_0 \Rightarrow 2x + 2y - z = 2 + 6 - 5 = 3$$

Mivel $|\mathbf{n}| = \sqrt{2^2 + 2^2 + (-1)^2} = \sqrt{9} = 3$, ezért a sík Hesse alakban:

$$\alpha: \frac{2}{3}x + \frac{2}{3}y - \frac{1}{3}z - 1 = 0$$

$$\text{Így kiszámolható, hogy } d(\alpha, Q) = \left| \frac{2}{3} \cdot 1 + \frac{2}{3} \cdot 0 - \frac{1}{3} \cdot 2 - 1 \right| = 1$$

7. példa Írjuk fel annak a β síknak az egyenletét, mely párhuzamos a $\mathbf{v}_1 = (3, 2, 1)$ -el és $\mathbf{v}_2 = (1, 0, -2)$ -vel és illeszkedik a $P_0(1, 0, -1)$ -ra. Adott a pont, tehát keresendő még a normálvektor, mely merőleges minden síkban futó, síkkal párhuzamos vektorra, így $\mathbf{v}_1$ és $\mathbf{v}_2$ -re is. Egy vektor például, mely merőleges $\mathbf{v}_1$ -re és $\mathbf{v}_2$ -re is: $\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2 = (-4, 7, -2)$. Így $\beta: -4(x - 1) + 7y - 2(z + 1) = 0 \Rightarrow \beta: 4x - 7y + 2z = 2$

Két sík hajlásszöge

8. példa Adjuk meg az $\alpha : 2x - 3y = 5$ és $\beta : -x + 3y + 2z = 7$ síkok hajlásszögét!

Két sík hajlásszöge

8. példa Adjuk meg az $\alpha : 2x - 3y = 5$ és $\beta : -x + 3y + 2z = 7$ síkok hajlásszögét!

A merőleges szárú szögek miatt két síknak a hajlásszöge megegyezik a rájuk merőleges normálvektorok szögével.

Két sík hajlásszöge

8. példa Adjuk meg az $\alpha : 2x - 3y = 5$ és $\beta : -x + 3y + 2z = 7$ síkok hajlásszögét!

A merőleges szárú szögek miatt két síknak a hajlásszöge megegyezik a rájuk merőleges normálvektorok szögével.

Tehát meg kell találnunk $\mathbf{n}_\alpha$ és $\mathbf{n}_\beta$ szögét, melyhez nyilván kell $\mathbf{n}_\alpha$ és $\mathbf{n}_\beta$.

Két sík hajlásszöge

8. példa Adjuk meg az $\alpha : 2x - 3y = 5$ és $\beta : -x + 3y + 2z = 7$ síkok hajlásszögét!

A merőleges szárú szögek miatt két síknak a hajlásszöge megegyezik a rájuk merőleges normálvektorok szögével.

Tehát meg kell találnunk $\mathbf{n}_\alpha$ és $\mathbf{n}_\beta$ szögét, melyhez nyilván kell $\mathbf{n}_\alpha$ és $\mathbf{n}_\beta$. Ezt könnyű meghatározni, csak le kell olvasnunk azokat a síkok egyenleteiből:

$\mathbf{n}_\alpha = (2, -3, 0)$ és $\mathbf{n}_\beta = (-1, 3, 2)$.

Két sík hajlásszöge

8. példa Adjuk meg az $\alpha : 2x - 3y = 5$ és $\beta : -x + 3y + 2z = 7$ síkok hajlásszögét!

A merőleges szárú szögek miatt két síknak a hajlásszöge megegyezik a rájuk merőleges normálvektorok szögével.

Tehát meg kell találnunk $\mathbf{n}_\alpha$ és $\mathbf{n}_\beta$ szögét, melyhez nyilván kell $\mathbf{n}_\alpha$ és $\mathbf{n}_\beta$. Ezt könnyű meghatározni, csak le kell olvasnunk azokat a síkok egyenleteiből:

$\mathbf{n}_\alpha = (2, -3, 0)$ és $\mathbf{n}_\beta = (-1, 3, 2)$.

$$\cos \phi = \frac{\langle \mathbf{n}_\alpha, \mathbf{n}_\beta \rangle}{|\mathbf{n}_\alpha| |\mathbf{n}_\beta|} = \frac{-2 - 9 + 0}{\sqrt{4 + 9 + 0} \sqrt{1 + 9 + 4}} = \frac{-11}{\sqrt{182}} \Rightarrow$$

$$\phi = \arccos \left(\frac{-11}{\sqrt{182}} \right) = 144,62^\circ$$

Egyenes egyenlete

Kérdés: Mikor tekintünk adotttnak egy egyenest?

Egyenes egyenlete

Kérdés: Mikor tekintünk adottnak egy egyenest?

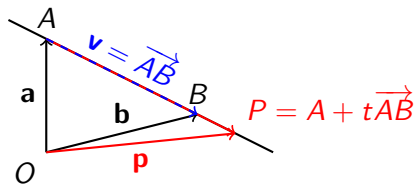
Válasz: Egy egyenes adott, ha adott két pontja $A(a_1, a_2, a_3)$, $B(b_1, b_2, b_3)$.

Egyenes egyenlete

Kérdés: Mikor tekintünk adottnak egy egyenest?

Válasz: Egy egyenes adott, ha adott két pontja $A(a_1, a_2, a_3)$, $B(b_1, b_2, b_3)$.

Kérdés: Hogyan lehet az egyenes egy tetszőleges $P(x, y, z)$ pontjába eljutni?



Egyenes egyenlete

Kérdés: Mikor tekintünk adottnak egy egyenest?

Válasz: Egy egyenes adott, ha adott két pontja $A(a_1, a_2, a_3)$, $B(b_1, b_2, b_3)$.

Kérdés: Hogyan lehet az egyenes egy tetszőleges $P(x, y, z)$ pontjába eljutni?

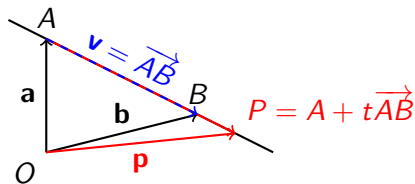
Válasz: $\mathbf{p} = \mathbf{a} + t\mathbf{v}$, ahol $t \in \mathbb{R}$

$$x = a_1 + tv_1$$

$$y = a_2 + tv_2 \quad \text{egyenes paraméteres alakja,}$$

$$z = a_3 + tv_3$$

$$\text{ahol } v_1 = b_1 - a_1, v_2 = b_2 - a_2 \text{ és } v_3 = b_3 - a_3.$$



Egyenes egyenlete

Kérdés: Mikor tekintünk adottnak egy egyenest?

Válasz: Egy egyenes adott, ha adott két pontja $A(a_1, a_2, a_3)$, $B(b_1, b_2, b_3)$.

Kérdés: Hogyan lehet az egyenes egy tetszőleges $P(x, y, z)$ pontjába eljutni?

Válasz: $\mathbf{p} = \mathbf{a} + t\mathbf{v}$, ahol $t \in \mathbb{R}$

$$x = a_1 + tv_1$$

$$y = a_2 + tv_2 \quad \text{egyenes paraméteres alakja,}$$

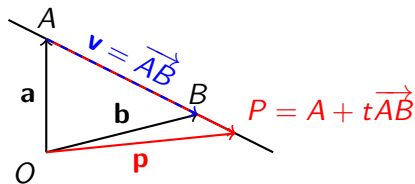
$$z = a_3 + tv_3$$

ahol $v_1 = b_1 - a_1$, $v_2 = b_2 - a_2$ és $v_3 = b_3 - a_3$.

Ha $v_1, v_2, v_3 \neq 0$, akkor t kifejezhető:

$$t = \frac{x - a_1}{v_1}, \quad t = \frac{y - a_2}{v_2} \quad \text{és} \quad t = \frac{z - a_3}{v_3}, \quad \text{amiből adódik az egyenes}$$

$$\text{egyenletrendszeres alakja: } \frac{x - a_1}{v_1} = \frac{y - a_2}{v_2} = \frac{z - a_3}{v_3}$$



Egyenes egyenlete

Kérdés: Mikor tekintünk adotttnak egy egyenest?

Válasz: Egy egyenes adott, ha adott két pontja $A(a_1, a_2, a_3)$, $B(b_1, b_2, b_3)$.

Kérdés: Hogyan lehet az egyenes egy tetszőleges $P(x, y, z)$ pontjába eljutni?

Válasz: $\mathbf{p} = \mathbf{a} + t\mathbf{v}$, ahol $t \in \mathbb{R}$

$$x = a_1 + tv_1$$

$$y = a_2 + tv_2 \text{ egyenes paraméteres alakja,}$$

$$z = a_3 + tv_3$$

ahol $v_1 = b_1 - a_1$, $v_2 = b_2 - a_2$ és $v_3 = b_3 - a_3$.

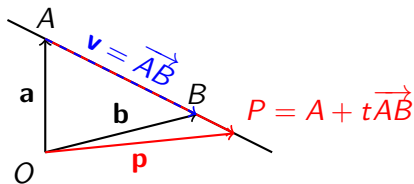
Ha $v_1, v_2, v_3 \neq 0$, akkor t kifejezhető:

$$t = \frac{x - a_1}{v_1}, t = \frac{y - a_2}{v_2} \text{ és } t = \frac{z - a_3}{v_3}, \text{ amiből adódik az egyenes}$$

$$\text{egyenletrendszeres alakja: } \frac{x - a_1}{v_1} = \frac{y - a_2}{v_2} = \frac{z - a_3}{v_3}$$

Ha például $v_2 = 0$, akkor nem változik meg az y koordináta, így

$$\frac{x - a_1}{v_1} = \frac{z - a_3}{v_3}, y = a_2.$$



Egyenes egyenlete

Kérdés: Mikor tekintünk adottnak egy egyenest?

Válasz: Egy egyenes adott, ha adott két pontja $A(a_1, a_2, a_3)$, $B(b_1, b_2, b_3)$.

Kérdés: Hogyan lehet az egyenes egy tetszőleges $P(x, y, z)$ pontjába eljutni?

Válasz: $\mathbf{p} = \mathbf{a} + t\mathbf{v}$, ahol $t \in \mathbb{R}$

$$x = a_1 + tv_1$$

$$y = a_2 + tv_2 \text{ egyenes paraméteres alakja,}$$

$$z = a_3 + tv_3$$

ahol $v_1 = b_1 - a_1$, $v_2 = b_2 - a_2$ és $v_3 = b_3 - a_3$.

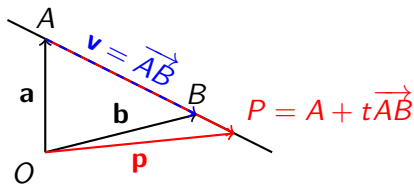
Ha $v_1, v_2, v_3 \neq 0$, akkor t kifejezhető:

$$t = \frac{x - a_1}{v_1}, t = \frac{y - a_2}{v_2} \text{ és } t = \frac{z - a_3}{v_3}, \text{ amiből adódik az egyenes}$$

$$\text{egyenletrendszeres alakja: } \frac{x - a_1}{v_1} = \frac{y - a_2}{v_2} = \frac{z - a_3}{v_3}$$

Ha például $v_2 = 0$, akkor nem változik meg az y koordináta, így

$$\frac{x - a_1}{v_1} = \frac{z - a_3}{v_3}, y = a_2. \text{ Ha } v_1 = v_2 = 0, \text{ akkor } x = a_1, y = a_2 \ (z \in \mathbb{R}).$$



Példa

9. **példa** Adjuk meg annak az egyenesnek mindkét alakját, amely átmegy az $A(1, 3, 5)$ és $B(2, 0, -1)$ pontokon.

Példa

9. **példa** Adjuk meg annak az egyenesnek mindkét alakját, amely átmegy az $A(1, 3, 5)$ és $B(2, 0, -1)$ pontokon.

Mivel pont kettő is van, ezért irányvektort kell csak találnunk:

$\mathbf{v} =$

Példa

9. **példa** Adjuk meg annak az egyenesnek mindkét alakját, amely átmegy az $A(1, 3, 5)$ és $B(2, 0, -1)$ pontokon.

Mivel pont kettő is van, ezért irányvektort kell csak találnunk:

$$\mathbf{v} = \overrightarrow{AB} = (1, -3, -6).$$

Paraméteres alak:

Példa

9. **példa** Adjuk meg annak az egyenesnek mindkét alakját, amely átmegy az $A(1, 3, 5)$ és $B(2, 0, -1)$ pontokon.

Mivel pont kettő is van, ezért irányvektort kell csak találnunk:

$$\mathbf{v} = \overrightarrow{AB} = (1, -3, -6).$$

Paraméteres alak: $x = 1 + t$, $y = 3 - 3t$, $z = 5 - 6t$

Egyenletrendszeres alak:

Példa

9. **példa** Adjuk meg annak az egyenesnek mindkét alakját, amely átmegy az $A(1, 3, 5)$ és $B(2, 0, -1)$ pontokon.

Mivel pont kettő is van, ezért irányvektort kell csak találnunk:

$$\mathbf{v} = \overrightarrow{AB} = (1, -3, -6).$$

Paraméteres alak: $x = 1 + t, y = 3 - 3t, z = 5 - 6t$

Egyenletrendszeres alak: $x - 1 = \frac{y - 3}{-3} = \frac{z - 5}{-6}$

Példa

9. **példa** Adjuk meg annak az egyenesnek mindkét alakját, amely átmegy az $A(1, 3, 5)$ és $B(2, 0, -1)$ pontokon.

Mivel pont kettő is van, ezért irányvektort kell csak találnunk:

$$\mathbf{v} = \overrightarrow{AB} = (1, -3, -6).$$

Paraméteres alak: $x = 1 + t, y = 3 - 3t, z = 5 - 6t$

Egyenletrendszeres alak: $x - 1 = \frac{y - 3}{-3} = \frac{z - 5}{-6}$

10. **példa** Adjuk meg az $\frac{x-2}{6} = -\frac{y+2}{2} = \frac{4-2z}{3}$ egyenes irányvektorát és egy pontját.

Példa

9. **példa** Adjuk meg annak az egyenesnek mindkét alakját, amely átmegy az $A(1, 3, 5)$ és $B(2, 0, -1)$ pontokon.

Mivel pont kettő is van, ezért irányvektort kell csak találnunk:

$$\mathbf{v} = \overrightarrow{AB} = (1, -3, -6).$$

Paraméteres alak: $x = 1 + t$, $y = 3 - 3t$, $z = 5 - 6t$

Egyenletrendszeres alak: $x - 1 = \frac{y - 3}{-3} = \frac{z - 5}{-6}$

10. **példa** Adjuk meg az $\frac{x - 2}{6} = -\frac{y + 2}{2} = \frac{4 - 2z}{3}$ egyenes irányvektorát és egy pontját.

Át kell alakítanunk az egyenletet, hogy leolvashassuk a kért adatokat:

$$\frac{x - 2}{12} = \frac{y + 2}{-4} = \frac{z - 2}{-3},$$

tehát $\mathbf{v}(12, -4, -3)$ és $P_0(2, -2, 2)$.

Két sík metszésvonala

11. példa Adjuk meg az $\alpha : x - y + 2z = 2$ és $\beta : 2x + y - 3z = 1$ síkok metszésvonalának egyenletét.

Két sík metszésvonala

11. példa Adjuk meg az $\alpha : x - y + 2z = 2$ és $\beta : 2x + y - 3z = 1$ síkok metszésvonalának egyenletét.

A keresett egyenes mindkét síkra merőleges, így az irányvektor mindkét normálvektorra merőleges lesz, azaz megkapható a normálvektorok vektoriális szorzataként, ahol $\mathbf{n}_\alpha = (1, -1, 2)$ és $\mathbf{n}_\beta = (2, 1, -3)$.

Két sík metszésvonala

11. példa Adjuk meg az $\alpha : x - y + 2z = 2$ és $\beta : 2x + y - 3z = 1$ síkok metszésvonalának egyenletét.

A keresett egyenes mindkét síkra merőleges, így az irányvektor mindkét normálvektorra merőleges lesz, azaz megkapható a normálvektorok vektoriális szorzataként, ahol $\mathbf{n}_\alpha = (1, -1, 2)$ és $\mathbf{n}_\beta = (2, 1, -3)$.

$$\mathbf{n}_\alpha \times \mathbf{n}_\beta = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -3 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Két sík metszésvonala

11. példa Adjuk meg az $\alpha : x - y + 2z = 2$ és $\beta : 2x + y - 3z = 1$ síkok metszésvonalának egyenletét.

A keresett egyenes mindkét síkra merőleges, így az irányvektor mindkét normálvektorra merőleges lesz, azaz megkapható a normálvektorok vektoriális szorzataként, ahol $\mathbf{n}_\alpha = (1, -1, 2)$ és $\mathbf{n}_\beta = (2, 1, -3)$.

$$\mathbf{n}_\alpha \times \mathbf{n}_\beta = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -3 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ 3 \end{pmatrix}$$

A metszésvonal egy pontját pedig úgy keressük meg, hogy keressünk egy olyan pontot, amely mindkét síkon rajta van, tehát kielégíti mindkét egyenletet. Ez két egyenlet, de három változó van, tehát az egyik változó értéke tetszőleges, mondjuk $z = 0$ feltehető. Ekkor az α sík egyenletéből: $x = y + 2$, amit beírva β egyenletébe: $2(y + 2) + y = 1$, amit átrendezve: $y = -1$ és így $x = 1$ adódik. Tehát $P_0(1, -1, 0)$, így a keresett egyenes egyenlete: $x - 1 = \frac{y + 1}{7} = \frac{z}{3}$