Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem Gépészmérnöki Kar

Energetika és Mechatronika BSc szakok

Matematika A2H elméleti vizsgakérdések

Tájékoztató anyag — Kiadva: 2016. május 17.

Ez a vizsgakérdés jegyzék tájékoztató jellegű, de jól tükrözi a vizsgákon várható kérdések jellegét, mélységét, és igyekszik a visszakérdezendő anyagot nagyjából lefedve a megtanulandókról teljeskörű tájékoztatást adni.

A vizsgákon három kifejtéses elméleti vizsgakérdés lesz (a három, itt csillagokkal elválasztott fő témából - sorok, lineáris algebra, többváltozós analízis – egy-egy kérdés), továbbá várhatólag lesznek IGAZ-HAMIS villámkérdések is. Az IGAZ-HAMIS kérdések jellegét a lineáris algebránál már tapasztalták, itt pedig az elméleti kérdések között meg van fogalmazva jó néhány a sorokkal, illetve a többváltozós analízissel kapcsolatban. Ilyenek lesznek a vizsgán is.

A gyakorlati, kiszámolást igénylő feladatok vonatkozásában külön gyakorló feladatsor, feladatgyűjtemény készül. A fent említett $3 + 1$ elméleti kérdésen felül 5-7 ilyen számolásos példa várható, de mindig figyeljenek oda: nagyon sokszor a látszólag számolásigényes megoldás valójában egyszerű elméleti észrevétellel igen rövid úton elintézhető. A feladat lényege sokszor éppen ez: azt tesztelni, hogy a hallgató eléggé érti-e az anygot ahhoz, hogy valamilyen mechanikus számolási módszer jól-rosszul megpróbált végigvitele helyett észrevegye a lényeget. (Pl. a "létezik-e inverz mátrix" kérdés megválaszolásához azért nem kell mindjárt nekiesni a Gauss-Jordan eliminációnak – elegendő a determináns nulla vagy nem-nulla voltának pofonegyszerű és villámgyors meghatározása is.)

De még a ténylegesen kiszámolandó feladatok esetében is a legfontosabb az, hogy világos képet alkossunk és adjunk arról, hogy milyen módszerrel, mit is akarunk csinálni, és hogyan írjuk fel a megoldás lépéseit. Egy jó elvi megoldási út, módszer értelmes rögzítése fél siker a konkrét kiszámolás nélkül vagy hibájával is. Viszont az elképzelések, módszerek, indoklások nélkül a legszerencsésebb esetben ugyan kijöhet egy jó eredmény, de a legkisebb számolási hiba vagy időhiány oda vezet, hogy lesz egy rossz vagy hiányos számhalmazunk, amit — jogggal — az oktatónak nem lesz kedve és türelme esetlegesen értékelhető részeredmények után bogarászva megfejteni. Nem az oktató, hanem a hallgató dolga, hogy világosan jelezze, milyen módon próbálja megoldani a feladatot, és milyen részeredményt, megoldási gondolatot szeretne legalább valamilyen részpontszámért bemutatni, ha már egyszer a megoldása amúgy hibás. Tehát egy év matematika tanulás után szeretném nyomatékosan kérni Önöket: tanuljanak meg jelöléseket használni, jelezni a lépéseik tartalmát, mert ellenkező esetben még részpontszámot sem érnek a megoldás-töredékek.

Pl. a Gauss-Jordan eliminációra visszatérve: KÉREM, írják fel minden lépésnél azt a pár karaktert, ami jelzi, milyen sorműveletet végeznek! Nem várhatják el a vizsgáztatóktól, hogy ha rossz a megoldás, akkor majd ők végigbogarásszák, hogy akkor itt melyik sor hányszorosa volt rosszul hozzáadva a melyik másikhoz... Lesz olyan vizsga, ahol már most száz jelentkező van: előre megmondom, úgy fogunk javítani, hogy csak azt díjazzuk, ami láthatóan és világosan rögzít valamilyen jó lépést, és minden zavaros, pontatlan, hibás, jelzés nélküli kavarást további vizsgálat nélkül értéktelennek fogunk venni.

Jó felkészülést, eredményes tanulást kívánok!

E 1.) Mit jelent az, hogy egy $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ sor a) konvergens b) abszolút konvergens? c) Mi a kapcsolat a két tulajdonság között? Igazolja is állítását!

E 2.) Tegyük fel, hogy tudjuk, hogy $a_k/b_k \to 1$ $(k \to \infty)$. Következik-e ebből általában (tehát nem feltétlenül pozitív tagok mellett), hogy $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ és $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ ekvikonvergensek (azaz vagy mindkettő konvergens, vagy mindkettő divergens)?

Megoldás: Nem következik. Pl. legyen $a_k := (-1)^k/\sqrt{k}$, ekkor $\sum_k a_k$ Leibinz típusú sor, és konvergens. Ugyanakkor lehet pl. $b_k := (-1)^k/\sqrt{k} + 1/k$: ekkor ugyan $a_k/b_k = 1 + (-1)^k/\sqrt{k} \to 1$, de ha $\sum_k b_k$ konvergálna, akkor $\sum_k (b_k - a_k)$ is konvergálna, ami nem igaz, mert a $\sum_k 1/k$ harmonikus sor divergens. Tehát $\sum_k a_k$ konvergens, de $\sum_k b_k$ divergens.

Az előadáson az szerepelt, hogy ha még ezen felül $a_k, b_k \geq 0$ is fennáll, akkor ekvikonvergensek (a speciális majoráns-kritérium szerint). Ez abból következik, hogy $n \geq N_0$-ra $a_n < 2b_n$ illetve $b_n < 2a_n$, ami kölcsönös majorálást biztosít.

E 3.) Tegyük fel, hogy egy $\sum_k a_k$ végtelen sornak van olyan $\sum_k a_{\sigma(k)}$ átrendezése, amely konvergens és összege 0, és van olyan átrendezése is, amely konvergens, és összege 1. Igaz-e, hogy akkor van olyan átrendezése is, amelynek az összege π? Indokolja is a válaszát!

E 4.) Tegyük fel, hogy egy $\sum_k a_k$ végtelen sornak van olyan $\sum_k a_{\sigma(k)}$ átrendezése, amely konvergens, és van olyan átrendezése is, amely konvergens divergens. Igaz-e, hogy akkor van olyan átrendezése is, amely konvergens, és az összege π? Indokolja is a válaszát!

E 5.) Idézze fel az összehasonlító (majoráns- és minoráns-) kritériumot! Hogyan szól a speciális összehasonlító kritérium, avagy más néven "határérték-teszt"? Bizonyítsa is be ezeket!

E 6.) Fogalmazza meg és bizonyítsa is be az integrálkritériumot! Mondjon példát olyan sorokra, amelyeknek konvergenciáját másként nem könnyű eldönteni, de ezzel a kritériummal eldönthető!

E 7.) Mit nevezünk *feltételes konvergenciának*? Mondjon példát feltételesen konvergens sorra!

E 8.) Mik azok az alternáló- vagy Leibniz típusú sorok? Hogyan becsülhető meg egy Leibniz típusú sor n-edik részletősszegének a sor teljes összegétől való eltérése ("hibája")?

E 9.) Mit értünk a $\sum\limits_k a_k, \sum\limits_k b_k$ végtelen sorok Cauchy-szorzatán? Mondjon elegendő feltételt a Cauchy-szorzat konvergenciájára!

E 11.) Fogalmazza meg, és bizonyítsa is be numerikus sorokra a hányadoskritériumot!

E 12.) Fogalmazza meg, és bizonyítsa is be numerikus sorokra a gyökkritériumot!

E 13.) Definiálja a Riemann-féle ζ függvényt! Mely *komplex* értékekre konvergens a sor? Mely értékekre biztosan divergens a sor? Nevezzen meg konkrétan kiszámítható értéket, és a kiszámítás módszerét!

E 14.) Definiálja komplex változókra is az $E(z) = e^z$ exponenciális függvényt, és bizonyítsa be a (komplex változós) exponenciális függvény Cauchy-féle függvényegyenletét!

E 15.) Definiálja, mit jelent az, hogy egy függvénysorozat *egyenletesen konvergens* egy E halmazon! Fogalmazzon meg ezzel ekvivalens kritériumot!

E 16.) Elő lehet-e állítani a $\mathrm{sgn}\,(x)$ függvényt folytonos függvények sorozatának a.) határértékeként b) egyenletesen konvergens határértékeként? Indokolja is a válaszait!

E 17.) Igazolja, hogy folytonos függvények egyenletesen konvergens sorozatának a határértéke is folytonos függvény!

E 18.) Definiálja függvénysor konvergencia-halmazát (konvergencia-tartományát) és összegfüggvényét!

E 19.) Mit jelent a *normális knvergencia*? Mondja ki Weierstrass ezzel kapcsolatos tételét!

E 20.) Fejtse hatványsorba az $\arctan x$ függvényt ott, ahol ez lehetséges! Indokolja is a sorfejtés során alkalmazott lépéseket!

E 21.) Mit nevezünk analitikus függvénynek? Igazolja, hogy egy komplex változós polinomfüggvény az egész komplex síkon analitikus!

E 22.) Mit nevezünk a $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ komplex változós hatványsor *konvergencia-sugarának*?

E 23.) Fogalmazza meg és bizonyítsa be a Cauchy-Hadamard tételt!

E 24.) Adjon példákat olyan hatványsorral definiált $h(z) := \sum_{n=0} \infty a_n z^n$ függvényekre, amelyeknek a konvergencia-sugara $R = 1$, és hatványsora a) az egész konvergencia-körön konvergens b) a konvergencia-körön seholsem konvergens c) a konvergencia-körön egyes pontokban konvergens, más pontokban divergens! d) Alkothatnak-e az utóbbi esetben a hatványsor együtthatói abszolút konvergens sort?

E 25.) Tegyük fel, hogy az $F(z) := \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ hatványsorral definiált függvény konvergenciasugara $R > 0$. Fogalmazza meg és bizonyítsa be a deriváltfüggvény konvergencia-sugarára vonatkozó tételt!

E 26.) Mit tudunk konvergens hatványsorral értelmezett függvény deriválhatóságáról, és derivált-soráról?

E 27.) Fogalmazza meg Taylor együttható-tételét! Miből következik a tétel?

E 28.) Hatványsorral előállított függvény a konvergencia-tartományon belül analitikus. Mit jelent ez a tétel pontosan? Bizonyítsa be az állítást!

E 29.) Fogalmazza meg Weierstrass tételét korlátos, zárt halmazon folytonos függvény polinommal való közelíthetőségéről! Mi a különbség aközött, hogy f egyenletesen közelíthető polinomsorozattal, és aközött, hogy f konvergens Taylor-sorba fejthető?

E 30.) Mit értünk egy f függvény "legjobb n-edfokú közelítésén az a pont körül" (l.j.n.f.k.)? Igazolja, hogy a l.j.n.f.k., ha létezik egy $a \in \mathrm{int}\,\mathcal{D}_f$ pont körül, akkor egyértelmű!

E 31.) Fogalmazza meg és igazolja az n-edfokú Taylor-féle közelítési formulát a Lagrange-féle maradéktaggal!

E 32.) Igazolja, hogy $\cos z$ analitikus függvény az egész komplex síkon!

E 33.) Fogalmazza meg és vezesse le az Euler-formulákat!

E 34.) Fogalmazza meg és bizonyítsa be a L'Hospital szabályt!

E 35.) Fogalmazza meg és bizonyítsa be a Cauchy-féle középérték-tételt!

E 36.) Hogyan definiáljuk egy $f \in R[0, 2\pi]$ Riemann-integrálható függvény Fourier-sorát? Milyen $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvények vizsgálatában hasznos a Fourier-sor használata?

E 37.) Fogalmazza meg és igazolja az ú.n. ortogonalitási relációkat!

E 38.) Mondja ki a tanult, akár szakadásos függvényekre is érvényes konvergencia-tételt Fourier-sorokra!

E 39.) Mit mond ki Weierstrass 2. approximációs tétele?

IGAZ-HAMIS KÉRDÉSEK

I 1.) IGAZ-e? "Ha a $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ végtelen sor részletösszegei felülről korlátosak, akkor a sor konvergens" ?

I 2.) IGAZ-e? Ha egy $\sum_k a_k$ sor tetszőleges sorrendben konvergensen átrendezhető pontosan akkor, ha abszolút konvergens.

I 3.) IGAZ-e? "Ha egy $\sum_k a_k$ sor tetszőleges $s \in \mathbb{R}$ érték esetén átrendezhető s-hez konvergens módon, akkor a végtelen sor abszolút konvergens."

I 4.) IGAZ-e? Ha $\sum\limits_k a_k, \sum\limits_k b_k$ konvergensek, és legalább az egyikük abszolút konvergens, akkor a $\sum\limits_k a_k b_k$ Hadamard-szorzat is az.

I 5.) IGAZ-e? Léteznek olyan $\sum\limits_k a_k, \sum\limits_k b_k$ konvergens végtelen sorok, amelyekre a $\sum\limits_k a_k b_k$ Hadamard-szorzat divergens.

I 6.) IGAZ-e? Ha $\sum\limits_k a_k, \sum\limits_k b_k$ konvergens végtelen sorok, akkor a $\sum\limits_k a_k b_k$ Hadamard-szorzat is konvergens.

I 7.) IGAZ-e? Egy feltételesen konvergens sor részletösszegei nem alkothatnak monoton sorozatot.

I 8.) IGAZ-e? Ha egy $\sum_k u_k$ Leibniz típusú sor minden második tagját összevonjuk az utána következő páratlanadik taggal, akkor a keletkező $\sum_n (u_{2n} + u_{2n+1})$ új sor már abszolút konvergens lesz?

* * * * *

E 40.) Definiálja a *vektortér* fogalmát tetszőleges adott $\mathbb{K}$ számtest felett!

E 41.) a) Definiálja a lineáris függetlenséget vektortér adott vektoraira! b) Mit jelent az, hogy egy V vektortérben egy $\mathbf{u} \in V$ vektor lineárisan függ az $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k$ vektoroktól? c) Hogyan nevezzük az *összes* olyan vektor összességét, amelyek egy adott $H \subset V$ részhalmaz vektoraitól lineárisan függenek?

E 42.) Mikor nevezünk egy V vektortérben egy $U \subset V$ halmazt *altérnek*? Igazolja, hogy ha $U, W \subset V$ két altér, akkor $U \cap W$ és $[U \cup W]$ is alterek V-ben!

E 43.) Legyenek egy V vektortérben $U, W \subset V$ két altér, amelyekre $U \cap W = \{\mathbf{0}\}$! Igazolja, hogy ha $\{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k\}$ az U, $\{\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_m\}$ a W egy bázisa, akkor
a) $\{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k, \mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_m\}$ is lineárisan független, **b)** és az $[U \cup W]$ altér bázisa!

E 44.) Igazolja, hogy tetszőleges $H \subset V$ vektorhalmaz $G := [H]$ generátuma altér V-ben! Eközben mondja ki a felhasznált fogalmak – generátum, altér – értelmezését is!

E 45.) Mit jelent az, hogy egy $B \subset V$ vektorhalmaz a V vektortér *bázisa*? Mit mond ki a bázisokra megfogalmazott dimenzió-tétel? Hogyan van értelmezve egy V vektortér dimenziója?

E 46.) Mit lehet mondani az $n := \#U$ és $m := \#W$ elemszámokról, ha tudjuk, hogy egy V vektortérben U lineárisan független rendszer, W pedig egy generátorrendszer?

E 47.) Mikor nevezünk egy $L : U \to V$ leképezést az U és V vektorterek között *lineáris leképezésnek*? Hogyan lehet felírni egy lineáris leképezés mátrixát?

E 48.) Definiálja egy $L : U \to V$ lineáris leképezés $\ker L$ és $\operatorname{im} L$ magterét és képterét! Igazolja, hogy ezek alterek, és mondja ki az ide vonatkozó dimenzió-tételt!

E 49.) Tegyük fel, hogy adott $\mathcal{E} \subset U$ és $\mathcal{C} \subset V$ bázisban az $L : U \to V$ lineáris leképezés mátrixa M! a) Hogyan változik meg a mátrix, ha az U térben az új $\mathcal{B}$ bázisra térünk át, és az $\mathcal{E}$ bázisban az új $\mathcal{B}$ bázis elemeinek felírása rendre $\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_k$? b) Hogyan változik a leképezés M mátrixa akkor, ha a V térben az új $\mathcal{D}$ bázisra térünk át, és az új $\mathcal{D}$ bázisban a régi $\mathcal{C}$ bázis elemeinek felírása rendre $\mathbf{c}_1, \ldots, \mathbf{c}_m$?

E 50.) Legyen adott egy V vektortérben két bázis, az $\mathcal{E}$ és $\mathcal{B}$ vektorrendszerek. Ha $\mathcal{E}$ elemei a $\mathcal{B}$ bázisban felírva rendre $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$, és $\mathcal{B}$ elemei az $\mathcal{E}$ bázisban felírva rendre $\mathbf{b}_1, \ldots \mathbf{b}_n$, akkor mi mondható el az oszlopvektorokból álló $E := [\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n]$ és $B := [\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_n]$ mátrixokról?

E 51.) Legyen adott egy $L : V \to V$ lineáris transzformáció, és legyen ennek mátrixa az $\mathcal{E}$ bázisban felírva M. Tegyük fel, hogy a $\mathcal{B}$ vektorrendszer is bázist alkot, és elemei az $\mathcal{E}$ bázisban felírva rendre $\mathbf{b}_1, \ldots \mathbf{b}_n$. Hogyan írható fel az L transzformáció bázisa a $\mathcal{B}$ bázisra áttérve?

E 52.) Mikor *hasonló* két mátrix? Hogyan jellemezhető a mátrixok hasonlósága lineáris leképezésekkel?

E 53.) Hogyan van értelmezve egy mátrix *rangja*? Adjon meg legalább öt különböző, de ekvivalens meghatározást!

E 54.) Tegyük fel, hogy $B \subset V$ a V vektortér egy bázisa, és $L : V \to W$ egy lineáris leképezés a W vektortérbe. Ha az $\mathcal{R}_L = \operatorname{im} L$ képtér a teljes W vektortér, akkor hogyan jellemezhető az az eset, amikor a $\mathbf{w}_j = L\mathbf{b}_j$ vektorok is bázist alkotnak W-ben? Adjon több különböző jellemzést!

E 55.) Definiálja a sajátértékeket, sajátvektorokat és a karakterisztikus polinomot! Mi a kapcsolat ezek között a fogalmak között? Igazolja, hogy ha $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ az $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ lineáris transzformáció egy sajátértéke, akkor van ehhez tartozó sajátvektor is!

E 56.) Mit jelent az, hogy egy mátrix diagonalizálható? Adjon ekvivavalens feltételt a diagonalizálhatóságra!

E 57.) Mit jelent az, hogy egy mátrix szinguláris? Adjon meg ezzel ekvivalens feltételt determinánssal és sajátértékekkel is!

E 58.) Mikor nevezünk egy mátrixot *normálisnak* ? Mondja ki a normális mátrixok egy tanult fontos tulajdonságát!

E 59.) Mondja ki a szimmetrikus mátrixok diagonalizálhatóságára vonatkozó tételt!

E 60.) Mit nevezünk *bilineáris függvénynek* és mit nevezünk *kvadratikus alaknak* egy vektortéren? Hogyan lehet bilineáris függvények segítségével kvadratikus alakot értelmezni? Egy kvadratikus alakból mennyiben következtethetünk vissza az őt meghatározó bilineáris függvényre?

E 61.) Mikor nevezünk egy kvadratikus alakot pozitív definitnek? Hogyan jellemezhetjük ezt a tulajdonságot a mátrix sajátértékeivel? És a mátrix aldeterminánsaival?

E 62.) Mikor nevezünk egy kvadratikus alakot negatív definitnek? Hogyan jellemezhetjük ezt a tulajdonságot a mátrix sajátértékeivel? És a mátrix aldeterminánsaival?

E 63.) Tekintsük a másodrendű, szimmetrikus $A := \begin{bmatrix} a & c \\ c & b \end{bmatrix}$ mátrixot! Ellenőrizzük le, hogy $A \gg 0$ (pozitív definit) $\Leftrightarrow$ $a > 0$ és $d := \det A = \begin{vmatrix} a & c \\ c & b \end{vmatrix} = ab - c^2 > 0$!

IGAZ-HAMIS KÉRDÉSEK

I 9.) IGAZ-e? "Ha $\lambda_1 < \cdots < \lambda_n$ sajátértékei az $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mátrixnak, akkor A diagonalizálható."

I 10.) IGAZ-e? "Minden szimmetrikus mátrix ortogonális vektorral diagonalizálható"?

I 11.) IGAZ-e? "Ha egy mátrix normális, és a sajátvektorai egymásra merőlegesek, akkor megegyezik a saját transzponáltjával."

I 12.) IGAZ-e? "Ha a $\lambda_0 = 3$ szám az A mátrix karakterisztikus polinomjának 3-szoros gyöke, és $A^TA = AA^T$, akkor az $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ lineáris egyenletnek van három lineárisan független megoldása.

I 13.) IGAZ-e? "Ha a $\lambda_0 = 4$ szám az A mátrix karakterisztikus polinomjának 4-szeres gyöke, és $A = A^T$, akkor az $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ lineáris egyenlet megoldásai négydimenziós alteret alkotnak."

I 14.) IGAZ-e? "Ha a $\lambda_0 = 2$ szám az $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ mátrix karakterisztikus polinomjának 2-szeres gyöke, és A diagonalizálható, akkor mindig van olyan O ortogonális mátrix, amelyre $OAO^T = D$ diagonális." (Nem - miért lenne? :))

I 15.) IGAZ-e? "Ha az $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ mátrix karakterisztikus polinomja $P_A(\lambda) = -\lambda^3 + \lambda^2 - \lambda + 1$, akkor az $U := \{A\mathbf{x} - \mathbf{x} \ : \ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3\}$ vektorhalmaz egy origón átmenő egyenest alkot."

I 16.) IGAZ-e? "Ha egy mátrix pozitív szemidefinit, akkor szinguláris."

I 17.) IGAZ-e? "Ha egy mátrix indefinit, akkor szinguláris is."

* * * * *

E 64.) Mikor nevezünk egy $K \subset \mathbb{R}^n$ halmazt *konvexnek*? És mikor nevezünk egy $f : K \to \mathbb{R}$ függvényt konvexnek?

E 65.) Mit nevezünk érintősíknak? Mit nevezünk támaszsíknak? Lehet-e egy függvénynek egy adott pontban több érintősíkja? Lehet-e egy függvénynek egy adott pontban több támaszsíkja?

E 66.) Mit nevezünk egy $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ függvény legjobb lineáris közelítésének egy $\mathbf{a} \in \operatorname{int} \mathcal{D}_f$ pontban? És mit nevezünk f legjobb kvadratikus közelítésének?

E 67.) Írja fel egy C^2 osztályú $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ függvény legjobb kvadratikus közelítését az $\mathbf{a} \in \operatorname{int} \mathcal{D}_f$ pontban! Mit nevezünk Hesse-mátrixnak, és milyen tulajdonságai esetén következtethetünk arra, hogy az érintősík a függvény alatt ill. felett helyezkedik el?

E 68.) Definiálja egy differenciálható $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ függvény *kritikus pontjainak* halmazát! Ha $f \in C^2(\mathbb{R}^n)$, akkor hogyan lehet megállapítani, hogy egy kritikus pontban a függvény viselkedése milyen jellegű (van-e maximum, minimum stb.)?

E 69.) Hogyan függ össze egy konvex, nyílt $D \subset \mathbb{R}^n$ halmazon értelmezett függvény konvexitása és érintősíkjainak viselkedése?

E 70.) Hogyan függ össze egy konvex, nyílt $D \subset \mathbb{R}^n$ halmazon értelmezett függvény konvexitása ás támaszsíkjainak létezése?

E 71.) Hogyan függ össze egy konvex, nyílt $D \subset \mathbb{R}^n$ halmazon értelmezett $C^2(D)$ osztályú függvény konvexitása és Hesse-mátrixának jellege?

E 72.) Mondja ki a kompozíció függvények differenciálására vonatkozó tételt (a "láncszabályt") vektorértékű függvényekre!

E 73.) Mit fogalmaz meg Young tétele? Milyen következményeket von ez maga után a teljes differenciálokra? És a Hesse mátrixokra?

E 74.) Adjon szükséges és elégséges feltételt arra, hogy egy $f \in C^1(D)$ függvénynek egy $P \in \operatorname{int} D$ megfelelően kis U környezetére és a $Q := f(P)$ pont $V := f(U)$ környezetére az $f : U \to V$ leképezés differenciálhatóan invertálható legyen! Adja meg, hogy hogyan lehet kiszámítani az inverz függvény deriváltját abban az esetben, ha az létezik!

E 75.) Adja meg egy $H \subset \mathbb{R}^n$ korlátos halmaz n-dimenziós Jordan-mérhetőségének és a $V_n(H)$ n dimenziós Jordan-térfogatának a definícióját!

E 76.) Hogyan írható fel egy adott $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n$ vektor-n-essel generált $P = P(\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n)$ paralelepipedon $V_n(P)$ Jordan-térfogata?

E 77.) Mik a V_n Jordan-térfogat alaptulajdonságai? Milyen egyértelműségi tétel érvényes ezekkel az alaptulajdonságokkal?

E 78.) Hogyan értelmezzük egy Jordan-mérhető $H \subset \mathbb{R}^n$ halmazon értelmezett korlátos $f(\mathbf{x})$ függvény Riemann-integrálját? Adja meg mind a három ekvivalens értelmezést abban az esetben, ha $f \geq 0$!

E 79.) Sorolja fel az n-dimenziós Riemann-integrál alaptulajdonságait!

E 80.) Mit nevezünk *normáltartománynak*? Bizonyítsa be, hogy a folytonos $g(x), f(x)$ függvények által definiált normáltartománynak mindig létezik a Jordan-területe!

E 81.) Mondja ki Fubini tételét normáltartományokra!

E 82.) Hogyan végezhető el a helyettesítéses integrálás a többváltozós $\iint_D f(\mathbf{x})\ d\mathbf{x}$ Riemann-integrálnál, ha az $f(\mathbf{x})$, $f : D \to \mathbb{R}$ függvényt egy $T : E \leftrightarrow D$ folytonosan differenciálható leképezésen keresztül mint $\Phi(\mathbf{y}) := \Phi(T(\mathbf{x}))$ írjuk fel?

E 83.) Mi az a Jacobi-determináns? Mondjon ki egy olyan tételt, ahol a Jacobi-determináns szerepel!

IGAZ-HAMIS KÉRDÉSEK

I 18.) IGAZ-e? "Ha egy f függvénynek egy $P \in \operatorname{int}\mathcal{D}_f$ pontban van támaszsíkja, akkor az érintősíkja is."

I 19.) IGAZ-e? "Ha egy differenciálható f függvénynek egy $P \in \operatorname{int}\mathcal{D}_f$ pontban van támaszsíkja, akkor az érintősíkja is."

I 20.) IGAZ-e? "Ha egy f függvénynek egy $P \in \operatorname{int}\mathcal{D}_f$ pontban van érintősíkja, akkor az támaszsíkja is."

I 21.) IGAZ-e? "Ha egy f függvénynek egy $P \in \operatorname{int}\mathcal{D}_f$ pontban van érintősíkja is és támaszsíkja is, akkor azok megegyeznek."

I 22.) IGAZ-e? "Ha egy f függvénynek egy $P \in \operatorname{int}\mathcal{D}_f$ pontban van támaszsíkja, akkor az egyértelmű."

I 23.) IGAZ-e? "Ha egy f függvénynek egy $P \in \operatorname{int}\mathcal{D}_f$ pontban van érintősíkja, akkor az egyértelmű."

I 24.) IGAZ-e? "Ha egy differenciálható f függvénynek egy $P \in \operatorname{int}\mathcal{D}_f$ pontban van támaszsíkja, akkor az egyértelmű."

I 25.) IGAZ-e? "Egy a $K := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x^2 + y^2 \leq 1\}$ egységkörön értelmezett folytonos f függvénynek legalább két különböző K-beli pontban van támaszsíkja."

I 26.) IGAZ-e? "Egy C^2 függvény adott pontbeli Hesse-mátrixa mindig ortogonális transzformációval diagonalizálható."

I 27.) IGAZ-e? "Egy $f :\in C^2(\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n)$ függvény adott pontbeli Jacobi-mátrixa (derivált-mátrixa) mindig ortogonális transzformációval diagonalizálható."