Jegyzetek a Matematika A2H tárgyhoz

Krenedits Sándor és Révész Szilárd György

Tartalomjegyzék

1. Végtelen numerikus sorok

Helyesebb lenne végtelen összegekről vagy szummákról beszéléni, de az elnevezés már meggyökeresedett.

Magyarázatképpen a geometriai sorok (valójában, ugye, azok is csak sorozatok) közismert összegzése szolgálhat: ha ugyanis egy kis (mondjuk 1/2 kvóciensű) geometriai sor(ozat) tagjait összeadjuk, akkor azt szokás geometriai sornak (geometriai sor összegképletének, geometriai sor összegének) nevezni. Ha ezt az összeadást egyre több tagra, végül $n \to \infty$ tagra elvégezzük, akkor az összegek nem válnak végtelenné, hanem egy véges határértékhez konvergálnak. Így jutunk a "végtelen geometriai sor", és aztán általában a "végtelen sorok" fogalmához. Ezért helyénvaló a sorozatokkal és a sorozatok konvergenciájával kapcsolatos imsereteink felidézésével kezdenünk a tárgyalást.

1.1. Sorozatok - rövid ismétlés

1.1. Definíció. *Az $a_n \subset \mathbb{R}$ $(\mathbb{C}, \mathbb{R}^d)$ sorozat konvergál az $a \in \mathbb{R}$ $(\mathbb{C}, \mathbb{R}^d)$ értékhez, ha $\forall \varepsilon > 0$ $\exists N = N(\varepsilon)$ küszöbérték, hogy $\forall n > N, |a_n - a| < \varepsilon$.*

1.1. Megjegyzés. *Az nagyon nem mindegy, hogy $\forall \varepsilon > 0$ $\exists N = N(\varepsilon)$, amikor is az N függhet az ε-tól, lehet más és más különböző ε értékre, vagy pedig hogy $\exists N$, hogy $\forall \varepsilon > 0$, amikor nem függhet az N az ε-tól. Akkor ugyanis ha $n = N+1, N+2, \dots$ (tehát ha $n > N$), akkor $|a_n - a| < \varepsilon$ teljesül minden $\varepsilon > 0$-ra; de akkor $|a_n - a| = 0$, tehát a sorozat úgy néz ki, hogy $a_1, a_2, \dots, a_N, a, a, \dots, a, \dots$.*
(Nem mindegy, hogy a "minden lánynak tetszik egy fiú" kijelentést hogy értjük:

- *azaz minden lányhoz létezik/található olyan fiú, aki tetszik neki (de más és más), vagy*

- *van olyan szívtipró férfiszépség fiú, hogy minden lánynak ő tetszik.*

A konvergencia eldöntéséhez több módon is nyúlhattunk.

1) Definíció szerint. Ekkor valahonnan kitaláljuk, kiszámoljuk a-t, és ellenőrizzük a definíciót (keresünk ε-hoz N_0-t).

2) Alkalmazunk már ismert konvergens sorozatokat és szabályokat.

3) Tétel: monoton, korlátos sorozat konvergens.

4) Cauchy konvergenciakritérium: Egy (x_n) sorozat Cauchy tulajdonságú $\Longleftrightarrow$ konvergens.
Cauchy tulajdonság: Nem tudjuk/használjuk magát a határértéket, de azt nézzük, hogy nagy n-re a sorozat tagjai egymáshoz már nagyon közel fognak esni: $\forall \varepsilon > 0$ $\exists N = N_0(\varepsilon)$, hogy $\forall m, n > N$-re $|x_n - x_m| < \varepsilon$.

1.2. Végtelen numerikus sorok

Sokszor egy sorozat elemeit összegként adjuk meg. Pl. $S_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{2^n} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k}$.

Ekkor a határértéket végtelen sor/végtelen összeg alakjában írhatjuk fel: $S := \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k}$.

1.2. Definíció. *Az $x_k \in \mathbb{R}$ $(\mathbb{C}, \mathbb{R}^d)$ elemek végtelen sora/összege:* $\sum_{k=1}^{\infty} x_k := \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} x_k \right)$*;*
A véges $S_n := \sum_{k=1}^{n} x_k$ összeg a sor n-edik részletösszege: tehát $\sum_{k=1}^{\infty} x_k := \lim_{n\to\infty} S_n$.

1.2. Megjegyzés. *Ez az improprius integálra hasonlít.* $\int_1^{\infty} f(x)dx$ *improprius integrál úgy volt értelmezve, hogy "egyre messzebb elmegyünk az integrálásban, és vesszük a hatáérértéket":* $\int_1^{\infty} f(x)dx := \lim_{T\to\infty} \int_1^{T} f(x)dx$*. Itt ugyenez történik, csak nem $\int$-lal, hanem $\sum$-val.*

Konvergencia eldöntése végtelen sorokra/összegekre:

1) Pl. a fenti $x_k = \frac{1}{2^k}$. Megsejthetjük, hogy $S = 1$, mert $s_n = \frac{\frac{1}{2^{n+1}} - \frac{1}{2}}{\frac{1}{2} - 1} = 1 - \frac{1}{2^n}$.
(Geometriai összegzés: $(q + q^2 + \ldots + q^n)(q-1) = q^{n+1} - 1$.)
Ha $\varepsilon > 0$ adott, akkor ha $n > N$, akkor $|s_n - S| = \left| \left(1 - \frac{1}{2^n}\right) - 1 \right| = \frac{1}{2^n} < \frac{1}{2^N}$ és ez $< \varepsilon \iff \frac{1}{\varepsilon} < 2^N$, azaz $\log_2 \left(\frac{1}{\varepsilon}\right) < N$. Tehát ha $\varepsilon > 0$ tetszőleges fix érték, akkor minden $N(\varepsilon) > \log_2 \left(\frac{1}{\varepsilon}\right)$ küszöb-index alkalmas: S_n konvergens sorozat, és $S_n \to 1$.
(Mindig $\varepsilon > 0$ a fix és N-re kell megoldani: $N = N(\varepsilon)$, nem $\varepsilon = \varepsilon_N$!)
Általában fontos sor a geometriai sor: ha $|q| < 1$,

$$\sum_{k=0}^{\infty} aq^k = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} aq^k = \lim_{n\to\infty} a\frac{1-q^{n+1}}{1-q} = \frac{a}{1-q}.$$

2) Szabályok: – a sorozatokra vonatkozó szabályokból következnek.

a) $\sum_{n=1}^{\infty} x_n = S \Rightarrow$, ha $y_n := ax_n$, akkor $\sum_{n=1}^{\infty} y_n = a \cdot S$.

b) $\sum_{n=1}^{\infty} (x_n + y_n) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n + \sum_{n=1}^{\infty} y_n$, $(s_n + t_n \to s + t)$.

Az is következik, hogy ha $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ divergens, akkor ($a \neq 0$ mellett) $\sum_{n=1}^{\infty} a \cdot x_n$ is, illetve $\sum_{n=1}^{\infty} (x_n + y_n)$ is, ha egyébként $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ konvergens volt.

Vigyázat! s_n, t_n konvergens $\Rightarrow s_n, t_n, s_n/t_n$ is $(t_n \to t \neq 0)$.

De végtelen soroknál $s_n \cdot t_n = \sum_{k=1}^{n} x_k \sum_{j=1}^{n} y_j = \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_k y_j$ sokkal bonyolultabb! Ez pedig egészen más, mint $\sum_{k=1}^{n} x_k y_k$, illetve $\sum_{k=1}^{\infty} x_k y_k$ kérdése!

3) Mikor lesz $s_n = \sum_{k=1}^{n} x_k$ monoton növő? Ha $s_{n+1} - s_n \geq 0$, azaz $x_{n+1} \geq 0$ $(\forall n \in \mathbb{N})$. Ezért

1.1. Tétel. *Ha $x_k \geq 0$, és $\sum_{k=1}^{n} x_k$ korlátos (felülről) $\Rightarrow$ konvergens.*

1.1. Példa. *Igazoljuk, hogy $\sum_{k=0}^{n} \frac{a^k}{k!}$ tetszőleges $a > 0$ mellett konvergens.*

(Nyilván ez egy pozitív (nem-negatív) tagú sor: $\frac{a^k}{k!} \geq 0$.)

Bizonyítás: Legyen $N > 2a$ egész és $k \geq N$. Ekkor

$$\frac{a^k}{k!} = \frac{a^N}{N!}\frac{a^{k-N}}{(N+1)\cdot \ldots \cdot k} \leq \frac{a^N}{N!}\cdot\frac{a^{k-N}}{(2a)^{k-N}} < \frac{a^N}{N!}\frac{1}{2^{k-N}} = B\frac{1}{2^{k-N}} \qquad \left(B := \frac{a^N}{N!},\ k \geq N\right).$$

Tehát $S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{a^k}{k!} \leq \underbrace{1 + a + \frac{a^2}{2} + \ldots + \frac{a^N}{N!}}_{A} + \sum_{k=N+1}^{n} \frac{a^k}{k!} \leq A + B\sum_{j=1}^{n-N}\frac{1}{2^j} \leq A + B.$

Mivel $x_k := \frac{a^k}{k!} \geq 0$, és $S_n \leq A + B$ korlátos marad $\Rightarrow$ konvergens.

4) Cauchy-kritériummal: Mit jelent $|s_m - s_n| \leq \varepsilon$? Például ha $m \geq n$, akkor $s_m - s_n = \sum_{k=n+1}^{m} a_k$, tehát azt jelenti, hogy $\left|\sum_{k=n+1}^{m} a_k\right| \leq \varepsilon$.

1.2. Példa. *Igazoljuk, hogy az $E(z) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}$ végtelen sor tetszőleges $z \in \mathbb{C}$ komplex szám esetén konvergens.*

Bizonyítás: Cauchy-kritériummal. Legyen $\varepsilon > 0$ tetszőlegesen adott: ehhez akarjuk megadni $N = N(\varepsilon)$ egy alkalmas értékét. Ha $m \geq n \geq N > 2a$, akkor $|z| \leq a$ esetén

$$|s_m - s_n| = \left|\sum_{k=n+1}^{m} \frac{z^k}{k!}\right| \leq \sum_{k=n+1}^{m} \frac{|z|^k}{k!} \leq \sum_{j=n+1-N}^{m-N} \frac{a^N}{N!}\cdot\frac{1}{2^j} \leq \frac{a^N}{N!}\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{2^j} = \frac{a^N}{N!}$$

a fenti számolás szerint. Ha ezen felül N még ahhoz is elég nagy, akkor $|s_m - s_n| \leq \frac{a^N}{N!} < \varepsilon$ is teljesül (mert $\frac{a^N}{N!} \to 0$ $(N \to \infty)$). Így igazolást nyert a Cauchy-tulajdonság teljesülése. (Ezt már tavaly is kiszámoltuk – most újra láttuk.)

Ebből a bizonyításból más is azonnal látszik.

1.3. Abszolút konvergencia

1.3. Definíció. *A* $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ *sor abszolút konvergens, ha* $\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|$ *konvergens.*

1.3. Példa. $E(z) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}$ *abszolút konvergens, mert* $\sum_{k=0}^{\infty} \left|\frac{z^k}{k!}\right| = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|z^k|}{k!} = E(|z|)$.

1.2. Tétel. *Ha* $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ *abszolút konvergens, akkor konvergens is.*

Bizonyítás: Cauchy-kritérium; $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ konvergens, $\Rightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists N, \forall m \geq n > N$-re $\sum_{k=n+1}^{m} |a_k| < \varepsilon$. De ekkor $\left|\sum_{k=n+1}^{m} a_k\right| \leq \sum_{k=n+1}^{m} |a_k| < \varepsilon \Rightarrow$ az eredeti $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ sorhoz és tetszőleges ε-hoz ugyanaz az N jó a Cauchy-kritériumban!

1.4. Példa. *Legyen* $\alpha_k \in \{+1, -1\}$ *tetszőleges előjelsorozat ("pénzfeldobás"). Ekkor a* $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha_k}{2^k}$ *végtelen sor konvergens.*

Bizonyítás: Ez abszolút konvergens: $\sum_{k=1}^{\infty} \left|\frac{\alpha_k}{2^k}\right| = \sum_{k=1}^{\infty} \left|\frac{1}{2^k}\right| = 1$

1.5. Példa. *Legyen* $e(\varphi) := \cos(\varphi) + i\sin(\varphi)$ *a* φ *szögű komplex egységvektor a komplex síkon. Ekkor ha* $\sum_{k=1}^{\infty} r_k$ *konvergens, és* $r_k \geq 0$ $(k \in \mathbb{N})$*, akkor* $\sum_{k=1}^{\infty} r_k e(\varphi_k)$ *tetszőleges* φ_k*-val is konvergens (mert abszolút konvergens).*

A Cauchy-kritérium segítségével nagyon sok fontos konvergenciakritériumot kaphatunk.

1.3. Tétel. *Ha* $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ *konvergens, akkor* $|x_k| \to 0$.

1.3. Megjegyzés. *Visszafele nem igaz, mindjárt látunk ellenpéldát.*

1. Bizonyítás, a definíció alapján. Legyen $\varepsilon > 0$, és tegyük fel, hogy $\sum_{k=1}^{\infty} x_k = x$. Ekkor $\exists N = N\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)$, $|S_n - x| < \frac{\varepsilon}{2}$, ha $n \geq N$. Így, ha $k > N$, akkor

$$|x_k| = |S_k - S_{k-1}| = |(S_k - x) - (S_{k-1} - x)| < |(S_k - x)| + |(S_{k-1} - x)| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon.$$

2. Bizonyítás, Cauchy-kritériummal. Ha $\varepsilon > 0, \exists N, \forall m > n > N$-re $|S_m - S_n| < \varepsilon$. Speciálisan ha $k > N$, akkor $|S_{k+1} - S_k| < \varepsilon$, azaz $|x_k| < \varepsilon$.

1.4. Tétel (Összehasonlító, vagy majoráns-minoráns kritérium). *Ha* $\exists K$ *konstans és* $M \in \mathbb{N}$ *index, hogy* $|x_k| \leq K y_k$ $(k \geq M)$*, és ha továbbá* *a.)* **(Majoráns kritérium)** $\sum_{k=1}^{\infty} y_k$ *konvergens, akkor* $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ *is (abszolút) konvergens;*

b.) **(Minoráns kritérium)** $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ *divergens, akkor* $\sum_{k=1}^{\infty} y_k$ *is divergens.*

Bizonyítás: Először is, a b.) rész az a.)-nak következménye (és megfordítva is): általában a logikában ha $P \Rightarrow Q$, az ugyanaz, minthogy $\neg Q \Rightarrow \neg P$, azaz ezek logikailag ekvivalensek.

$\forall \varepsilon > 0 \; \exists N, \forall m \geq n > N$-re $|y_{n+1} + \ldots + y_m| < \varepsilon$. De $|x_k| < Ky_k \Rightarrow$ akkor $|x_{n+1} + \ldots + x_m| \leq |x_{n+1}| + \ldots + |x_m| \leq Ky_{n+1} + \ldots + Ky_m = K|y_{n+1} + \ldots + y_m| < K\varepsilon$.
Tehát a $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ végtelen sor — sőt a $\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|$ sor is — a Cauchy-kritérium miatt konvergens.

Bizonyíthatunk a 4.) helyett a 3.) módszerrel is: ha $A := |x_1| + \ldots + |x_M|$ és $B := \sum_{k=1}^{\infty} y_k$, akkor $S_n := \sum_{k=1}^{n} |x_k| \leq |x_1| + \ldots + |x_M| + \sum_{k=M+1}^{n} Ky_k \leq A + K \cdot B$, korlátos $\Rightarrow$ konvergens.

1.6. Példa. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{5^k}{\sqrt{\log(3k)}k!}$ *konvergens.*

Valóban, mert $\frac{5^k}{\sqrt{\log(3k)}k!} < \frac{5^k}{k!}$, és erről tudjuk, hogy $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{5^k}{k!} = E(5)$ konvergens ($= e^5$).

Fontos példa a harmonikus sor.

1.1. Állítás. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = \infty$ *(divergens).*

1.1. Következmény. *A* $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^p}$ *"p-harmonikus sor" $p < 1$-re divergens.*

Bizonyítás: Bármilyen nagy is N, ha $n > N$ tetszőleges, és $m := 2n$-et választunk, akkor

$$s_m - s_n = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n} \geq \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} + \ldots + \frac{1}{2n} = \frac{n}{2n} = \frac{1}{2}.$$

Tehát ha $\varepsilon < \frac{1}{2}$ volt, akkor ahhoz semmilyen N sem jó a Cauchy tulajdonsághoz; $\sum \frac{1}{k}$ nem Cauchy $\Rightarrow$ nem konvergens.

Persze ha $p < 1$, akkor $n^p < n$, tehát $1/n^p > 1/n$, azaz a minoráns-kritérium szerint $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ is divergens.

1.4. Megjegyzés. *A harmonikus sor arra is példa, hogy $x_k \to 0$, de* $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ *divergens.*

1.2. Következmény. *A* $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k}$ *ú.n. Leibniz-sor nem abszolút konvergens.*

1.5. Megjegyzés. *Ez ezért érdekes, mert azért* $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k}$ *konvergens sor (még ha nem is abszolút konvergens). (A konvergencia bizonyítását később látni fogjuk több módon is.)*

Az abszolút konvergencia maga után vonja a konvergenciát, emellett a majoráns-kritérium értelmében sokszor a konvergencia bizonyításához úgy is el tudunk jutni, hogy sikerül abszolút értékben megfelelően felülbecsülni a végtelen sor tagjait: ilyenkor ha a majoráló sor konvergál, akkor a felülbecsült sor is abszolút konvergens, tehát konvergens is lesz. Ezért tehát az abszolút konvergencia hasznos és fontos.

Azt már láttuk (és tényleg triviális is), hogy konvergens sort (a sor tagjait) egy konstans együtthatóval megszorozva, illetve konvergens sorokat (a sorok tagjait) összeadva, az elvárt szabályok teljesülnek. Nézzünk most egy másik, végesből ismert alapszabályt, a tagok összeadása közti kommutativitást: igaz-e, hogy végtelen soroknál is a szumma alatt felsorolt végtelen sok összeadandó tetszőleges sorrendben adható össze?

Mivel végtelen sok tagról van szó, tisztázzuk, mit is értünk a sor tagjainak más sorrendbe rendezésén, más sorrendbenvaló összeadásán. Végesben ugye ez egyértelmű: mondjuk $a_1 + a_2+a_3+a_4$ helyett tekintjük mondjuk azt az összeadási sorrendet, hogy $a_3+a_2+a_4+a_1$. Azaz ha k_1, k_2, k_3, k_4 az $1, 2, 3, 4$ számok egy tetszőleges felsorolása valamilyen más sorrendben, akkor az $a_{k_1} + a_{k_2} + a_{k_3} + a_{k_4}$ összeget kell tekintsük.

A kombinatorikában tanultuk, hogy ez azt jelenti, hogy a $H := \{1, 2, 3, 4\}$ halmaz elemeit permutáljuk, sorrendbe rakjuk: $\sigma H \leftrightarrow H$ egy permutáció, vagy sorrendbe rakás, ha a $k_j := \sigma(j)$ értékek minden elemet pontosan egyszer tartalmaznak, sorolnak fel, azaz más szóval, haσ bijektív (kölcsönösen egyértelmű) leképezésH-ból H-ra. Végtelen halmazokra tehát így lehet értelmezni az "átrendezést": tekintünk egy $\sigma : H \leftrightarrow H$ bijektív megfeleltetést, és eszerint a permutáció szerint rakjuk sorrendbe az elemeket.

Az nem elegendő, hogy mondjuk a $\sigma(j)$-k között megtalálható minden k index, mert az is baj, ha többször előfordul egy k index, azaz egy k összeadandó: és az sem jó, ha minden $\sigma(j)$ különböző (de esetleg kihagynak valamilyen indexet). Végesben a mondjuk 4 elem között ha minden $\sigma(j)$ különböző, akkor mindegyik egyszer is jelenik meg; és megfordítva, ha mindegyik szám megjelenik σ-képként, akkor mindegyik csak egyszer jelenhet meg. De végtelenben ez nem teljesül: például $\sigma(n) := n^2$ csupa különböző elemeket rendel $\mathbb{N}$ minden eleméhez, de csak a négyzetszámokat kapjuk meg, vagy pl. $\sigma(j) := [n/3]$ minden $\mathbb{N}$-beli elemet előállít – háromszor is.

Tehát egy végtelen összeg tagjainak átrendezését egy $\sigma : \mathbb{N} \leftrightarrow \mathbb{N}$ permutációval (kölcsönösen egyértelmű, bijektív leképezéssel) fogjuk definiálni: ez felel meg annak a kritériumnak, hogy minden index (és így minden a_k tag a végtelen sorban felsorolt összeadandókból) pontosan egyszer lépjen fel az átrendezett összegben is.

1.4. Definíció. *Legyen* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *egy tetszőleges végtelen sor, és* $\sigma : \mathbb{N} \leftrightarrow \mathbb{N}$ *egy permutáció. Ekkor a végtelen sor* σ *szerinti átrendezése alatt a* $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)}$ *végtelen sort értjük: speciálisan, a* σ*-átrendezett sor konvergens, és limesze* α*, ha* $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_{\sigma(k)} = \alpha$.

Az ember azt várná, hogy a kommutativitás szabálya a végtelen sorok összegzésére is érvényes maradjon. Ez azonban csak részben igaz, és éppen ezért az abszolút konvergencia még fontosabbnak fog mutatkozni a számunkra.

1.5. Tétel. *Ha* $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ *egy abszolút konvergens sor, amelynek összege* $\sum_{k=0}^{\infty} a_k = a$, *és ha* $\sigma : \mathbb{N} \leftrightarrow \mathbb{N}$ *egy átrendezése (permutációja) a természetes számoknak, akkor az eszerint átrendezett* $\sum_{k=0}^{\infty} a_{\sigma(k)}$ *sor is abszolút konvergens, és* $\sum_{k=0}^{\infty} a_{\sigma(k)} = a$.

Bizonyítás: Legyen $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k| = A(< \infty)$. $\forall \varepsilon > 0\ \exists N$, hogy $\forall n \geq N$-re – így magára az N-re is – ennek az abszolút sornak a részletösszegei már ε-nál jobban megközelítik a határértéket (∞ összeget): $\left| \sum_{k=0}^{N} |a_k| - A \right| < \varepsilon$, azaz $\sum_{k=N+1}^{\infty} |a_k| < \varepsilon$.

Az új σ sorrendben valamilyen $k_0, \dots, k_N$ indexek mellett (pontosan egyszer) fellépnek a $0, \dots, N$ számok: $\sigma(k_0) = 0, \dots, \sigma(k_N) = N$. Legyen $M := \max\{k_0, k_1, \dots, k_N\}$.

Ekkor ha $m \geq M$, akkor az $S_m^\sigma = \sum_{k=0}^{m} a_{\sigma(k)}$ összeg tagjai között ott szerepel $a_{\sigma(k_0)} = a_0$, $a_{\sigma(k_1)} = a_1, \dots, a_{\sigma(k_N)} = N$, tehát az $S_N = a_0 + a_1 + \dots + a_N$ eredeti rész-összeg minden tagja, így $|S_m^\sigma - S_N| = \left| \sum_{\substack{k=0 \\ k \neq k_j\,(j=0,\dots,N)}}^{m} a_{\sigma(k)} \right| \leq \sum_{k=N+1}^{\infty} |a_k| < \varepsilon \qquad (1)$

Ezért $|S_m^\sigma - a| \leq |S_m^\sigma - S_N| + |S_N - a| < 2\varepsilon \quad (\forall m \geq M)$, tehát $\sum_{k=0}^{\infty} a_{\sigma(k)} = a$.

Ugyanezt alkalmazva $|a_k|$-re, az abszolút konvergencia (ugyanazon $\sum_{k=0}^{\infty} |a_n| = A = \sum_{k=0}^{\infty} |a_{\sigma(k)}|$ érték mellett) is következik.

1.6. Megjegyzés. *Az állításnak az csak egy része, hogy ha* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *abszolút konvergens sor, akkor tagjait bármilyen más* $\sigma : \mathbb{N} \leftrightarrow \mathbb{N}$ *sorrendben összeadva, a* $\sum_{n=0}^{\infty} a_{\sigma(n)}$ *sor is abszolút konvergens. Ha csak ezt akarjuk igazolni (és a végtelen összegek egyenlőségével nem törődünk), akkor azt közvetlenül megkaphatjuk egyszerűbben is.*

Bizonyítás: $\sum |a_n|$, $\sum |a_{\sigma(n)}|$ pozitív tagú, így részletösszegeik növekvőek.

Tegyük fel, hogy $\sum |a_n| \leq A$, és jelölje tetszőleges $n \in \mathbb{N}$-re $S_n^\sigma := \sum_{k=0}^{n} |a_{\sigma(k)}|$.

Legyen $m := \max\{\sigma(0), \sigma(1), \dots, \sigma(n)\}$. Ekkor a $\sigma(1), \dots, \sigma(n)$ indexek mind fel vannak sorolva a $0, 1, \dots, m$ indexek között. Ezért $S_n^\sigma \leq |a_0| + |a_1| + \dots + |a_m| \leq S_m \leq A \Rightarrow$ az átrendezett sor abszolútértékeiből képzett sor részletösszegei is korlátosak $\Rightarrow$ konvergensek $\Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} |a_{\sigma(k)}|$ abszolút konvergens $\Rightarrow$ konvergens is.

1.3. Következmény. *Írhatjuk akár* $\sum_{k\in\mathbb{N}} a_k$ *vagy* $\sum\{a \in H\}$ *vagy* $\sum_{a\in H} a$ *alakban is az* <u>*abszolút*</u> *konvergens szummákat* ($|H| = \omega = \#\mathbb{N}$)*. Elég valahogyan megadnunk a halmazt, amelynek tagjait össze kell adni, mert minden sorrendben összegezve ugyanaz az eredmény.*

1.7. Megjegyzés. *Ez az utóbbi megjegyzés különösen a hasznunkra válik akkor, ha eleve úgy vannak megadva a sor elemei, tagjai, hogy azok indexezése nincsen egy meghatározott sorrendbe rakva, hanem a sorrendet is nekünk kell hozzá megadni. Ilyenek lesznek például a többszörös szummák — pl. a Cauchy-szorzatnál — amelyben a* $\sum_k \sum_j a_{k,j}$ *típusú végtelen sorban a tagok sorrendjét abszolút konvergencia esetén tetszőlegesen választhatjuk meg, tehát pl. csoportosíthatjuk azokat a* $k + j$ *szerint növekvőleg, de akár másként is.*

1.4. Feltételesen konvergens sorok

Fentebb tehát megmutattuk, hogy az elvárt kommutativitási szabály teljesül, ha a kérdéses sor abszolút konvergens. Vajon ez mindig igaz, és csak arra van szükség, hogy kicsit ügyesebb bizonyítást adjunk? Nos, éppen ellenkezőleg: az átrendezhetőség egyetlen más sorra sem fog teljesülni! Sőt, nagyon nem fog teljesülni!

<u>Figyelem!</u>

Ha egy sor <u>nem</u> abszolút konvergens, akkor a sorrendet megváltoztatva <u>bármi megtörténhet</u>!

1.6. Tétel. *(Riemann) Ha egy sor feltételesen (=nem abszolút) konvergens, akkor éppen ellenkező jelenség lép fel: a sor átrendezései lehetnek divergensek (*$+\infty$*-hez,* $-\infty$*-hez, vagy bárhogyan oszcillálva) vagy konvergálhatnak is, mégpedig bármilyen előírt értékhez.*

Ennek oka: "$\infty - \infty$"; $\sum_{a_k>0} a_k = \infty$, $\sum_{a_k<\infty} a_k = -\infty$.

A Riemann-féle átrendezési tételt nem bizonyítjuk (bár lehetne), de a tényről tudni kell!

1.7. Példa. *Említettük, hogy a* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ *ú.n. Leibniz-sor vagy alternáló harmonikus sor konvergens. Ugyanakkor azonban van olyan* σ *átrendezése, amely* $+\infty$*-hez divergál.*

A konvergencia később (Leibniz tételéből) sokkal általánosabban is ki fog jönni.

Itt egy másik gondolatmenetet is megemlítünk, ami azt használja fel, hogy később (az integrál-kirtériumnál) majd igazoljuk, hogy a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ sor konvergens. Ennek ismeretében u.i. a majoráns-kritériumot alkalmazhatjuk annak igazolására is, hogy $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)(2k)}$ is konvergens.

Ez utóbbi sornak a részletösszegei viszont $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(2k-1)(2k)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k} = -S_{2n}$ alakúak, ahol általában S_n a Leibniz-sorunk n-edik részletösszegét jelöli. Tehát azt találjuk, hogy $S_{2n} \to a$ valamilyen véges a határértékkel. Viszont $S_{2n+1} - S_{2n} = -\frac{1}{2n+1} \to 0$ $(n \to \infty)$, tehát $S_{2n+1} \to a$ is teljesül, és akkor maga $S_n \to a$ is fennáll (minden $\varepsilon > 0$ értékhez $\exists N_0(\varepsilon)$ ...), azaz a Leibniz-sor részletösszegeinek sorozata konvergens, a Leibniz-sor konvergál.

A példa lényeges része azonban az, hogy mindemellett mégiscsak van olyan átendezése a sornak, ami végtelenhez divergál. Valóban, konstruáljuk meg σ-t úgy, hogy legelőször is vesszük a -1-et, aztán a $+1/2$-et, aztán a -1/3-ot, aztán a $+1/4, +1/6$ és a $+1/8$-ot, majd a $-1/5$-öt, a $+1/10$-et, a $+1/12, \dots, +1/20$-ot, és általában minden egyes (negatív előjelű) páratlan reciprok után a soron következő páros reciprokkal együtt *sorban az összes soron következő páros reciprokokat a számunk kétszereséig*; és csak ezután a következő negatív előjelű páratlan szám reciprokot, de egyedül, és utána megint sok párosat, stb.

Egy olyan S_n^σ részletösszeg, amelyben pont egy páratlan szám (negatív előjellel vett) reciprokáig, mondjuk éppen $-1/(2m+1)$-ig mentünk el, így fog kinézni:

$$S_n^\sigma = -1+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{8}-\frac{1}{5}+\frac{1}{10}+\dots\frac{1}{20}-\frac{1}{7}+\frac{1}{22}+\dots+\frac{1}{44}-\frac{1}{9}+\dots+\frac{1}{2\ell}+\dots+\frac{1}{4\ell}-\frac{1}{2m+1}.$$

Már a harmonikus sor divergenciájánál láttuk, hogyan lehet ezt alulról megbecsülni: itt ugye olyan páros reciprokokból álló részek vannak, hogy

$$\frac{1}{2\ell}+\dots+\frac{1}{4\ell} \geq \frac{1}{4\ell}+\frac{1}{4\ell}\dots+\frac{1}{4\ell} = \frac{\ell+1}{4\ell} > \frac{1}{4}.$$

Tehát $S_n^\sigma \geq -1+1/4-1/3+1/4-1/5+1/4-\dots+1/4-1/(2m+1) = \frac{m}{4} - \sum_{k=0}^{m} \frac{1}{2k+1}$. De itt $k \geq 2$ esetén a levont tagok már csak $\frac{1}{2k+1} \leq 1/5$ nagyságúak, ezért $S_n^\sigma \geq m/4-1-1/3-(m-2)/5 > -1+m/20 \to +\infty$.

Az alternáló harmonikus sor konvergenciáját fentebb a $\sum_n 1/n^2$ sor (eddig még nem is bizonyított) konvergenciájára hivatkozva igazoltuk. De az alternáló harmonikus sor konvergenciájánál sokkal általánosabb Leibniz következő tétele.

1.7. Tétel. *(Leibniz) Ha* $a_k \searrow 0$ *(monoton csökken 0-hoz), akkor a váltakozó előjelű* $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k a_k$ *ú.n.* <u>*alternáló*</u> *vagy más néven* <u>*Leibniz-típusú*</u> *sor konvergens (még ha esetleg nem is abszolút konvergens).*

Jelölje továbbá $s := \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k a_k$ *a sor összegét, és* $s_n := \sum_{k=1}^{n}(-1)^k a_k$ *a sor* n*-edik részletösszegét! Ekkor a sor* n*-edik részletösszegének közelítési hibájára fennáll* $|s-s_n| \leq a_{n+1}$.

<u>Bizonyítás:</u> Ha $m \geq n$, n páros (azaz akkor $n+1$ páratlan) , és mondjuk m is páros, akkor kettesével összefogva a tagokat $s_m - s_n = -\underbrace{a_{n+1}+a_{n+2}}_{\leq 0} - \underbrace{a_{n+3}+a_{n+4}}_{\leq 0} - \dots + -\underbrace{a_{m-1}+a_m}_{\leq 0} \leq 0$, és ha m páratlan, akkor $s_m - s_n = -\underbrace{a_{n+1}+a_{n+2}}_{\leq 0} - \underbrace{a_{n+3}+a_{n+4}}_{\leq 0} - \dots + -\underbrace{a_{m-2}+a_{m-1}}_{\leq 0} - a_m \leq 0$, azaz mindenképpen fenáll $s_m - s_n \leq 0$.

Másfelől azonban ha m páros, akkor $s_m - s_n \geq -a_{n+1} + \underbrace{(a_{n+2}-a_{n+3})}_{\geq 0} + \underbrace{\dots}_{\geq 0} + a_m \geq -a_{n+1}$, és ha m páratlan, akkor $s_m - s_n \geq -a_{n+1} + \underbrace{(a_{n+2}-a_{n+3})}_{\geq 0} + \underbrace{\dots}_{\geq 0} + \underbrace{a_{m-1}-a_m}_{\geq 0} \geq -a_{n+1}$. Tehát végül is $-a_{n+1} \leq s_m - s_n \leq 0$ tetszőleges páros n és $m \geq n$ esetén.

Ha n páratlan, akkor teljesen hasonlóan $0 \leq s_m - s_n < a_{n+1}$ adódik. Ezért akár páros, akár páratlan n-re és $m \geq n$ mellett $|s_m - s_n| \leq a_{n+1}$.

Összességében tehát ha N-et úgy választjuk, hogy $a_N < \varepsilon$ (ami elég nagy N-re bekövetkezik, mivel $a_n \searrow 0$), akkor minden $m \geq n \geq N$-re $|s_m - s_n| \leq a_{n+1} \leq a_N < \varepsilon$ adódik, azaz s_n Cauchy tulajdonságú, és így konvergens lesz.

Végül tekintsünk most egy fix n mellett határérték-képzést $m \to \infty$-re! Mivel $|s_m - s_n| \leq a_{n+1}$, ebből $|s - s_n| = \lim_{m\to\infty} |s_m - s_n| \leq a_{n+1}$, amint állítottuk.

1.5. További konvergencia-kritériumok

Az összehasonlító kritériumból azonnal adódnak más, a gyakorlatban könnyen használható kritériumok.

1.8. Tétel. *(Gyökkritérium.) Ha* $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ *olyan végtelen sor, hogy valamilyen* $q < 1$ *és* $N \in \mathbb{N}$ *küszöb-index mellett* $\sqrt[n]{|u_n|} \leq q$ $\forall n \geq N$*-re, akkor* $\sum u_k$ *abszolút konvergens.*

1.8. Megjegyzés. *Vigyázat,* $\sqrt[n]{|u_n|} \leq 1$ *nem elég, például* $\sum_{i=1}^{\infty} 1 = \infty$, $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty$*!*

Bizonyítás: Ha $\sqrt[n]{|u_n|} \leq q \Rightarrow |u_n| \leq q^n$, tehát a q kvóciensű geometriai sor majorálja a $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ sort $\Rightarrow$ abszolút konvergens.

1.9. Tétel (Speciális gyökkritérium). *Ha a gyökkritériumban felírt* $\sqrt[n]{|u_n|}$ *mennyiségre limesz is létezik, akkor a* $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ *sor* $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|u_n|} < 1$ *esetén abszolút konvergens, és* $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|u_n|} > 1$ *esetén divergens.*

1.9. Megjegyzés. *Ugyanakkor ha* $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|u_n|} = 1$*, akkor abból nem következik semmi: lehetséges konvergencia is, de lehetséges divergencia is!*

Bizonyítás: Jelölje $\alpha := \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|u_n|}$.

Először tekintsük azt az esetet, amikor $\alpha < 1$. Legyen ekkor továbbá $q := \frac{1+\alpha}{2} (< 1)$ és $\varepsilon := q - \alpha = \frac{1-\alpha}{2} (> 0)$. Ekkor persze $n > n_0$-ra $\sqrt[n]{|u_n|} < \alpha + \varepsilon = q < 1$, azaz $|u - n| \leq q^n$, és a (konvergens) $q < 1$ kvóciensű geometriai sorral majorálhajuk $\sum u_n$-et $\Rightarrow \sum_n u_n$ abszolút konvergens.

Ha $\alpha > 1$, akkor persze $\sqrt[n]{|u_n|} \geq 1$ $(n \geq n_0)$, tehát egyúttal $|u_n| \geq 1$ is és ezért nem tart 0-hoz az $u_n \Rightarrow \sum_n u_n$ divergens.

1.8. Példa. $E(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}$. $\sqrt[n]{\left|\frac{z^n}{n!}\right|} = \frac{|z|}{\sqrt[n]{n!}} \leq |z| \frac{1}{\{(n/2)^{n/2}\}^{1/n}} = \frac{|z|}{\sqrt{n/2}}$

Ez a kifejezés $\to 0$*, így a speciális gyökkritérium értelmében konvergencia van* $\forall z \in \mathbb{C}$*-re.*

1.10. Tétel. *(Hányadoskritérium.) Ha* $n \geq N$*-re* $\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| \leq q < 1$*, vagy* $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| < 1$*, akkor a* $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ *végtelen sor abszolút konvergens.*

Bizonyítás: Ha $\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| \to \alpha < 1$, akkor $\Rightarrow n > N_0(\frac{1-\alpha}{2})$-re $\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| < \alpha + \frac{1-\alpha}{2} =: q < 1$.
Tehát elég az első, általánosabb feltétel mellett bizonyítani. Ha az fennáll, akkor $|u_n| \leq |u_N| \cdot \overbrace{q \cdot \ldots \cdot q}^{n-N \text{ darab}} = \frac{|u_N|}{q^N} \cdot q^n = C \cdot q^n$. Mivel $n \geq N$-re $|u_n| \leq C \cdot q^n$, és a $\sum_{n=0}^{\infty} C \cdot q^n = C\frac{1}{1-q}$ geometriai sor konvergens, azért a majoráns-kritérium szerint $\sum_n |u_n|$ is konvergens.

1.10. Megjegyzés. *Ha* $\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| \geq 1$ $(n \geq N)$*, akkor* $|u_n| \geq |u_N|$ $n \geq N$*-ra,* $\not\to 0$*, divergens.*

1.11. Tétel (Határérték teszt). *Legyenek* $u_n, v_n \geq 0$.
Ha $\exists \lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} < \infty$*, akkor* $\sum_{n=0}^{\infty} v_n$ *konvergens* $\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} u_n$ *konvergens.*
Ha $\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = c \ (\neq 0, \infty)$*, akkor* $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ *konvergens* $\iff \sum_{n=0}^{\infty} v_n$ *konvergens.*

Bizonyítás: Ha egyszer $\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} < \infty$, akkor $n \geq N$ esetén $|u_n| \leq K v_n$, tehát alkalmazhatjuk a majoráns-kritériumot, amely szerint ha $\sum_n v_n$ konvergens, akkor $\sum_n u_n$ is (abszolút) konvergens.
Ha a határérték véges, de nem nulla, akkor persze a reciprok sorozat határértéke is véges és nem nulla, tehát a szerepek megcserélhetőek és a két sor konvergenciája ekvivalens.

Végtelen összegek hasonlóak a ∞ improprius integrálhoz. Pl. tudjuk a következőt is:

1.12. Tétel. *Ha* $f(x) \searrow 0$ *függvény, akkor az* $\int_0^{\infty} f(x)dx$ *improprius integrál pontosan akkor konvergens, ha* $\int_0^T f(x)dx$ *korlátos.*

Bizonyítás: Ha $R(T) := \int_0^T f(x)dx$, akkor $f \geq 0$ miatt $R(T) \nearrow$ (monoton növő) is, tehát pontosan akkor lesz korlátos, ha konvergens.

1.13. Tétel (Integrál-kritérium v. integrál-összehasonlító kritérium). *Tegyük fel, hogy* $f(x) \geq 0, f \searrow 0$ *függvény. Ekkor* $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ *konvergens* $\iff \int_1^{\infty} f(x)dx$ *konvergens.*

Bizonyítás: Pozitív tagú sorra, illetve nem-negatív függvényre a konvergencia a korlátossággal egyenértékű, mivel $S_n := \sum_{k=1}^{n} f(k)$, illetve $R(T) := \int_1^T f(x)\, dx$ n-ben, illetve T-ben monoton növő. Ezért elegendő a felülről korlátosság kérdését tekinteni. $N := [T]$-vel:

$$R(T) \le \int_1^{N+1} f = \int_1^2 f + \ldots + \int_N^{N+1} f \le f(1) + \ldots + f(N) = S_N$$
$$\le f(1) + \int_1^2 f + \ldots + \int_{N-1}^N f = f(1) + R(N) \le f(1) + R(T),$$

tehát $R(T)$ korlátos $\iff$ S_N korlátos.

1.4. Következmény. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ *p-harmonikus sor* $< \infty \iff \int_1^{\infty} \frac{dx}{x^p} < \infty \iff p > 1$.

1.5. Következmény. *A* $\zeta(\alpha) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ *sor konvergens* $\iff \alpha > 1$. *Sőt, komplex* $\alpha + i\beta$ *értékek esetén is a* $\zeta(\alpha+i\beta) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha+i\beta}}$ *sor (abszolút) konvergens, ha* $\alpha := Re(\alpha+i\beta) > 1$.

Bizonyítás: Fel kell használjuk a hatványozás és az exponenciális függvény azonosságait, valamint azt is, hogy $|e^{it}| = 1$ $(t \in \mathbb{R})$, amit majd később, az Euler-formuláknál fogunk tanulni. Ez utóbbit tehát előre elfogadva, felírhatjuk, hogy $|\frac{1}{n^{\alpha+i\beta}}| = |\exp(-(\alpha+i\beta)\log n)| = |\exp(-(\alpha \log n)\exp(i\beta \log n)| = \exp(-(\alpha \log n) \cdot 1 = \frac{1}{n^\alpha}$ miatt $\alpha > 1$-re a sor abszolút konvergens.

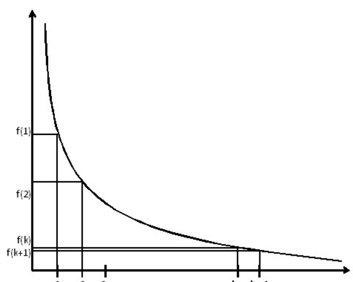
1.11. Megjegyzés. $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^\alpha} = \begin{cases} \frac{1}{\alpha-1} & \alpha > 1 \\ \infty & \alpha \le 1 \end{cases}$ *, de* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ *általában nem is ismert.*

1.12. Megjegyzés. $\zeta(z)$ *a híres Riemann-féle zeta függvény, amire a mai matematika legnagyobb nyitott problémája vonatkozik: a Riemann-sejtés.*

Házi feladat

1.) Határozzuk meg, mely $x \in \mathbb{R}$ esetén lesz konvergens a $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k}$ sor!

2.) Határozzuk meg, mely $x \in \mathbb{R}$ esetén lesz konvergens a $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^x}$ sor!



1.6. Sorok szorzása

1.5. Definíció. *Legyenek* $(a_k)_{k=0}^{\infty}$, $(b_k)_{k=0}^{\infty}$ *tetszőleges valós sorozatok, vagy* $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k$, $\sum\limits_{k=0}^{\infty} b_k$ *tetszőleges (formális) sorok. Ekkor ezeknek a sorozatoknak vagy soroknak az Hadamard-szorzata (ejtsd: Ádámár-szorzata) alatt a* $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k b_k$ *formális sort értjük.*

1.13. Megjegyzés. *Véges koordináta-n-esekre, azaz* $\mathbb{R}^n$ *elemeire a megfelelő mennyiség az* $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_n)$ *és a* $\mathbf{b} = (b_1, \ldots, b_n)$ *vektorok* $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle := \sum_{k=1}^{n} a_k b_k$ *skaláris szorzata, amit lineáris algebrából tanulunk.*

1.14. Tétel. *Ha* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ *abszolút konvergens, és* b_k *korlátos, akkor a* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k b_k$ *Hadamard-szorzat is abszolút konvergens.*

Bizonyítás: Ha $|b_k| \leq K$, akkor $|a_k b_k| \leq K|a_k|$ $\Rightarrow$ a majoráns kritérium alkalmazható.

1.6. Következmény. *Ha* $\sum\limits_{k} a_k, \sum\limits_{k} b_k$ *konvergensek, és legalább az egyikük abszolút konvergens, akkor a* $\sum\limits_{k} a_k b_k$ *Hadamard-szorzat is az.*

Bizonyítás: Legyen pl. $\sum\limits_{n} a_n$ abszolút konvergens. Mivel $\sum\limits_{k} b_k$ is konvergens, ezért $|b_k| \to 0$, tehát korlátos. Ezért alkalmazható a fenti tétel.

1.9. Példa. *Ha mind a két sor csak feltételesen konvergens, akkor előfordulhat, hogy az Hadamard-szorzat divergens lesz! Például* $a_k = b_k = \dfrac{(-1)^k}{\sqrt{k}}$ *esetén* $\sum\limits_{k} a_k = \sum\limits_{k} a_k = \sum\limits_{k} \dfrac{(-1)^k}{\sqrt{k}}$ *konvegens alternáló (Leibniz típusú) sorok, de* $\sum\limits_{k} a_k b_k = \sum\limits_{k} \dfrac{1}{k} = \infty$.

A tagonkéntim vagy Hadamard-szorzatnak nem sok köze van a végtelen sorok természetéhez, szerkezetéhez. Fontosabb lesz számunkra a következő definíció.

1.6. Definíció (Cauchy-szorozat). $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \sum\limits_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n$, *ahol* $c_n := a_0 b_n + \ldots + a_n b_0$. *Az összes olyan párosítás, ahol az indexek összege éppen n.*

1.7. Definíció (Végtelen sorok Cauchy-szorzata). *Ha* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ *és* $\sum\limits_{l=j}^{\infty} b_j$ *két (formális) sor, akkor a Cauchy-szorzatuk a* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n$ *(formális) sor, ahol* $c_n := \sum\limits_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$.

1.14. Megjegyzés. *Tehát a Cauchy-szorzat* $a_0b_0 + \cdots + (a_0b_n + a_1b_{n-1} + \ldots + a_nb_0) + \ldots$. *Vegyük észre, hogy az összes* a_kb_j *típusú szorzatot pontosan egyszer vesszük bele az összegzésbe: abban a* c_n*-ben, amelyre* $n = k + j$ *teljesült. Tehát vesszük az összes* $\{a_kb_j : k \in \mathbb{N}, j \in \mathbb{N}\}$ *szorzatokat, és ezeket az indexek összege szerint haladva felsoroljuk.*

Azt is megfigyelhetjük, hogy egy-egy ilyen c_n *az* $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ *rácson éppen a* $k+j=n$ *egyenesre eső* (k,j) *indexpárokon vett* $n+1$ *tagú részösszegnek felel meg.*

1.15. Tétel. *Ha* $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k = A$, $\sum\limits_{j=0}^{\infty} b_j = B$ *abszolút konvergens sorok, akkor a Cauchy-szorzatuk, sőt a* $\sum\limits_{k=0}^{\infty}\sum\limits_{j=0}^{\infty} a_kb_j = \sum\limits_{(k,j)\in\mathbb{N}^2} a_kb_j$ *kettős sor is abszolút konvergens, és* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n = \sum\limits_{(k,j)\in\mathbb{N}^2} a_kb_j = \sum\limits_{k=0}^{\infty}\sum\limits_{j=0}^{\infty} a_kb_j = A\cdot B.$

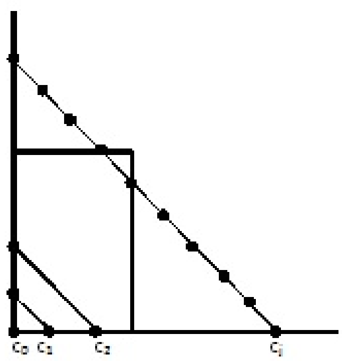
1.15. Megjegyzés. *Tehát "ez az igazi szorzás" a végtelen soroknál. Véges esetben is ezt kell tenni: minden tagot mindegyikkel össze kell szorozni az összegek felbontásakor (a disztributív szabály szerint) és aztán ezt a sok szorzatot mind össze kell adni. Az, hogy ezek után (abszolút) konvergens sort kapunk és annak összege éppen a sorok összegének szorzata, úgy értelmezhetjük, hogy végtelenszer végtelen összegekre is érvényes a disztributív szabály — már ha abszolút konvergensek.*

<u>Bizonyítás:</u> Cauchy-kritériummal (tavaly igazából már kiszámoltuk $E(z)E(w)$-re).

Ugye, ha egy sor abszolút konvergens, a tagjait akármilyen sorrendben összeadhatjuk. Tehát igazából elegendő a tagok halmazát megadni – összeadni akárhogyan lehet ezt a legelemibb felbontásra a $\sum_{(k,j)\in\mathbb{N}^2} a_kb_j$ sorra alkalmazzuk.

Mivel $\sum\limits_{k} a_k$ és $\sum\limits_{j} b_j$ abszolút konvergens sorok, $S_n := \sum\limits_{k=1}^{n} |a_k| \le L$ $(\forall n)$, azaz a részletösszegek korlátosak, és hasonlóan, $T_m := \sum\limits_{j=1}^{m} |b_j| \le M$ $(\forall n)$. Ezért a Cauchy-szorzatra és a kettős szummára $\sum\limits_{n=0}^{N} |c_n| \le \sum\limits_{n=0}^{N}\sum\limits_{k=0}^{n} |a_k||b_{n-k}| \le \sum\limits_{k=0}^{N} |a_k| \sum\limits_{j=0}^{N} |b_j| \le L\cdot M \Rightarrow \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n$ és $\sum\limits_{(k,j)\in\mathbb{N}^2} a_kb_j$ is abszolút konvergensek.

Legyenek A_n, B_n, C_n a megfelelő sorok, illetve a Cauchy-szorzat sor n-edik részletösszegei!



Tehát $C := \sum_{j=0}^{\infty} c_j$ abszolút konvergens, akárcsak a $D := \sum_{(k,l)\in\mathbb{N}^2} a_k b_l$ kettős, azaz "dupla" sor, és mindegy, milyen sorrendben adjuk össze a tagjaikat, ugynaz az összegük, speciálisan $C = D$. A Cauchyban szereplő "átlós" felsorolás helyett inkább a "négyzetes" sorrendet tekintve viszont olyan részletösszegek adódnak, amelyekre $D_n := \sum_{k=0}^{n} \sum_{j=0}^{n} a_k b_j = A_n B_n \to AB \Rightarrow C := \sum_{j=0}^{\infty} c_j = D = AB$.

<u>**Alapvető alkalmazás:**</u>

1.16. Tétel. *Az* $e^z := \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n = E(z) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ *függvény teljesíti az úgynevezett Cauchy-féle muliplikatív függvényegyenletet:* $E(z)E(w) = E(z+w)$.

<u>Bizonyítás:</u> Abszolút konvergensek és $E(z+w) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} z^k w^{n-k} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{z^k}{k!} \frac{w^{n-k}}{(n-k)!}$, és ez az alak éppen $E(z)E(w)$ Cauchy-szorzata.

2. Függvénysorozatok és függvénysorok

2.1. Függvénysorozatok

Bármilyen dologból lehet sorozatokat tekinteni.
Számsorozatok (numerikus sorozatok): (valós vagy komplex) (x_n): minden $n \in \mathbb{N}$-hez megadunk egy $x(n) = x_n \in \mathbb{R}$, illetve $z(n) = z_n \in \mathbb{C}$ számértéket. Tehát egy sorozat az egy $\mathbb{N} \to \mathbb{R}$ $(\mathbb{C})$ függvény.
Tekintettünk már más sorozatokat is.
Vektorsorozat: $\underline{v} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ vagy $\underline{u} = (x_1, x_2, \ldots, x_d \in \mathbb{R}^d(\mathbb{C}^d)$ vektorokra veszünk egy $\underline{u}_n = \underline{u}(n) = (x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \ldots, x_d^{(n)}) \in \mathbb{R}^d : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^d$ függvényt.
Halmazsorozat: U alaphalmaz, $(H_n) \sim H(n) = H_n \subset U$ megadása minden $n \in \mathbb{N}$-re, tehát egy $\mathbb{N} \to P(U)(= 2^U)$ leképezés/függvény.
Felosztássorozat: ...
(A gépfegyversorozat az egy kicsit más: ugyanis az n-ik eleme az nem egy gépfegyver, hanem egy lövedék.)

2.1. Definíció. *(Függvénysorozat) $(f_n)_{n=0}^{\infty}$ függvénysorozat, ha elemei függvények – a definícióba beleértjük, hogy ugyanott értelmezett függvények, tehát $\forall n$-re $f_n \in \mathbb{R}^D = \{D \to \mathbb{R}$ függvények $\}$ ugyanazon fix D halmazra.*
Komplex függvénysorozat: $f_n \in \mathbb{C}^D = \{D \to \mathbb{C}$ függvények $\}$ – itt $D \subset \mathbb{C}$.

2.1. Példa. $f_n(x) := \left(1 + \dfrac{x}{n}\right)^n$ $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *(vagy* $f_n(z) := \left(1 + \dfrac{z}{n}\right)^n$ $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$*) függvénysorozat.*

Vegyük észre, hogy minden rögzített $x \in \mathbb{R}$ $(z \in \mathbb{C})$ értékre $f_n(x)$, illetve $f_n(z)$ egy valós/komplex számsorozat lesz.

Fontos tulajdonságok: például korlátos, konvergens...

Probléma: lehet, hogy $(f_n(x))_{n=1}^{\infty}$ korlátos $\forall x \in \mathbb{R}$-re mint sorozat, de mégsem rendelkezik egyetlen, közös korláttal $\forall x$-re. Például mindjárt $n = 1$-re $f_1(x) = 1 + x$: $\mathbb{R}$-en nem lesz $|1 + x| \leq K$. Ugyanez a probléma előjön a konvergenciával is.

2.2. Definíció. *Az $f_n : D \to \mathbb{R}$ $(\mathbb{C})$ függvénysorozat egyenletesen korlátos a $H \subset D$ halmazon, ha $\exists K < \infty, \forall x \in H, \forall n \in \mathbb{N}$ $|f_n(x)| \leq K$. (Tehát nem pontonként $\forall x \in H$ $\exists K = K_x < \infty \ldots$).*

2.2. Példa. $|f_n(x)| = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$ *nem egyenletesen korlátos $\mathbb{R}$-en, de tetszőleges $[a, b] = I$ korlátos, zárt intervallumon egyenletesen is korlátos: $\exists K = K_I$, hogy $\forall a \leq x \leq b, \forall n \in \mathbb{N}$ $\left|\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n\right| \leq K$.*

Bizonyítás: Nyilván $\left|\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n\right| = \left|1 + \frac{x}{n}\right|^n \leq \left(1 + \frac{|x|}{n}\right)^n$, így elég látni, hogy $|f_n(x)| \leq \max\left(\left(1 + \frac{|a|}{n}\right)^n, \left(1 + \frac{|b|}{n}\right)^n\right) \leq \max(e^{|a|}, e^{|b|}) =: K_{a,b}$, ahol kihasználtuk, hogy $x > 0$-ra $\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \nearrow e^x$.

Hasonlóan vagyunk a konvergenciával is.

2.3. Definíció. *Egy $f_n : D \to \mathbb{R}$ függvénysorozat konvergenciahalmaza az a $H \subset D$ halmaz, amelyen $f_n(x)$ konvergens számsorozat. Az $f(x) := \lim\limits_{n \to \infty} f_n(x)$ $(x \in H)$ az f_n $(f_n|_H)$ függvény-sorozat határfüggvénye: $f : H \to \mathbb{R}$.*

2.4. Definíció. *Az f_n függvénysorozat egyenletesen konvergens egy $E \subset H$ részhalmazon, ha az $f_n|_E$ $E :\to \mathbb{R}$ függvénysorozat*
egyenletesen konergens: $\forall \varepsilon > 0\ \exists N = N(\varepsilon),\ \forall n \geq N\ \forall x \in E\ |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$
$\Longleftrightarrow$
egyenletesen Cauchy: $\forall \varepsilon > 0\ \exists N(\varepsilon), \forall m \geq n \geq N\ \forall x \in E\ |f_n(x) - f_m(x)| \leq \varepsilon.$

Tehát az egyenletesség azt jelenti, hogy $N(\varepsilon)$ nem függ x-től.

2.3. Példa. $E_n(z) := \sum_{k=0}^{n} \frac{z^k}{k!} \to E(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}$ *bizonyításánál vehettünk egy tetszőleges $B = B(0, r) = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq r\}$ körlapot: a konvergencia bizonyításánál csak az kellett, hogy $2|z| \leq N$, és $\frac{|z|^N}{N!} < \varepsilon$ teljesüljön, amihez elegendő, hogy $N = N_{r,\varepsilon} \geq 2r$, és $\frac{r^N}{N!} < \varepsilon$.*

2.4. Példa. *Határozzuk meg az $f_n(x) := \cos(nx)$ függvénysorozat konvergenciahalmazát!*

Megoldás: $\cos(nx)$ 2π-vel periodikus, így a konvergenciahalmaza is az lesz.
Ha $\cos x = 1 \iff x = 2k\pi \iff \cos(nx) = 1 (\forall n \in \mathbb{N}) \Rightarrow 2\pi\mathbb{Z} \subset H.$
Ha $0 < x < 2\pi$, akkor $\cos(nx)$ oszcillál, $x \notin H \Rightarrow H = 2\pi\mathbb{Z}$.
Pl. ha $x = \frac{2\pi p}{q}$, ahol $(p, q) = 1$, akkor $\cos nx$ a $\cos(\frac{2\pi k}{q})$ $(k = 0, \dots, q - 1)$ értékeken oszcillál.

2.5. Példa. *Legyen $g_n(x) := \left(1 + \frac{\cos x}{n}\right)^n$. Hol korlátos, konvergens, igaz-e egyenletes korlátosság, egyenletes konvergencia (illetve milyen halmazon)?*

Megoldás: $-1 \leq \cos x \leq 1$, azaz $g_n = f_n \circ \cos$ kompozíció függvény, ahol $f_n(z) = \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n$ a fenti Euler-féle függvénysorozat, amiről beláttuk, hogy egyenletesen korlátos $[-1, 1]$-en – például $|f_n(z)| \leq e^1$ $(-1 \leq z \leq 1)$ – és egyenletesen konvergens is például a $B = B(0, 1)$-en $\Rightarrow g_n(x) \rightrightarrows e^{\cos x}$

2.1. Tétel. *Ha $f_n \rightrightarrows f$ a H halmazon, és$f_n \in C(H)$, akkor $f \in C(H)$. (Folytonos függvények egyenletesen konvergens sorozatának limesze is az.)*

Bizonyítás: Legyen $\varepsilon > 0$ tetszőleges adott érték. Az egyenletes konvergencia miatt $\exists N = N_0(\varepsilon/3)$, hogy $\forall x \in H, \forall n \geq N\ |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon/3$.
Tekintsünk egy ilyen n-et – például akár az $n = N$ értéket! Mivel $f_n \in C(H)$, azért $\forall x_0 \in H\ \exists \delta = \delta(\varepsilon/3, x_0, n)$, hogy ha $x \in H \cap B(x_0, \delta) \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon/3$.
Ezzel $|f(x) - f(x_0)| \leq |f_n(x) - f(x)| + |f_n(x) - f_n(x_0)| + |f_n(x_0) - f(x_0)| < \varepsilon$.

2.2. Tétel. *Tegyük fel, hogy az $F_n : I \to \mathbb{R}$ függvények folytonosan deriválhatóak az I intervallumon. Jelölje $f_n : I \to \mathbb{R}$ az $f_n := F_n'$ deriváltakat. Ha*

(i) $F_n' = f_n \rightrightarrows f$ *az I-n, és*

(ii) $\exists a \in I, F_n(a)$ *konvergens,*

akkor F_n is konvergens I-n, továbbá $F := \lim_{n\to\infty} F_n \in C^1(I)$, és $F' = f$.

2.1. Megjegyzés. *A látszólag fura (ii) feltételre is szükség van! Gondoljuk meg, hogy ha $I := \mathbb{R}$, és $f_n \equiv f$ azonosan ugyanaza függvény, akkor persze $f_n \rightrightarrows f$ az I-n, de ettől még a primitív fügvvényekre lehetséges $F_n = F + c_n$ egy divergens c_n konstans-választással. Tehát nem elegendő, hogy $F_n' = f_n$, az is kell, hogy a sok választható primitív függvény szabad konstansai valahogyan "összeilleszkedjenek".*

Bizonyítás: Legyen $L, \varepsilon > 0$, és $x \in I, |x-a| < L$ tetszőleges. Tudjuk, hogy $f, f_n \in C(I)$ (f az (i) feltevés és a fenti tétel miatt), így vannak primitív függvényeik is: persze eddig is tudtuk, hogy $F_n' = f_n$, de most már tudhatjuk azt is, hogy van primitív függvénye f-nek is. Sőt, az is igaz, hogy minden primitív függvény $\int_a^x f(t)\ dt + C$ alakban áll elő, ahol C tetszőleges konstans, és $R(x). = \int_a^x f(t)\ dt$ az f egy Riemann-féle integrálfüggvénye (mégpedig az a-ból induló, azaz az, amelyikre $R(a) = 0$).

A Newton-Leibniz szabály szerint $F_n(x) = \displaystyle\int_a^x f_n(t)dt + F_n(a)$. De $F_n(a) \to A$ konverens, és mindjárt megmutatjuk, hogy $\displaystyle\int_a^x f_n(t)dt$ is konvergens, mégpedig $\displaystyle\int_a^x f(t)dt$-hez.

Ugyanis ha $n > N_0\left(\dfrac{\varepsilon}{L}\right)$, akkor $f_n \rightrightarrows f$ és $n > N_0$ miatt $|f(t) - f_n(t)| \le \dfrac{\varepsilon}{L}$ $(\forall t \in I)$, tehát

$$\left|\int_a^x f(t)dt - \int_a^x f_n(t)dt\right| \le \int_a^x |f(t) - f_n(t)|dt \le |x-a| \cdot \frac{\varepsilon}{L} < \varepsilon.$$

Legyen tehát $F(x) := A + \displaystyle\int_a^x f(t)dt$ az f. Ez f-nek persze primitív függvénye: $F' = f$. Ekkor tehát $F_n(x) \rightrightarrows F(x)$, az $I \cap [a-L, a+L]$ részintervallumon egyenletesen is.

2.2. Megjegyzés. *Az állítottnál még egy kicsit többet is bizonyítottunk, amennyiben $F_n \rightrightarrows F$ egyenletesen az $I \cap [a-L, a+L]$ részintervallumon tetszőleges L érték mellett. Ez gyakran előfordul (például $\left(1 + \dfrac{x}{n}\right)^n \to e^x$ stb.) – erre azt az elnevezést használjuk, hogy a konvergencia lokálisan egyenletes. Az is könnyen látható a bizonyításból, hogy az eredményhez az (i) feltételben is elegendő ezt a lokálisan egyenletes konvergenciát feltenni, hiszen bizonyíthatunk minden $I' := [a-L, a+L]$ intervallumon külön-külön is.*

2.2. Függvénysorok

Ahogyan a numerikus sorozatokból kaptuk a numerikus sorokat, ugyanúgy kapjuk függénysorozatokból a függvénysorokat.

2.5. Definíció. *Ha $f_n : D \to \mathbb{R}$ $(\mathbb{C})$ $(n \in \mathbb{N})$ függvények, akkor a $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ összeget végtelen függvénysornak nevezzük. Ennek n-edik részletösszege az $S_n := S_n(f) := \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} f_k$ összeg, tehát arészletösszeg is függvény, éspedig az $S_n(x) = f_0(x) + \ldots + f_n(x) : D \to \mathbb{R}$ függvény.*
A $H := \{s \in D : \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ konvergens (azaz $\exists \lim\limits_{n\to\infty} S_n(x)\}$ halmaz a sor konvergenciatartománya, és ezen $f(x) := \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} f_k(x)$ az összege.

A sor egy $E \subset H$ halmazon egyenletesen korlátos, konvergens, Cauchy tulajdonságú, ha $S_n|_E$ mint függvénysorozat az.

2.6. Példa. *Határozzuk meg a $g(z) := \sum_{n=0}^{\infty} z^n$ (komplex változós!) geometriai sor konvergenciatartományát és összegét!*

Legyen $B(0,1) := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ a nyílt egységkörlap. Ezen $g(z) = \lim_{n\to\infty} S_n(g,z) = \lim_{n\to\infty} \frac{1-z^{n+1}}{1-z} = \frac{1}{1-z}$. A konvergencia nem egyenletes $B(0,1)$-en, de minden kisebb $\overline{B(0,r)} = \{z \in \mathbb{C} : |z| \le r\}$ körlapon már egyenletes, mert itt $\left|\frac{z^{n+1}}{1-z}\right| \le \frac{r^{n+1}}{1-r} \to 0$ miatt adott ε-hoz $\exists N = N(\varepsilon, r)$, ami független z-től.

Ha $|z| \ge 1$, akkor a sor tagjai sem tartanak 0-hoz, ezért a sor nyilvánvalóan divergens: így $H = B(0,1)$, és itt a sor lokálisan egyenletesen konvergens, összege pedig $\frac{1}{1-z}$.

2.1. Következmény. $\frac{z}{(1-z)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} nz^n$ $(\forall |z| < 1)$, *és ez egyenletesen konvergens minden kisebb $B(0,r)$-en, ahol $r < 1$ tetszőleges.*

Bizonyítás: Ez ekvivalens azzal, hogy $\frac{1}{(1-z)^2} = \sum_{k=0}^{\infty}(k+1)z^k$, ami $z \in \overline{B(0,r)}$ esetén egyenletesen konvergens, mert $\left|\sum_{k=n+1}^{\infty}(k+1)z^k\right| \le \sum_{k=n+1}^{\infty}(k+1)r^k$, ami egy konvergens numerikus sor maradéka. (A konvergencia adódik pl. a hányadoskritériummal.)
De $\left(\frac{1}{1-z}\right)' = \frac{1}{1-z^2}$, és $\sum_{n=0}^{\infty}(z^n)' = \sum_{n=0}^{\infty} nz^{n-1} = \sum_{k=0}^{\infty}(k+1)z^k$, és a fenti tétel miatt akkor a $f(z) := \sum_{k=0}^{\infty}(k+1)z^k$ jelöléssel és $F_n(z) := S_n(g,z)$, $a = 0$, $f_n := F_n' = S_{n-1}(f)$ szereposztással

(i) $f_n \rightrightarrows f$ $\overline{B(0,r)}$-en

(ii) $F_n(0) = \sum_{l=0}^{n} 0^l \equiv 1 =: F(0)$,

tehát a fenti tétel szerint $F'(z) = f(z)$, azaz $f(z) = \left(\frac{1}{1-z}\right)' = \frac{1}{(1-z)^2}$.

A numerikus sorokra tárgyalt fogalmak (például abszolút és feltételes konvergencia, Cauchy-féle szorzat) és tételek, kritériumok (hányados-, gyök-, határérték-, integrál-, sorrend-) változatlanul érvényben maradnak.

De mikor lesz a konvergencia egyenletes?

2.6. Definíció (Weierstrass kritérium). *A* $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ *függvénysor* *normálisan konvergens* *a* H *halmazon, ha* $\exists$ *olyan* $a_n \in \mathbb{R}_+$, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n < \infty$ *konvergens sor, hogy* $|f_n(x)| \le a_n$ $(n \in \mathbb{N})$.

2.2. Következmény. *Ha az* f_n *függvények korlátosak (például* $f_n \in C([a,b])$*), akkor elég a kritériumot ellenőrizni* $n \ge K$*-ra, ugyanis* $n = 1, 2, \ldots, k-1$*-re vehető* $a_n := \sup_H f_n$*, és véges sok tag nem befolyásolja* $\sum_n a_n < \infty$*-t.*

2.3. Megjegyzés. *Vegyük észre, hogy* $|f_n(x)| \le a_n$ *miatt szükségképpen* $a_n \ge 0$ *is, tehát a konvergenciával együtt persze* $\sum_n a_n$ *abszolút konvergens is.*

2.3. Tétel. *(Weierstrass) Ha* $\sum_n f_n(x)$ *normálisan konvergens* H*-n, akkor ott abszolút és egyenletesen is konvergens.*

Bizonyítás: Minden $x \in H$-ra a majoráns kritérium szerint $\sum_n f_n(x)$ abszolút konvergens. Legyen $f(x)$ az összeg: $f := \sum f_n$. Legyen $\varepsilon > 0$ adott: ekkor $\sum a_n$ konvergenciája miatt $\exists N_\varepsilon$, hogy $\sum_{n=N+1}^{\infty} a_n < \varepsilon$. De ekkor tetszőleges $m > N$-re teljesül $|f(x) - S_m(f,x)| = \left| \sum_{n=m+1}^{\infty} f_n(x) \right| \le \sum_{n=m+1}^{\infty} a_n \le \sum_{n=N+1}^{\infty} a_n < \varepsilon \Rightarrow S_m \rightrightarrows f$.

Vegyük észre, hogy pont ezt alkalmaztuk a fenti példákban – mindig egy konvergens numerikus sorral becsültünk, így kaptunk egyenletes konvergenciát.

2.7. Példa. *Legyen* $\zeta(z) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z}$ *a Riemann-féle* ζ *függvény.*

2.4. Megjegyzés. *Ezzel kapcsolatos a mai matematika legelső, legfontosabb nyitott problémája, a* *Riemann-sejtés.*

Itt $z = x + iy \in \mathbb{C}$ komplex változó is lehet. A hatvány értelmezése:

$$n^z = e^{\log n \cdot z} = \text{„}e^{x \log n + iy \log n}\text{”} := e^{x \log n} e(y \log n) = n^x(\cos(y \log n) + i \sin(y \log n)); \ |n^z| = n^x.$$

2.3. Következmény. *Ha* $p > 1$ *tetszőleges, akkor* $\left|\frac{1}{n^z}\right| \le \frac{1}{n^p}$ *az* $x = Re\ z \ge p$ *félsíkon: ezért minden ilyen félsíkban* $\zeta(z)$ *sora normálisan konvergens (mert* $\sum_n \frac{1}{n^p} \sim \int_1^{\infty} \frac{1}{t^p} dt < \infty$*). Ugyanakkor ha* $x \le 1$*, akkor* $\zeta(x) = \sum_n \frac{1}{n^x}$ *divergens.*

2.1. Állítás. *A* ζ *függvény differenciálható* $Re\ z > 1$*-ben.*

Bizonyítás: Csak $x > 1$-re, valós értelemben nézzük meg. Formálisan, $\zeta'(x) = \sum_n \left(\frac{1}{n^x}\right)' = \sum_n (e^{-\log n \cdot x})' = \sum_n -\log n \cdot e^{-\log n \cdot x}$, azaz $\zeta'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-\log n}{n^x}$, ez normálisan konvergens $x \in [p, \infty)$-re ($p > 1$), és így minden $[p, \infty)$ alakú félegyenesen alkalmazható a fenti tétel.

Legfontosabb függvénysortípusok:

Dirichlet sorok: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^z}$ alakú függvénysorok (például $\zeta(z)$).

Hatványsorok: $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ (például geometriai sor, e^z sora).

Trigonometrikus sorok: $a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$ alakú sorok. Ezek – ha konvergálnak – akkor 2π-vel periodikusok. (Periodikus függvények esetében fontosak.)

2.8. Példa. *Igazoljuk, hogy* $\operatorname{arctg} x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{2k+1}$, $|x| < 1$ *esetén, sőt itt lokálisan egyenletesen (azaz minden kisebb zárt intervallumban:* $-r \leq x \leq r$, *ahol* $r < 1$ *egyenletesen) abszolút konvergens.*

Bizonyítás: Megint a tagonkénti integrálhatóság tételére hivatkozunk. Nyilván $S(x) := \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{2k+1} \rightrightarrows S(x) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{2k+1}$, mert $|x| < r$ esetén a sor normálisan konvergens, ugyanis: $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{r^{2k+1}}{2k+1} < \infty$. De még a derivált függvénysor is normálisan, így egyenletesen is konvergens: $S_n'(x) = s_n(x) = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k x^{2k} \rightrightarrows \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k x^{2k} = s(x) = \frac{1}{1+x^2}$ geometriai sor. Az $x = 0$ pontban $S_n(0) = 0 \to 0 = S(0)$, tehát $S'(x) = s(x)$ $|x| < 1$-ben. Végül $S(x) = 0 + \int_0^x s(t)dt = \int_0^x \frac{1}{1+t^2}dt = \operatorname{arctg} x$ ($|x| < 1$).

2.3. Hatványsorok és analítikus függvények

2.7. Definíció. *Az* $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *függvényt analitikus függvénynek nevezzük a* D *(nyílt) halmazon, ha* $\forall z_0 \in D$*-re* $\exists r_0 > 0$*, hogy* $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ *hatványsor alakban áll elő (beleértve, hogy a hatványsor konvergens)* $\forall z$*-re, amelyre* $|z - z_0| < r_0$.

2.9. Példa. e^z *analitikus az egész komplex síkon, ugyanis* $e^z = e^{z-z_0} \cdot e^{z_0} = e^{z_0} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-z_0)^n}{n!}$; $a_n := \frac{e^{z_0}}{n!}$, $r_0 = \infty$ *jó.*

2.10. Példa. *Ha* $p(z) = c_n z^n + \ldots + c_1 z + c_0$ *polinom, akkor* p *analitikus* $\mathbb{C}$*-n.*

Ugyanis

$$p(z) = p(z_0 + (z - z_0)) = \sum_{k=0}^{n} c_k \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} z_0^{k-j} (z - z_0)^j = \sum_{j=0}^{n} \left(\sum_{k=j}^{n} c_k \binom{k}{j} z_0^{k-j} \right) (z - z_0)^j.$$

Ez a hatványsor véges is, így a konvergencia triviális.

2.4. Tétel. *Legyen a_n együttható-sorozat, tekintsük a*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \qquad (*)$$

formális hatványsort.

Ekkor létezik olyan $0 \leq R \leq \infty$ érték, hogy a hatványsor normálisan (így abszolút és egyenletesen) konvergens minden $|z - z_0| \leq r < R$ esetén, és divergens, ha $|z - z_0| > R$.

2.5. Megjegyzés. *A $|z - z_0| = R$ esetben nem állítunk semmit. (És tényleg bármi lehet!)*

Bizonyítás: Ha $(*)$ divergens minden $z \neq z_0$ esetén, akkor $R = 0$, és készen vagyunk. Legyen most $H := \{\varrho \geq 0 : \ \exists z \in \mathbb{C}, |z - z_0| = \varrho,$ amelyre $(*)$ konvergens$\}$. Legyen $R := \sup H$; ekkor $0 < R \leq +\infty$. Legyen $0 < r < R$. Ekkor $R := \sup H$ miatt $\exists \varrho \in H \cap (r, R]$, azaz $\varrho > r$, és így $\exists z \in \mathbb{C}, |z - z_0| = \varrho$, amire $(*)$ konvergens. Ekkor a konvergencia miatt $|a_n(z - z_0)^n| \to 0$, azaz $|a_n|\varrho^n \to 0$. Tekintsük most a $B(z_0, r)$ körlapot, legyen $\zeta \in B(z_0, r)$, azaz $|\zeta - z_0| \leq r$. Ekkor $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n(\zeta - z_0)^n| \leq \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| r^n$, és ez a numerikus sor konvergens, pl. mert $|a_n| r^n = |a_n| \varrho^n \cdot \left(\frac{r}{\varrho}\right)^n$, és $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{r}{\varrho}\right)^n = \frac{1}{1 - \frac{r}{\varrho}}$, $|a_n|\varrho^n \to 0$ (Hadamard-szorzat!).

Tehát $(*)$ normálisan konvergens $B(z_0, r)$-ben $r < R$-re $\Rightarrow$ konvergál $B(z_0, R)$-ben is.

H és R (a sup) definíciója miatt viszont $\nexists z, |z - z_0| > R$, amire $(*)$ konvergens.

2.8. Definíció. *A fenti R érték a $(*)$ hatványsor konvergensiasugara.*

2.5. Tétel. *(Cauchy–Hadamard) Ha $\exists L := \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$, akkor a $(*)$ hatványsor konvergenciasugara $R = \frac{1}{L}$ (beleértve, hogy ha $L = 0$, akkor $R = +\infty$, és ha $L = +\infty$, akkor $R = 0$).*

Bizonyítás: Ha $|z - z_0| > R$, akkor $|a_n(z - z_0)^n| = (\sqrt[n]{|a_n|} \cdot |z - z_0|)^n \geq 1$ $(n \geq n_0)$, mert $\sqrt[n]{|a_n|} \cdot |z - z_0| \to L \cdot |z - z_0| > L \cdot R = 1$, és így $n > n_0$-ra $\geq 1 \Rightarrow$ az n-edik hatványa is ≥ 1 lesz. Tehát $|z - z_0| > R$-re $(*)$ divergál.

De ha $r < R$, akkor $|\zeta - z_0| \leq r$ esetén $(*)$-ot majorizálja a $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| r^n$ numerikus sor, és erre a speciális gyökkritérium alkalmazható, mivel $\sqrt[n]{|a_n| r^n} \to L \cdot r < 1$.

2.11. Példa. *A* $\log\left(\frac{1}{1-z}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$ *hatványsor konvergenciasugara* $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n}} = 1$ *miatt* $R = \frac{1}{L} = \frac{1}{1} = 1$.

Az $e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ *konvergenciasugara* $L := \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n!}} = 0$ *miatt* $R = \frac{1}{L} = \frac{1}{0} = \infty$.

2.6. Tétel. *Tegyük fel, hogy az* $F(z) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ *függvénysor konvergenciasugara* $R > 0$ *(lehet* ∞ *is). Ekkor a* $|z - z_0| < R$ *körlapon* $F \in C^\infty(B(z_0, R))$*, és*

$$F^{(k)}(z) = \sum_{n=k}^{\infty} a_n \cdot n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)(z-z_0)^{n-k},$$

ahol ennek a k*-adik derivált sornak is* R *a konvergenciasugara.*

Bizonyítás: Feltehetjük, hogy $z_0 = 0$, és elég $k = 1$-re bizonyítanunk (majd indukcióval). Legyen F konvergenciasugara R, a (formális) F' sor konvergenciasugara pedig R'.

$R' \geq R$. Ha most $|\zeta|(= |\zeta - z_0|) < R$, akkor $\exists r < R$, $|\zeta| < r < R$, így $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| r^n < \infty$ (R mint konvergenciasugár értelmezése és 2.4 tétel). De akkor $\sum_{n=1}^{\infty} n|a_n||\zeta|^{n-1} < \infty$, mert $|a_n|r^n \to 0$ és $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\zeta|^{n-1}}{r^n} < \infty$. Tehát a ζ pontban F' sora konvergens $\Rightarrow R' \geq R$.

$R \geq R'$. Fordítva még egyszerűbb; ha $\sum_n n|a_n||\zeta|^{n-1} < \infty \Rightarrow \sum_n |a_n||\zeta|^n < \infty$, ezért $R \geq R'$.

Tehát minden $r < R$-re a $B(0, r)$ körlapon egyenletesen konvergál az F' formális sora, továbbá a középpontban nyilván $S_n(F, 0 \equiv a_0 = F(0)$ $(\forall n in \mathbb{N})$, tehát F' formális sora tényleg az F deriváltja.

2.7. Tétel (Taylor együtthatótétele). *Ha* $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(z-z_0)^k$ *konvergenciasugara pozitív, akkor* f *akárhányszor is deriválható* z_0*-ban, és* $f^{(k)}(z_0) = a_k k!$*, azaz*

$$a_k = \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!} \qquad (\forall k \in \mathbb{N})$$

Bizonyítás: $z = z_0$-ban is konvergens az $f^{(k)}$ sora, de ott $= a_k \cdot k!$.

2.8. Tétel. *(Hatávnysor analitikussága) Ha* $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ $(|z - z_0| < R)$ *egy* $R > 0$ *konvergenciasugárral, akkor a* $B(z_0, R)$ *nyílt körlapon* f *analitikus függvény, és tetszőleges* $|z - z_0| < R$ *pont körül legalább az* $R^* := R - |z - z_0|$ *sugarú körlapon érvényes az*

$$f(\zeta) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(z)}{k!}(\zeta - z)^k$$

Taylor-féle hatványsor-előállítás.

Bizonyítás: A $\zeta - z_0 = (\zeta - z) + (z - z_0)$ felbontást és binomiális tételt alkalmazva,

$$f(\zeta) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(\zeta - z_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n((\zeta - z) + (z - z_0))^n = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n} a_n \binom{n}{k} (\zeta - z)^k (z - z_0)^{n-k}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} (\zeta - z)^k \sum_{n=k}^{\infty} a_n \binom{n}{k} (z - z_0)^{n-k} = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (\zeta - z)^k, \quad c_k := \sum_{n=k}^{\infty} a_n \binom{n}{k} (z - z_0)^k.$$

Ez akkor jogos átalakítás, ha a kettős szumma is abszolút konvergens. De

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}\left|a_n\binom{n}{k}(\zeta-z)^k(z-z_0)^{n-k}\right| = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}|a_n|\binom{n}{k}\varrho^k r^{n-k},$$

ahol $\varrho := |\zeta - z| < R^* := R - |z - z_0|,\ r := |z - z_0|,\ R^* = R - r$.

Tehát a kettős sor majorálható a $\sum\limits_{n=0}^{\infty}|a_n|(\varrho + r)^n$ sorral. Márpedig $\varrho + r < R$, így ez konvergens, ezért jogos az átalakítás, a szumma tetszőleges sorrendben tekinthető.

Ha már van egy hatványsor-előállítás, az csak a Taylor-féle együtthatókkal lehetséges, Taylor fenti tétele miatt.

2.6. Megjegyzés. *Az nem igaz, hogy ha $f \in C^\infty(\mathbb{R})$, akkor mindig konvergens hatványsorba fejthető. Előfordulhat, hogy a Taylor-sora divergens, és az is, hogy konvergens, de nem az f függvényhez.*

2.12. Példa. *Legyen* $f(x) := \begin{cases} e^{\frac{-1}{x^2}} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$.

Ekkor $f \in C^\infty(\mathbb{R})$, minden $k \in \mathbb{N}$-re $f^{(k)}(0) = 0$, de persze $f(x) \neq \sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{0}{k!}x^k = 0$, ha $x \neq 0$.

2.7. Megjegyzés. *Itt azt nehéz kiszámolni, hogy $f^{(k)}(0) = 0$ (egyáltalán $\exists$?).*

Láttuk, hogy a "nagyon szép függvények" – amelyek analitikusak – éppen egy konkrét $S_n(f,x) := T_n(x) := \sum\limits_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$ polinomsorozattal közelíthetőek jól meg: $T_n \rightrightarrows f$ $B(x_0, R)$-ben. Ugyanakkor az $L(x) = f(x_0) + f'(x_0)\cdot(x - x_0) = T_1(x)$ lineáris közelítés azért jó volt minden differenciálható függvényre is – nem kellett analitikusság.

<u>Általános kérdés:</u> közelíthetőség polinommal.

2.9. Tétel. *(Weierstrass) Ha $f \in C[a,b]$, akkor $\exists P_n$ poliniomsorozat ($\deg P_n \leq n$), hogy $P_n \rightrightarrows f$ az $[a,b]$ korlátos, zárt intervallumon.*

2.8. Megjegyzés. *Minden polinom folytonos. Tanultuk(!), hogy ha $P_n \in C[a,b]$ folytonosak és $P_n \rightrightarrows f$, akkor $f \in C[a,b]$ is következik. Tehát ennél többet nem is lehet elképzelni, ameddig egyenletes a konvergencia: ez a tétel csak folytonos függvényekre lehet igaz.*

(A tételt em bizonyítjuk – egyenletes folytonosság, idő... – bár nem olyan nehéz.)

Láttuk, hogy a hatványsorok – azaz a részletösszegeik – a konvergenciakörön belül egyenletesen konvergensek: ha $(*) f(z) \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k(z - z_0)^k$, $R > 0$ a konvergenciasugár, $r < R$, akkor $S_n(f,z) \rightrightarrows f(z)$, sőt $S_n^{(m)}(f,z) \rightrightarrows f^{(m)}(z)$ $|z - z_0| \leq r$-ben. Sőt, azt is láttuk, hogy ha $|z - z_0| = \varrho < R$, akkor f-et z körül is hatványsorba lehet fejteni, és minden $r < R - \varrho$ sugarú körben ez normálisan konvergens is lesz, a deriváltakra pedig már az előzőek miatt úgyszintén normális, és így abszolút és egyenletes konvergencia lesz:

$$f(\zeta) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k(\zeta - z)^k \quad (|\zeta - z| \leq r < R - \varrho),\ S_n(f,\zeta) \rightrightarrows f(\zeta),\ S_n^{(m)}(f,\zeta) \rightrightarrows f^{(m)}(\zeta).$$

De mik ezek a szépen konvergáló részletössieg-polinomok, mik az együtthatóik?

Taylor fenti együttható-tétele miatt csak egyetlen lehetőség van: $c_k = \dfrac{f^{(k)}(z)}{k!}$ $(k \in \mathbb{N})$.

2.9. Definíció. *Legyen f egy z_0-ban n-szer differenciálható (tehát nem feltétlenül analitikus!) függvény. Ekkor $f z_0$ pontja körül felírt n-edrendű Taylor-polinomja*

$$T_n(f, z_0, z) := \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}(z - z_0)^k.$$

2.9. Megjegyzés. *$n = 0$; ekkor $T_0(z) = f(z_0) = c$ konstans polinom. Ez jól közelíti f-et z_0 körül, ha $\lim\limits_{z\to z_0}(f(z) - T(z)) = 0$, azaz, ha $\lim\limits_{z\to z_0} f(z) = f(z_0)$, tehát ha az f folytonos. $n = 1$; $T_1(z) = f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0)$ lineáris közelítés. Ez a legjobb lineáris közelítés volt $\iff$ f differenciálható volt z_0-ban (A1!).*

2.10. Definíció. *Az $a \in \operatorname{int} D_f$ pontban $P_n = P$ az f legjobb n-edfokú közelítése a körül (f l.j.n.f.k. $a \approx$), ha $\deg P \leq n$ polinom és*

$$(1) \qquad \lim_{z\to a} \frac{f(z) - P(z)}{(z - a)^n} = 0$$

2.2. Állítás. *Legfeljebb egy l.j.n.f.k. van adott $a \in \operatorname{int} D_f$ körül.*

Bizonyítás: Ha P, Q l.j.n.f.k., akkor $R := P - Q$-val

$$(2) \qquad \lim_{z\to a} \frac{R(z)}{(z - a)^n} = 0.$$

Ez egy $\deg R \leq n$ polinommal csak úgy történhet meg, ha $R = 0$.
Ugyanis $R(a) = 0$ (különben (2) bukik!), így $(z - a)$ kiemelhető $\Rightarrow$ indukció megy.

2.10. Tétel. *(Taylor-közelítés a Legrange-féle maradéktaggal) Legyen $f \in D^{n+1}(I)$, ahol $I \in \mathbb{R}$ intervallum, és $a, b \in I$ tetszőleges. Ekkor a és b között $\exists$ olyan ξ pont, hogy*

$$f(b) = T_n(f, a, b) + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(b - a)^n \qquad (\min(a, b) \leq \xi := \xi_{a,b} \leq \max(a, b)).$$

2.10. Megjegyzés. *Szokás úgy is felírni, hogy a fix, b pedig tetszőleges $x \in I$.*

2.4. Következmény. *Ha csak $f \in C^n[a - \delta, a + \delta]$ igaz, akkor $T_n(f, a, x)$ l.j.n.f.k. $\approx a$. (Sőt, ha $f \in D^n[a - \delta, a + \delta]$ és $f^{(n)}$ folytonos a-ban.)*

Ugyanis $f(x) = T_{n-1}(f, a, x) + \dfrac{f^{(n)}(\xi)}{n!}(x - a)^n$ igaz $\xi \in [a, x]$ vagy $[x, a]$-val, (mivel $f \in D^n(I)$) ha $x \in [a - \delta,\ a + \delta]$ (a tétel $n - 1$-re és $b = x$-re alkalmazva). Mármost akkor

$$\frac{f(x) - T_n(x)}{(x - a)^n} = \frac{\dfrac{1}{n!} f^{(n)}(\xi_x)(x - a)^n - \dfrac{f^{(n)}(a)}{n!}(x - a)^n}{(x - a)^n} \to 0,$$

ha $x \to a$, mert akkor $\xi_x \to a$ és $f^{(n)}$ folytonos volt a-ban.

Taylor-tétel bizonyítása: Legyen $K := \dfrac{f(b) - T_n(b)}{(b-a)^{n+1}}$ – úgy választjuk, hogy a $g(t) := f(t) - T_n(t) - K \cdot (t-a)^{n+1}$ függvényre $g(a) = g(b) = 0$ legyen. Vegyük észre, hogy a-ban $g(a) = g'(a) = \ldots = g^{(n)}(a) = 0$ a T_n miatt.

1. lépés: Rolle tétele miatt $\exists c_1 \in [\min(a,b), \max(a,b)]$, hogy $g'(c_1) = 0$.

2. lépés: Rolle tétele miatt $\exists c_2$ az a és c_1 között, hogy $g'(c_2) = 0$.

$\vdots$

n+1. lépés: Rolle tétele miatt $\exists c_{n+1}$ az a és c_n között, hogy $g^{(n+1)}(c_{n+1}) = 0$.

Legyen $\xi := c_{n+1}$: $0 = f^{(n+1)}(\xi) - 0 - K \cdot (n+1)!$, azaz $\dfrac{f(b) - T_n(b)}{(b-a)^{n+1}} = K = \dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}$.

2.5. Következmény. *Ha $f^{(n+1)}$korlátos $I = [a-r, a+r]$-ben – például ha $f \in C^{n+1}(I)$ – akkor nemcsak $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x) - T_n(x)}{(x-a)^n} = 0$, de még $|f(x) - T_n(x)| \leq \dfrac{M_{n+1}}{(n+1)!}|x-a|^{n+1}$ is teljesül $(= \mathcal{O}(|x-a|^{n+1}))$.*

2.6. Következmény. *Ha például $|f^{(n)}(t)| \leq M \cdot (n+1)!$ ($\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall t \in I$), akkor $T_n(f) \rightrightarrows f$ az a egy környezetében (sőt elég $M \cdot A^n \cdot (n+1)!$ is) $\Rightarrow f$ analitikus .*

2.7. Következmény. $\cos x, \sin x$ *nemcsak C^∞ függvények, de analitikus függvények is.*

2.11. Tétel. $\cos x = \displaystyle\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m x^{2m}}{(2m)!}$, $\sin x = \displaystyle\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m x^{2m+1}}{(2m+1)!}$.

Bizonyítás: $\cos, \sin \in C^\infty(\mathbb{R})$, $|\cos^{(k)}(0)|$, $|\sin^{(k)}(0)| \leq 1 \Rightarrow T_n \rightrightarrows$.

$$T_n(\cos, x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{\cos^{(k)}(0)}{k!} \cdot x^k, \qquad \cos^{(k)}(0) = \begin{cases} 0 & \text{ha} \quad k = 2m+1 \ \text{ páratlan} \\ (-1)^m & \text{ha} \quad k = 2m \ \text{ páros} \end{cases}$$

Hasonlóan a sin függvénnyel.

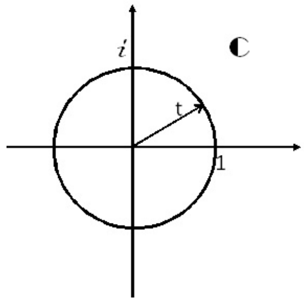
2.4. Nevezetes komplex analitikus függvények, Euler formulák

2.8. Következmény. *A fent $\cos x$-re és $\sin x$-re felírt hatványsorok x helyébe komplex z értéket írva is konvergensek maradnak (konvergenciasugár $= \infty$!). Tehát kiterjeszthetjük a definíciójukat komplex változóra.*

2.11. Definíció. $\cos z := \displaystyle\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m z^{2m}}{(2m)!}$, $\quad \sin z := \displaystyle\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m z^{2m+1}}{(2m+1)!} \quad (\forall z \in \mathbb{C})$

Mire hasonlítanak ezek? $\operatorname{ch}' z = \operatorname{sh} z$, $\operatorname{sh}' z = \operatorname{ch} z$, 0-ban 1-ek és 0-k váltakoznak, ott is hasonló Taylor-sor lesz. Sőt, ezeket felírhatjuk e^z hatványsorából is: $\operatorname{ch} z = \dfrac{1}{2}(e^z + e^{-z})$ stb. Tehát tudjuk, hogy $\operatorname{ch} z = \displaystyle\sum_{m=0}^{\infty} \frac{z^{2m}}{(2m)!}$, $\operatorname{sh} z = \displaystyle\sum_{m=0}^{\infty} \frac{z^{2m+1}}{(2m+1)!}$, és egyébként $e^z = \operatorname{ch} z + \operatorname{sh} z$.

Legyen most $z = it$, akár $t \in \mathbb{C}$, de most legyen csak $t \in \mathbb{R}$.



$\mathrm{ch}(it) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{z^{2m}}{(2m)!} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(it)^{2m}}{(2m)!} = \sum_m \frac{i^{2m}t^{2m}}{(2m)!} = \sum_m \frac{(-1)^m t^{2m}}{(2m)!} = \cos t$

$\mathrm{sh}(it) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(it)^{2m+1}}{(2m+1)!} = i \sum_m \frac{(-1)^m t^{2m+1}}{(2m+1)!} = i \sin t$

$e^{it} = \mathrm{ch}(it) + \mathrm{sh}(it) = \cos t + i \sin t = e(t)$

$e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy} = r \cdot e(y)$, $r = e^x$ az e^z polárkoordinátás alakja.

$|e^z| = r = e^x$ (emlékezzünk: $|n^z| = |e^{z \log n}| = e^{x \log n} = n^x$, most lett bebizonyítva!)

$\cos t = \mathrm{ch}(it) = \frac{1}{2}(e^{it} + e^{-it}) = \mathrm{Re}\ e^{it} = \mathrm{Re}\ e(t)$

$\sin t = \frac{1}{i}\,\mathrm{sh}(it) = \frac{1}{2i}(e^{it} - e^{-it}) = \mathrm{Im}\ e^{it} = \mathrm{Im}\ e(t)$

Az Euler-formulák sok mindent megmagyaráznak. Ez a komplex változó egyik értelme, haszna – igazából sokkal egységesebben látunk mindent.

2.3. Állítás. *e^z periodikus függvény.*

Bizonyítás: $e^{z+2\pi i} = e^z e^{2\pi i} = e^z$.

A trigonometrikus függvények azonosságai, a hiperbolikus függvények azonosságai, az e^z függvény Cauchy-féle függvényegyenlete ($e^{z+w} = e^z e^w$) mind egymásból levezethetőek.

2.5. Taylor-sorfejtések további alkalmazásai

1.) Határértékek. Például $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x - \mathrm{tg}\, x}{x^3} =$? Nehézség: számláló, nevező külön-külön 0-hoz tart: ilyenkor "akármi is lehet", például $\frac{x^2}{x^3} \to \pm\infty$, $\frac{3\sin x}{5x} \to \frac{3}{5}$, lehet divergens...

2.12. Definíció. *Határozatlan (indefinit) – "problémás" – határértékeknek nevezzük a $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, $\infty - \infty$, $0 \cdot \infty$, 0^0 jellegű határértékeket.*

Az $\frac{1}{x}$, e^x, $\ln x$ segítségével visszavezethetőek $\frac{0}{0}$ típusra.

2.13. Példa. $\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$ *eredetileg* $\frac{\infty}{\infty}$, *de írható* $\lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{\sqrt{x}}}{\frac{1}{\ln x}}$, $\frac{0}{0}$ *formában is.*

Hasonlóan, $\infty - \infty \to e^{\infty-\infty} = \frac{e^\infty}{e^\infty} = \frac{\infty}{\infty}$; $0 \cdot \infty = 0 \cdot \frac{1}{\frac{1}{\infty}}$; $\ln 0^0 = 0 \cdot \infty$.

Feladat megoldása: $\sin x = x - \frac{x^3}{3} + o(x^3)$, $\operatorname{tg} x = x + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$, l.j.3.f.k. Ezért

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x - \operatorname{tg} x}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{[x - \frac{x^3}{3} + o(x^3)] - [x + \frac{x^3}{3} + o(x^3)]}{x^3} = -\frac{2}{3}.$$

2.12. Tétel (L'Hospital szabály). *Ha $f, g \in D(I)$, $a \in I$, és $f(a) = g(a) = 0$ (vagy $\exists \lim_{x\to a} f(x) = 0, \lim_{x\to a} g(x) = 0$ – például ha $a \notin I$, például $a = \infty$), akkor a $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$, $\frac{0}{0}$ típusú határérték $= \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, ha ez utóbbi létezik.*

Bizonyítás: Feltehető, hogy a véges pont (ha nem: $\varphi(t) := f\left(\frac{1}{t}\right), x = \frac{1}{t} = \infty \iff t = 0$)
A Lagrange k.é.t. miatt $f(x) = f(x) - f(a) = f'(\xi)(x-a)$, $g(x) = g(x) - g(a) = g'(\eta)(x-a)$, és ha $\exists$ külön $\lim_{\xi\to a} f'(\xi)$, és $\lim_{\eta\to a} g'(\eta)$, akkor persze ezek hányadosa jön ki.
Nehézség: mi van, ha külön-külön $\nexists$ a lim, vagy például $g'(\eta) \to 0$?

2.13. Tétel. *(Cauchy-középértéktétel) Ha $f, g \in D[a, b]$, akkor $\exists \xi \in [a, b]$, hogy $\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$ (közös ξ-vel tehát).*

2.9. Következmény. *L'Hospital-szabály.*

Bizonyítás: Legyen $h(x) := f(x)(g(b) - g(a)) - g(x)(f(b) - f(a))$. Erre $h(a) = h(b) = 0 \Rightarrow$ Rolle-tétel miatt $\exists \xi$, $0 = h'(\xi) = f'(\xi)(g(b) - g(a)) - g'(\xi)(f(b) - f(a)) \Rightarrow$ az állítás.

2.) Függvényértékek numerikus kiszámítása.

2.14. Példa. *Határozzuk meg a függvénytáblázatba (4 jegyre) $\cos 0,3$ értékét!*

Hiba: $|R_n| < 5 \cdot 10^{-5}$; $\cos x = T_{2m+1}(x) + \frac{\cos^{(2m+2)}(\xi)}{(2m+2)!} \cdot x^{2m+2}$,
$|R_{2m+1}| \le \frac{1}{(2m+2)!} \cdot 0,3^{2m+2}$. $m = 0, 1$ kevés, $m = 2$-re $\frac{0,3^6}{6!} = \frac{3^4 \cdot 10^{-6}}{80} < \frac{5}{10^5}$. Tehát
$\cos 0,3 \approx T_5(0,3) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!}|_{x=0,3} = 1 - 0,045 + \underbrace{\frac{81}{24 \cdot 10^4}}_{3,374 \cdot 10^{-4}} = \mathbf{0,9553}$.

3.) Integrálfüggvény hatványsorral, határozott integrál.

2.15. Példa. $\int_0^1 \sin x^2 dx = ?$

$$\int \sin x^2\, dx = \int \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(2m+1)!}(x^2)^{2m+1}\, dx = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m x^{4m+3}}{(2m+1)!\cdot(4m+3)},$$

$$\int_0^1 \sin x^2\, dx = \left[\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m x^{4m+3}}{(2m+1)!\cdot(4m+3)}\right]_0^1 = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(2m+1)!\cdot(4m+3)} = \frac{1}{3} - \frac{1}{6\cdot 7} +$$

$\frac{1}{11\cdot 120} - \ldots$ alternáló (Leibniz-típusú) sor $\Rightarrow$; még hibabecslést is könnyű adni (Leibniz tételével persze!), pl. négy tizedesre már jó $m = 2$-ig ez az alak, mert $\frac{1}{7!\cdot 15} < 5\cdot 10^{-5}$.

4.) Komplikált függvények szép előállítása.

Például $\quad \cos\sqrt{x} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(2m)!}x^m, \qquad \frac{\sin x}{x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n}.$

Ezekből a formulákból pl. könnyen leolvashatóak a $\cos\sqrt{x}$ vagy a $\frac{\sin x}{x}$ hatodik, vagy tizedik deriváltjai a 0-ban – amit "direktben" elég nehéz kiszámolni.

Binomiális sorok:

$$(1-x)^p = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{p}{k} x^k,$$

ahol a Taylor képletekből $\binom{p}{k} := \frac{p(p-1)\ldots(p-k+1)}{k!}$.

(Jelölés: $p_k := p(p-1)\ldots(p-k+1)$ az ú.n. "Pochammer szimbólum".)

5.) Differenciálegyenletek megoldása hatványsorokkal. Differenciálegyenlet –függvényegyenlet, amelyben $y = f(x)$ mellett a derivált is szerepel. Ilyeneket láttunk tipikusan például az implicit deriválás alkalmával. Az is egy differenciálegyenlet, hogy ha primitív függvényt keresünk: $y' = f(x)$. Ilyenkor az egyértelmű primitív függvényhez fixálni kell egy konvstansot.

2.16. Példa. *Oldjuk meg az $y' - y = x$, $y(0) = 1$ (konstans fixálása) kezdeti érték feladatot!*

Tegyük fel, hogy $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, azaz tegyük fel, hogy a megoldás analitikus.

$y(0) = 1 \iff a_0 = 1$. $y'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$, $y' - y = \sum_{n=0}^{\infty}((n+1)a_{n+1} - a_n)x^n \overset{?}{=} x$. $\Rightarrow$ az együtthatók unicitása miatt $a_1 - a_0 = 0$, $2a_2 - a_1 = 1$, $(\Rightarrow a_0 = a_1 = a_2 = 1)$, és $(n+1)a_{n+1} - a_n = 0$, $a_{n+1} = \frac{1}{n+1}a_n = \ldots = \frac{2}{(n+1)!}a_2 = \frac{2}{(n+1)!}$.

$$y(x) = 1 + x + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2}{n!}x^n = 1 + x + 2(e^x - 1 - x) = 2e^x - x - 1.$$

Ellenőrzés: $y'(x) - y(x) = 2e^x - 1 - (2e^x - x - 1) = x$, $y(0) = 2e^0 - 1 = 1$, y minden feltevést teljesít.

(A differenciálegyenletek elméletéből egyébként következik, hogy csak egyetlen mondjuk C^2 osztályú megoldás lehetséges, ezért ha megtaláltuk, akkor ez minden. Egy másik u

megoldásra u.i. akkor az kellene teljesüljök, hogy a $v := y - u$ függvényre $v' - v \equiv 0$ és $v(0) = 0$, tehát $v' = v$, $v'/v \equiv 1$, $\frac{d}{dx} \log v(x) \equiv 1$, $\log v(x) = \log v(0) + x$, $v(x) = v(0)e^x$, de mivel $v(0) = 0$, ebből $v \equiv 0$, azaz $y \equiv u$. Tehát azzal, hogy feltettük, hogy van analitikus megoldás, nem veszítettünk itt semmit. Az amúgy is világos – rekurzívan, az $y' = y + x$ előállítrásból – hogy ha $y \in C^1$, akkor a jobboldal C^1, tehát a baloldal is, azaz $y' \in C^1$, tehát $y \in C^2$, s.í.t., $y \in C^\infty$. Nem akkora nagy merészség tehát feltenni, hogy a megoldás analitikus is.)

2.6. Fourier-sorok

Tekintsünk egy $F(z) := \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ Maclaurin- (0 körüli Taylor-) sort, és tegyük fel, hogy a konvergenciasugár $R > 1$; ekkor ez szépen (normálisan, egyenletesen, abszolút) konvergál a $C := \{z = e^{it} : t \in \mathbb{R} \text{ (vagy } 0 \le t \le 2\pi)\}$ egységkörön. Tehát azt kapjuk, hogy a

$$\varphi(t) := F(e^{it}) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n e^{int} = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n \cos nt + b_n \sin nt),$$

(ahol most $a_n := c_n,\ b_n := ic_n$) előállítás konvergens sor.

2.13. Definíció. *Az ilyen alakú függvénysorokat általában trigonometrikus soroknak nevezzük.*

2.11. Megjegyzés. *Ha $R > 1$, C-n egyenletes a konvergencia, ezért tetszőleges $m \in \mathbb{N}$-re $\displaystyle\int_0^{2\pi} \varphi(t)e^{-imt}dt = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \int_0^{2\pi} e^{i(n-m)t}dt = c_m \cdot 2\pi i$, mert $k := n - m \neq 0$ esetén $\displaystyle\int_0^{2\pi} e^{ikt}dt = \left[\frac{e^{ikt}}{ik}\right]_0^{2\pi} = 0$. (Ezek a formulák az ú.n. ortogonalitási relációk e^{int}-re.)*

2.10. Következmény (Cauchy-féle együttható-formula). *Ha az $F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ Maclaurin sor konvergencia-sugara $R > 1$, akkor*

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} F(e^{it})e^{-int}dt.$$

(Ez nagyon fontos formula, ami az együtthatók Taylor-féle előállítását kiegészíti. Azt lehet mondani, hogy lényegében erre a formulára épül a komplex függvénytan...)

Induljunk most ki tetszőleges $f \in R[0, 2\pi]$ 2π periodikus Riemann-integrálható függvényből. Ekkor ehhez is le lehet gyártani az együtthatókat, fel lehet írni a sort.

2.14. Definíció. *Egy $f \in R[0, 2\pi]$ függvény Fourier-sora az a trigonometrikus sor, melyre $a_0 := \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f(t)dt$, $a_n := \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f(t)\cos nt\ dt$, $b_n := \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f(t)\sin nt\ dt$.*

2.12. Megjegyzés. *Ortogonalitási relációk valós alakban azt jelentik, hogy $\displaystyle\int_0^{2\pi} \cos nx \cos mx\ dx = \int_0^{2\pi} \sin nx \sin mx\ dx = \int_0^{2\pi} \cos nx \sin mx\ dx = 0 \quad (n \neq m)$ és $\displaystyle\int_0^{2\pi} \cos nx \sin nx\ dx = 0$ – azaz a trigonometrikus sor valós alakban is ortogonális.*

2.14. Tétel. *Ha f szakaszonként folytonosan differenciálható (beleértve, hogy az osztópontokban balról is, jobbról is azzá tehető), akkor a Fourier-sora konvergál, és*

$$S_n(f,t) \to \frac{1}{2}(f(t-0)+f(t+0)).$$

2.17. Példa. *Ha $f(x) = \operatorname{sgn} x$, $|x| < \pi$, és periodikusan kiterjesztjük, akkor is* $\operatorname{sgn} x = \frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2k+1}\sin(2k+1)x$.

2.13. Megjegyzés. *Nem konvergálhat egyenletesen, mert nem folytonos $f(x)$. De az igaz, hogy ha $f \in C^1(\mathbb{R})$ 2π-periodikus, akkor egyenletes a konvergencia. Ebből következik, hogy C^1 függvények közelíthetőek trigonometrikus polinomokkal:* $T_n(x) = a_0 + \sum_{k=0}^{n} a_k \cos kx + b_k \sin kx$.

2.15. Tétel. *(Weierstrass 2. approximációs tétele) Ha $f \in C(\mathbb{R})$ 2π periodikus, akkor is $\forall\varepsilon > 0$ létezik T trigonometrikus polinom, hogy $|f(x) - T(x)| \le \varepsilon$ ($\forall x \in \mathbb{R}$, egyenletesen).*

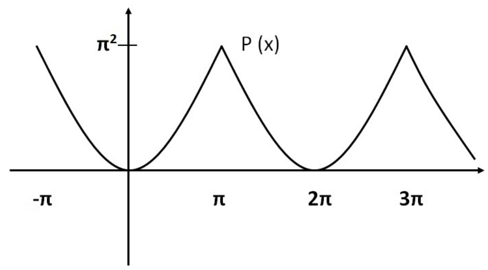
2.18. Példa. *Tekintsük a $p(x) := x^2$ ($|x| \le \pi$) parabolafüggvényt, 2π-vel periodikusan kiterjesztve. Számítsuk ki a Fourier-sorát!*

p páros, ezért $\int_0^{2\pi} p(x)\sin mx \; dx = \int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{p(x)\sin mx}_{\text{páratlan}} \; dx = 0$ $(m \in \mathbb{N})$

$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} p(x)dx = \frac{1}{2\pi}\left[\frac{x^3}{3}\right]_{-\pi}^{\pi} = \frac{2\pi^3}{2\pi\cdot 3} = \frac{\pi^2}{3}$

$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} p(x)\cos nx \; dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x^2 \cos nx \; dx.$

(Kétszeres, parciális integrállal.)



$$\int x^2 \cos nx \; dx = x^2\frac{\sin nx}{n} - \int 2x\frac{\sin nx}{n}dx = \frac{1}{n}x^2\sin nx + \frac{2x\cos nx}{n^2} - \int 2\cdot\frac{-\cos nx}{n^2}dx$$
$$= \frac{1}{n}x^2\sin nx + \frac{2}{n^3}\sin nx,$$

$$\frac{1}{2}\pi a_n = \left[\frac{1}{n}x^2\sin nx + \frac{2}{n^2}x\cos nx + \frac{2}{n^3}\sin nx\right]_0^{\pi} = \frac{2\pi(-1)^n}{n^2}, \quad a_n = \frac{4(-1)^n}{n^2}.$$

2.11. Következmény. $\pi^2 = p(1) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\pi) = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{4(-1)^n}{n^2}(-1)^n$, *azaz* $\zeta(2) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$