Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem Gépészmérnöki Kar

Energetika és Mechatronika BSc szakok

Matematika A2H — Vizsga feladatsor — M

Dátum: 2016. június 13. Munkaidő: 90 perc

Hallgató neve: Hallgató Neptun kódja: .

0.) (3 pont: 3 jó válasz 3 pont, 2 jó 1, kevesebb 0 pont) Melyik állítás igaz, melyik nem?

a.) "Egy feltételesen konvergens sor részletösszegei nem alkothatnak monoton sorozatot."

b.) "Ha a $\lambda_0 = 2$ szám az $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ mátrix karakterisztikus polinomjának 2-szeres gyöke, és A diagonalizálható, akkor mindig van olyan O ortogonális mátrix, amelyre $OAO^T = D$ diagonális."

c.) "Ha egy differenciálható f függvénynek egy $P \in \operatorname{int} \mathcal{D}_f$ pontban van támaszsíkja, akkor az érintősíkja is."

- -

1.) (3 pont) Definiálja, mit jelent az, hogy egy $f_n : H \to \mathbb{R}$ függvénysorozat *egyenletesen konvergens* egy $E \subset H$ halmazon! Fogalmazzon meg ezzel ekvivalens kritériumot!

2.) (5 pont) Hogyan van értelmezve egy $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ mátrix *rangja*? Adjon meg legalább öt különböző, de ekvivalens meghatározást!

3.) (5 pont) Adja meg egy $H \subset \mathbb{R}^n$ korlátos halmaz n-dimenziós Jordan-mérhetőségének és a $V_n(H)$ n dimenziós Jordan-térfogatának a definícióját!

- -

4.) (3 pont) Tekintsük a $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2\ e^{2n+in^2}}{n\ e^{3n-i\sqrt{n}}}$ komplex tagú numerikus sort!

a.) Állapítsa meg, hogy konvergens-e a sor!

b.) Állapítsa meg, hogy abszolút konvergens-e a sor!

5.) (4 pont) Tekintsük a $\displaystyle H(x) := \int_0^x e^{-t^3} dt$ integrált!

a.) Írja fel $H(x)$ Maclaurin-sorát!

b.) Meddig kell elmenni a szummázásban, hogy $H(0,5)$ értékét legalább 4 tizedesre pontosan megállapítsuk?

6.) (5 pont) Legyenek $e(z) := e^z$, $f(z) := e^{-z}$, $g(z) := \operatorname{ch}(z+2)$ és $h(z) := \operatorname{sh}(z-1)$!

a.) Keressük meg a $W := [e(z), f(z), g(z), h(z)] \subset C(\mathbb{R})$ altér egy bázisát!

b.) Hány dimenziós teret feszítenek ki ezek a függvények a $C(\mathbb{R})$ vektortérben?

7.) (5 pont) Állapítsa meg, hogy diagonalizálható-e az $M := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ mátrix, és ha igen, akkor írja fel a diagonális átalakítás szorzat alakját!

8.) (6 pont) Tekintsük a $h(x,y,z) = (xy + z^2, e^x y, zx + 3y) : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ függvényt! Ekkor az $\mathbf{a} := (0,1,2)$ pont képe a $\mathbf{b} := h(\mathbf{a}) = (4,1,3)$ pont lesz. Invertálható-e differenciálható módon a h függvény a $\mathbf{b}$ pont egy környezetében? Ha igen, határozza meg a h^{-1} inverz függvény deriváltját a $\mathbf{b}$ pontban!

9.) (3 pont) Teljes differenciál-e az $(x^3 + \operatorname{ch} y)\,dx + (e^z + x\operatorname{sh} y)\,dy + e^z y dz$ differenciál? Válaszát indokolja!

10.) (6 pont) Állapítsa meg a $g(x,y) := e^x - 3x + 2x^2\sqrt{y}$ függvény értelmezési tartományát és értékkészletét!

11.) (7 pont) A P paralelogrammát az xy síkban az $x = -3$, $x = 0$, $y = x$ és $y = x + 1$ egyenesek határolják. Számítsuk ki az $I := \iint_P \dfrac{(2x-3y)\,\operatorname{ch}(y-x)}{3 - 4x + 4y}\,dxdy$ területi integrált! (Útmutatás: Alkalmazzuk az $u := 2x - 3y$, $v := -x + y$ helyettesítést!)

12.) (5 pont) Egy $R = 13$ cm sugarú, gömb alakú görödgdinnyébe egyenes kúp alakú L léket vágunk úgy, hogy annak csúcsa a dinnye közepébe ér, és a kúpnak a gömb héjánál $\ell = 5$ cm a sugara. Mennyi lesz a kivágott lék tömege, ha a dinnye sűrűségét a vízével egyezőleg 1 g/cm^3-nek vesszük, és úgy számolunk, hogy $2\pi \approx 6,3$?

(Útmutatás: Használjuk az $(x,y,z) = G(r,\varphi,\theta) := (r\sin\theta\cos\varphi, r\sin\theta\sin\varphi, r\cos\theta)$ gömbi koordinátákra való áttérést!)

- -

EMLÉKEZTETŐ: A GÖMBI KOORDINÁTÁK

A térben egy P pont gömbi koordinátái az $r := |\overrightarrow{OP}| = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$, a P pontnak az xy-síkra vetített merőleges P' vetületének a polárkoordinátákból jól ismert φ irányszöge (azaz az $\overrightarrow{OP'}$ szöge a pozitív x tengely irányával), és a P pont θ "elhajlása", azaz $\overrightarrow{OP}$-nek a pozitív z tengellyel bezárt szöge.

Mivel $|\overrightarrow{OP'}| = \sin\theta|\overrightarrow{OP}|$, a gömbi koordinátákkal kifejezve a a P ponthoz tartozó szokásos derékszögű (x,y,z) koordinátákat, azt kapjuk, hogy $x = r\sin\theta\cos\varphi$, $y = r\sin\theta\sin\varphi$, $z = r\cos\theta$. Tehát a gömbi koordinátákra való áttérést a $G(r,\varphi,\theta) = (r\sin\theta\cos\varphi, r\sin\theta\sin\varphi, r\cos\theta)$ leképezés valósítja meg.

Az áttérés Jacobi determinánsára

$$J_G(r,\varphi,\theta) = \left|\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r}(r,\varphi,\theta) & \frac{\partial x}{\partial \varphi}(r,\varphi,\theta) & \frac{\partial x}{\partial \theta}(r,\varphi,\theta) \\ \frac{\partial y}{\partial r}(r,\varphi,\theta) & \frac{\partial y}{\partial \varphi}(r,\varphi,\theta) & \frac{\partial y}{\partial \theta}(r,\varphi,\theta) \\ \frac{\partial z}{\partial r}(r,\varphi,\theta) & \frac{\partial z}{\partial \varphi}(r,\varphi,\theta) & \frac{\partial z}{\partial \theta}(r,\varphi,\theta) \end{vmatrix}\right| = \left|\begin{vmatrix} \sin\theta\cos\varphi & -r\sin\theta\sin\varphi & r\cos\theta\cos\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi & r\sin\theta\cos\varphi & r\cos\theta\sin\varphi \\ \cos\theta & 0 & -r\sin\theta \end{vmatrix}\right|$$

aminek utolsó két oszlopából r-et kiemelve és a determinánst az utolsó sor szerint kifejtve

$$J_G(r,\varphi,\theta) = r^2\left|\cos\theta\begin{vmatrix} -\sin\theta\sin\varphi & \cos\theta\cos\varphi \\ \sin\theta\cos\varphi & \cos\theta\sin\varphi \end{vmatrix} + (-\sin\theta)\begin{vmatrix} \sin\theta\cos\varphi & -\sin\theta\sin\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi & \sin\theta\cos\varphi \end{vmatrix}\right| = r^2\sin\theta.$$

Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem Gépészmérnöki Kar
Energetika és Mechatronika BSc szakok

Matematika A2H – Vizsga feladatok megoldásai – M

0.) (3 pont: 3 jó válasz 3 pont, 2 jó 1, kevesebb 0 pont)

a.) IGAZ. (U.i. ha S_n monoton, akkor $a_n = S_n - S_{n-1}$ állandó előjelű, így ha konvergens is, akkor már abszolút konvergens is /mert $\sum_n |a_n| = \pm \sum a_n$ feltétel szerint konvergens/, azaz nem lehetne csak *feltételesen*, de nem abszolút konvergens.)

b.) HAMIS. (Akkor lehet ortogonális transzformációval/mátrixszal diagonalizálni, ha a mátrix szimmetrikus – és a feltevésekből ez nem következik. Ld. pl. az $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ mátrixot, amely alsó háromszögmátrix, sajátértékei $\lambda_1 = 1$ és $\lambda_{2,3} = 2$, és az utóbbiakhoz $\mathbf{e}_1$ és $\mathbf{e}_2$ sajátvektorok is; ezért biztosan lehet diagonalizálni (u.i. λ_1-hez is kell lennie egy sajátvektornak – ez egyébként konrétan az $(1, -1, -1)^T$ vektor) – de mégsem lehet *ortogonálisan* diagonalizálni, hiszen A nem szimmetrikus.)

c.) IGAZ. (U.i. differenciálható függvény minden támaszsíkja egyúttal az adott pont körüli legjobb lineáris közelítés is.)

- -

1.) (3 pont) Az f_n függvénysorozat egyenletesen konvergens egy $E \subset H$ részhalmazon, ha az $f_n|_E\ E :\to \mathbb{R}$ függvénysorozatra $\forall \varepsilon > 0\ \exists N = N(\varepsilon)$ ú.h. $\forall n \geq N\ \forall x \in E\ |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$.

Ez akkor és csak akkor teljesül, ha a függvénysorozat egyenletesen Cauchy tulajdonságú az E halmazon: $\forall \varepsilon > 0\ \exists N(\varepsilon), \forall m \geq n \geq N\ \forall x \in E\ |f_n(x) - f_m(x)| \leq \varepsilon$.

Tehát az egyenletesség mindig azt jelenti, hogy $N(\varepsilon)$ nem függ x-től.

2.) (5 pont) Az A mátrix $r(A)$ rangja definíció szerint az $s(A)$ *sor-rang* és $o(A)$ *oszlop-rang* közös értéke volt: a sor- ill. oszlop-rang pedig a sorok ill. oszlopok által kifeszített altér dimenziója (azaz a vektorok közt található lineárisan független vektorok maximális száma) volt.

Ezzel egyenlő a mátrix redukált lépcsős alakjában (r.r.e.f) található *vezérelemek* $e(A)$ *száma*, vagy az $\operatorname{im} A$ *képtér dimenziója*, valamint a $k \times k$-as *nem-szinguláris részmátrixok méretének* $\max\{k\ :\ \exists B \in \mathbb{R}^{k\times k},\ B \subset A,\ \det B \neq 0\}$ *maximális értéke*.

Ki lehet még számítani a rangot a dimenzió-tételből is úgy, mint $m - \dim\ker A$, mert az A mátrix lineáris leképezést valósít meg az $U := \mathbb{R}^m$ térből az $\mathbb{R}^n$ térbe (az $\mathbf{y} = A\mathbf{x}$ képlettel) és $m = \dim U = \dim\ker A + \dim\operatorname{im} A \Rightarrow r(A) = \dim\operatorname{im} A = m - \dim\ker A$.

Mivel $\ker A = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m\ :\ A\mathbf{x} = 0 \Leftrightarrow \mathbf{a}_i \cdot \mathbf{x} = 0\ (i = 1, \ldots, m)\} = S(A)^\perp$, azt is mondhatjuk, hogy a sortér merőleges kiegészítő alterének a dimenzióját kell levonni m-ből.

Hasonló okoskodással egyébként a képtér n dimenziójából levonva az $R(A)$ oszloptér ($=\operatorname{im} A$ képtér) merőleges kiegészítő alterének dimenzóját, szintén meg kell kapjuk az oszloptér (képtér) dimenzióját, azaz a rangot.

3.) (5 pont) Az $\mathbb{R}^n$-beli téglák mérhetőek, és térfogatuk az oldalaik hosszának a szorzata – ekvivalensen, elegendő azt feltenni, hogy $V_n([0,1]^n) = 1$.

H csak akkor lehet Jordan-mérhető, ha korlátos. Általában, egy korlátos H halmazt Jordan-mérhetőnek nevezünk, ha a $V_\star(H)$ alsó- és $V^\star(H)$ felső Jordan-mértéke megegyezik.

Ekkor ezek közös értéke a H halmaz $V_n(H)$ n-dimenziós Jordan térfogata v. mértéke.

Itt a felső Jordan-térfogat $V^\star(H) := \inf_R \sum_{j=1}^m V_n(R_j)$, ahol R tetszőleges *lefedő tégla-rendszer*, azaz tetszőleges $m \in \mathbb{N}$ mellett $R_j \subset \mathbb{R}^n$ $(j = 1, \ldots, m)$ téglák olyan rendszere, amelyre $\cup_{j=1}^m R_j \supset H$.

Az alsó Jordan-mérték hasonlóan $V_\star(H) := \sup_Q \sum_{j=1}^m V_n(Q_j)$, ahol Q tetszőleges *beírt tégla-rendszer*, azaz tetszőleges $m \in \mathbb{N}$ mellett $Q_j \subset \mathbb{R}^n$ $(j = 1, \ldots, m)$ téglák olyan *diszjunkt* rendszere, amelyre $Q_j \subset H$.

- -

4.) (3 pont) A **b.)** résszel kezdjük a megoldást, mert ha a sor abszolút konvergens, akkor konvergens is. A sor tagjainak abszolút értékeire $|a_n| = \left|\dfrac{n^2 e^{2n+in^2}}{ne^{3n-i\sqrt{n}}}\right| = \dfrac{n^2|e^{2n+in^2}|}{n|e^{3n-i\sqrt{n}}|} = \dfrac{n^2e^{2n}}{ne^{3n}} = ne^{-n}$, mivel $|e^{a+ib}| = e^a$ és $e^a/e^b = e^{a-b}$.

Így az abszolút értékekből álló sorra $\displaystyle\sum_{n=0}^\infty |a_n| = \sum_{n=0}^\infty ne^{-n} = \frac{e^{-1}}{(1-e^{-1})^2} = \frac{e}{(e-1)^2} < \infty$, konvergens, hiszen előadáson kiszámítottuk (a geometriai sor deriváltsorából), hogy $|z| < 1$ esetén – így $z = 1/e < 1$-re is – $\displaystyle\sum_{n=0}^\infty nz^n = \frac{z}{(1-z)^2}$.

Ha ez nem jut eszünkbe, akkor is könnyen látható (pl. a hányadoskritériummal vagy a gyökkritériummal), hogy $\sum_{n=0}^\infty ne^{-n} < \infty$. Tehát **b.)**-re a válasz: a sor abszolút konvergens.

a.) Mivel azt találtuk, hogy a sor abszolút konvergens, így automatikusan konvergens is.

5.) (4 pont) Az exponenciális függvény $e^z = \sum_{n=0}^\infty z^n/n!$ hatványsora (Maclaurin sora) minden korlátos és zárt halmazon – így a $[0, x] \subset [0, 0, 5]$ intervallumon is – egyenletesen konvergens. Ezért hatványsorba fejtés és $z = -t^3$ helyettesítése után felcserélhető az integrálás és a szummáció sorrendje. Így kapjuk, hogy $H(x) = \displaystyle\int_0^x \sum_{n=0}^\infty (-t)^{3n}/n!\ dt = \sum_{n=0}^\infty \int_0^x (-1)^n t^{3n}/n!\ dt = \sum_{n=0}^\infty (-1)^n \left[\frac{t^{3n+1}}{(3n+1)n!}\right]_0^x = \sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^n x^{3n+1}}{(3n+1)n!}$.

A kapott sorfejtés egy Leibniz típusú (alternáló) sor, ezért konvergens és a hibájára $|R_N| < a_{N+1}$. Tehát ha a sort $\varepsilon < 0,00005 = 1/20.000$ hibával akarjuk kiszámolni, akkor minden olyan N küszöb alkalmas, amelyre $a_{N+1} = \left|\dfrac{(-1)^{N+1}x^{3N+4}}{(3N+4)(N+1)!}\right| \le \dfrac{0,5^{3N+4}}{(3N+4)(N+1)!} < 0,00005$, azaz amelyre $20.000 < 2^{3N+4}(3N+4)(N+1)!$.

$N = 3$-ra a jobboldali mennyiség $2^{13} \cdot 13 \cdot 4! = 2^{13} \cdot 13 \cdot 24 = 2^{16} \cdot 39 > 2^21 = 2 \cdot 1024^2 > 2.000.000$, tehát már $R_3 \le a_4 < 1/2.000.000 < 0,0000005$, és hat tizedesjegyre is jól közelít. $N = 2$-re ez $2^{10} \cdot 10 \cdot 6 > 20.000$, tehát már $N = 2$-re fennáll a 4 tizedesjegyre való közelítés.

6.) (5 pont) **a.)** A legtermészetesebb választás talán pont az $\{e(z), f(z)\}$ rendszer.

Ez a két függvény $C(\mathbb{R})$-ben lineárisan függgetlen, mert ha $ae(z)+bf(z)=0$ (azonosan, tehát a $C(\mathbb{R})$ térben mint konstans 0 függvény jelentkezik az összegük), akkor pl. a $z=0$ és $z=1$ értékeket behelyettesítve $a+b=0$ és $ea+\frac{1}{e}b=0$, tehát $(e^2-1)a=0$ és így $a=0$, amiből pedig már $a+b=0$ miatt $b=0$ is következik.

A további függvények a definíciójuk miatt $g(z)=\operatorname{ch}(z+2)=\frac{1}{2}(e^{z+2}+e^{-2-z})=\frac{e^2}{2}e(z)-\frac{1}{2e^2}f(z)$ illetve $h(z)=\operatorname{sh}(z-1)=\frac{1}{2}(e^{z-1}-e^{1-z})=\frac{1}{2e}e(z)-\frac{e}{2}f(z)$ alakban az $e(z)$ és $f(z)$ függvények lineáris kombinációiként állnak elő, tehát ezektől lineárisan függenek.

Így $W=[e(z), f(z)]$, ahol ez a két generáló függvény már lineárisan független, azaz bázis, és a generált altér dimenziója ennek megfelelően $\dim W = 2$.

7.) (5 pont) Alsó háromszögmátrix lévén, M sajátértékei a diagonális elemek: $p_M(\lambda)=(\lambda-1)(\lambda-2)^2$ és $\lambda_1=1$, valamint $\lambda_{2,3}=2$ kétszeres sajátérték.

A sajátvektorokat az $(M-I)\mathbf{x}=0$ illetve $(M-2I)\mathbf{y}=0$ saját-egyenletekből lehet kiszámítani: ezeknek az egyenleteknek az együttható-mátrixaira Gauss-Jordan eliminációt végezve adódik $A-I=\begin{bmatrix}0&0&0\\1&1&0\\1&1&1\end{bmatrix}\Leftrightarrow\begin{bmatrix}1&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$, $x_1+x_2=0$ és $x_3=0$, azaz $\mathbf{x}=t\begin{bmatrix}1\\-1\\0\end{bmatrix}$ illetve $A-2I=\begin{bmatrix}-1&0&0\\1&0&0\\1&1&0\end{bmatrix}\Leftrightarrow\begin{bmatrix}1&0&0\\1&1&0\end{bmatrix}\Leftrightarrow\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\end{bmatrix}$, $y_1=0$, $y_2=0$, tehát $\mathbf{y}=s\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$.

A mátrixnak csak két lineárisan független sajátvektora van – így nem diagonalizálható. (Megjegyzés: Az súlyosan hibás, ha a megkapott két sajátvektort vektoriálisan szorozva, "konstruálunk egy harmadikat" ... de a legnagyobb veszteség ezzel a hibás okoskodással az, hogy akkor bizony számolhatunk világba!)

8.) (6 pont) A parciális deriváltak folytonosak, így $h\in C^1(\mathbb{R}^3)$. Ezért alkalmazható az a tétel, miszerint h-nak egy adott $\mathbf{b}=h(\mathbf{a})$ pontban létezik differenciálható inverze pontosan akkor, ha $Dh(\mathbf{a})$ nem-szinguláris: és ebben az esetben $Dh^{-1}(\mathbf{b})=Dh(\mathbf{a})^{-1}$.

Tehát azt kell először tisztázzuk, hogy szinguláris-e a $Dh(\mathbf{a})$ deriváltmátrix. Kiszámítva,

$$Dh(x,y,z)=\begin{bmatrix}\frac{\partial h_1}{\partial x}(x,y,z) & \frac{\partial h_1}{\partial y}(x,y,z) & \frac{\partial h_1}{\partial z}(x,y,z)\\ \frac{\partial h_2}{\partial x}(x,y,z) & \frac{\partial h_2}{\partial y}(x,y,z) & \frac{\partial h_2}{\partial z}(x,y,z)\\ \frac{\partial h_3}{\partial x}(x,y,z) & \frac{\partial h_3}{\partial y}(x,y,z) & \frac{\partial h_3}{\partial z}(x,y,z)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}y&x&2z\\e^xy&e^x&0\\z&3&x\end{bmatrix},\qquad Dh(\mathbf{a})=\begin{bmatrix}1&0&4\\1&1&0\\2&3&0\end{bmatrix}$$

ami láthatóan egy nem-szinguláris mátrix, hiszen a determináns értéke 4, így létezik deriválható h^{-1} inverz függvény is.

Az inverz meghatározásához Gauss-Jordan eliminációt végzünk:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&0&4&1&0&0\\1&1&0&0&1&0\\2&3&0&0&0&1\end{array}\right]\underset{\Leftrightarrow}{S_2-S_1, S_3-2S_1}\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&0&4&1&0&0\\0&1&-4&-1&1&0\\0&3&-8&-2&0&1\end{array}\right]\underset{\Leftrightarrow}{S_3-3S_2}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&0&4&1&0&0\\0&1&-4&-1&1&0\\0&0&4&1&-3&1\end{array}\right]\underset{\frac{1}{4}S_3}{\overset{S_1-S_3,S_2+S_3}{\Leftrightarrow}}\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&0&3&-1\\0&1&0&0&-2&1\\0&0&1&1/4&-3/4&1/4\end{array}\right].$$

Ebből tehát $Dh^{-1}(\mathbf{b})=\begin{bmatrix}0&3&-1\\0&-2&1\\1/4&-3/4&1/4\end{bmatrix}$.

9.) (3 pont) Ha az (volna), akkor a Young tétel szerint a keresztbe vett parciális deriváltaknak is meg kell (kéne) egyeznie.

A differenciált $Pdx+Qdy+Rdz$ alakban írva, $P'_y = \operatorname{sh} y$ és $Q'_x = \operatorname{sh} y$ stimmel, $P'_z = 0 = R'_z$ is egyezik, és $Q'_z = e^z = R'_y$ is teljesül, azaz teljesülnek a Young tétel feltételei, és (tanult tétel értelmében) létezik $f(x,y,z)$ potenciálfüggvény.

Nem volt kötelező, de egyébként a potenciálfüggvényt meg is lehet keresni: $f(x,y,z) = \frac{1}{4}x^4 + x\operatorname{ch} y + ye^z + c$.

Ennek kiszámolása: mivel $f'_x = P$, rögzített y, z értékekre $f(x,y,z) = \frac{1}{4}x^4 + x\operatorname{ch} y + C(y,z)$, hasonlóan a második parciális deriváltból $f(x,y,z) = ye^z + x\operatorname{ch} y + B(x,z)$ és a harmadikból $f(x,y,z) = ye^z + A(x,y)$.

Így pl. az első kettőből $C(y,z) - B(x,z) = \frac{1}{4}x^4 - ye^z$, azaz $C(y,z) - ye^z = \frac{1}{4}x^4 + B(x,z)$, és, mivel itt a baloldal nem függ x-től, a jobb oldal pedig nem függ y-tól, a másik oldalak sem függhetnek, tehát a két oldal egy $c(z)$ függvény kétféle felírása, és ezért $C(y,z) = ye^z + c(z)$ és $B(x,z) = \frac{1}{4}x^4 + c(z)$.

Ebből tehát $f(x,y,z) = \frac{1}{4}x^4 + x\operatorname{ch} y + C(y,z) = \frac{1}{4}x^4 + x\operatorname{ch} y + ye^z + c(z)$ $(= ye^z + x\operatorname{ch} y + B(x,z) = ye^z + x\operatorname{ch} y + \frac{1}{4}x^4 + c(z))$. A harmadik egyenletet is figyelembe véve – ebből levonva – adódik tehát, hogy $0 = \frac{1}{4}x^4 + x\operatorname{ch} y + ye^z + c(z) - (ye^z + A(x,y))$, tehát $c(z) = \frac{1}{4}x^4 + x\operatorname{ch} y - A(x,y)$, és így itt a baloldal nem függhet z-től sem, konstans: $c(z) = c$. Ezért végül $f(x,y,z) = \frac{1}{4}x^4 + x\operatorname{ch} y + ye^z + c$.

10.) (6 pont) A négyzetgyök miatt $D_g = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ y \geq 0\}$ (azaz a felső félsík).

Az értékkészlet meghatározásához a függvény szélsőértékeit, illetve supremumát és infimumát keressük: mivel f folytonos, az értékkészletében bármely két felvett érték közötti összes többi valós szám is ott lesz, tehát az értékkészlet, R_g, biztosan intervallum lesz. Csak az a kérdés, hogy véges vagy végtelen, nyílt vagy zárt végű intervallum lesz-e: ha a függvénynek van (globális) maximuma illetve minimuma, akkor a felső illetve alsó végpont benne lesz az intervallumban, ha nincsen, csak sup és inf, akkor pedig nem tartozik hozzá.

Az nyilvánvaló, hogy a függvényértékek felülről nem korlátosak, supremumuk $+\infty$: például ha rögzítjük az egyik változót, mondjuk $x = x_0 = 1$ értékkel, akkor $g(x_0, y) = e - 3 + 2\sqrt{y} \to +\infty$ $(y \to +\infty)$. Tehát $R_g = (\alpha, \infty)$ vagy $[\alpha, \infty)$ alakú intervallum lesz.

Az esetleges szélsőértékek vagy a D_g értelmezési tartomány belsejében lesznek, vagy a határán. A tartomány belseje az $S := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ y > 0\}$ nyílt félsík, határa az $E := \partial D_g = \{(x,0) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x \in \mathbb{R}\}$ x-tengely egyenese. A tartomány belsejében a g függvény differenciálható, mert parciális deriváltjai léteznek és folytonosak, ezért ott szélsőérték csak kritikus pontban fordulhat elő. Ezért minden szélsőérték-helyen a $\nabla g(x,y) = (\partial g/\partial x, \partial g/\partial y) = (0,0)$ azaz az $(e^x - 3 + 4x\sqrt{y}, x^2/\sqrt{y}) = (0,0)$ egyenletnek kell teljesülnie. A második egyenletből (koordinátából) $x = 0$, így az elsőből $e^0 - 3 + 0 = 0$, tehát $e = 3$, ami nem áll fenn, tehát nincsen a $\nabla g = (0,0)$ egyenletnek megoldása, azaz nincsen g-nek kritikus pontja S-ben.

Az E határ-egyenesen $g(x,y) = g(x,0)$: jelölje tehát $\gamma(x) := g(x,0) = e^x - 3x$. Ez láthatóan egy folytonosan diffrenciálható konvex egyváltozós függvénye az x változónak. (A konvexitás következik pl. abból, hogy $\gamma''(x) = e^x > 0$.) A derivált $\gamma'(x) = e^x - 3$, ami akkor tűnik el, ha $x = \log 3$; ebben a ponban minimum van, sőt, ez a minimum az egész E-re vonatkozó abszolút minimuma is γ-nak. Valóban, γ konvex és így az érintő egyenesei γ alatt haladnak mindenütt; speciálisan az $x = \log 3$ minimumhelyen is a vízszintes érintő γ alatt kell haladjon, tehát másutt nagyobbak a függvényértékek.

Ezzel azonban csak annyit igazoltunk, hogy $(\log 3, 0)$ a g függvénynek feltételes szélsőértéke az E határegyenesre vonatkozólag (azaz ha feltesszük, hogy $(x, y) \in E$, tehát $y = 0$). Azonban tetszőleges $(x, y) \in D_g$ esetén igaz, hogy $g(x, y) \geq g(x, 0)$, mivel $x^2 \geq 0$ és rögzített x érték mellett $\sqrt{y}$, így $x^2\sqrt{y}$ is, y-nak monoton növő függvénye $[0, \infty)$-en. Ezért tetszőleges (x, y)-ra $g(x, y) \geq g(x, 0) \geq g(\log 3, 0)$, tehát ez az érték g-nek globálisan is minimuma.

Így $R_g = [g(\log 3, 0), +\infty) = [3 - 3\log 3, +\infty)$ balról zárt, jobbról végtelen intervallum lesz.

11.) (7 pont) A javasolt helyettesítéssel $f(x, y) = \dfrac{(2x - 3y)\ \mathrm{ch}\,(y - x)}{3 - 4x + 4y} = \dfrac{u\ \mathrm{ch}\, v}{4v + 3} =:$ $\phi(u, v)$ alakba kerül, ami már kicsit kedvezőbb kinézetű.

A transzformáció egyelőre csak $u(x, y), v(x, y)$ alakban van meg – ebből először is kiszámítjuk a $T(u, v) = (x, y)$ fordított irányú transzformációt. Ez lineáris egyenletrendszert jelent: megoldása $x = 2v - u$, $y = 2v + u$, tehát $T(u, v) = (-u + 2v, u + 2v)$. Az áttérés derivált-mátrixa $DT(u, v) = \begin{bmatrix} \partial x/\partial u & \partial x/\partial v \\ \partial y/\partial u & \partial y/\partial v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ (konstans, mivel lineáris volt a T transzformáció). Ezért a Jacobi-determináns $J_T(u, v) = |\det DT(u, v)| = 5$.

Meg kell határozzuk azt az E tartományt is az uv síkon, amelyre $T(E) = P$. Tekintve, hogy lineáris transzformációról van szó, egyenesek egyenesekbe mennek át, így elég a határegyenesek megfelelőit megkeresni. $x = -3 \Leftrightarrow -u + 2v = -3$, azaz $v = \frac{1}{2}(u - 3)$ vagy $u = 2v + 3$; $x = 0 \Leftrightarrow -u + 2v = 0$, azaz $v = \frac{1}{2}u$ vagy $u = 2v$; $y = x \Leftrightarrow v = 0$ $y = x + 1 \Leftrightarrow v = 1$. Természetesen az ezekkel határolt E tartomány szintén egy paralelogramma lesz, amelynek a csúcsai egyébként az $O = (0, 0)$, az $R = (2, 1)$, az $S = (3, 0)$ és a $T = (5, 1)$ pontok lesznek.

Az integrálban az áttérés után Fubini tételét alkalmazva úgy, hogy belül u, majd kívül v szerint integráljunk, adódik $I := \displaystyle\iint_P \frac{(2x - 3y)\ \mathrm{ch}\,(y - x)}{3 - 4x + 4y}\, dxdy = \iint_E \phi(u, v) J_T(u, v)\, dudv =$ $\displaystyle\iint_E \frac{u\ \mathrm{ch}\, v}{4v + 3}\, 5\ dudv = \int_0^1 \left(\frac{5\ \mathrm{ch}\, v}{4v + 3} \int_{2v}^{2v+3} u\ du \right) dv = \int_0^1 \frac{5\ \mathrm{ch}\, v}{4v + 3} \left[\frac{u^2}{2} \right]_{2v}^{2v+3} dv = \int_0^1 \frac{5\ \mathrm{ch}\, v}{4v + 3} \cdot$ $\displaystyle\frac{1}{2}\left((2v + 3)^2 - (2v)^2 \right)\ dv = \int_0^1 \frac{5\ \mathrm{ch}\, v}{4v + 3} \cdot \frac{1}{2}\,(12v + 9)\ dv = \frac{15}{2} \int_0^1 \mathrm{ch}\, v\ dv = \frac{15}{2}[\mathrm{sh}\, v]_0^1 = \frac{15}{2}\mathrm{sh}\, 1.$

12.) (5 pont) A lékre $V(L) = \iiint_L 1\ dxdydz = \iiint_E J_G(r, \varphi, \theta)\ drd\varphi d\theta$, ahol J a $G(r, \varphi, \theta) = (r \sin\theta \cos\varphi, r \sin\theta \sin\varphi, r \cos\theta)$ gömbi koordinátákra való áttérés leképezés Jacobi-determinánsa (deriváltmátrixa determinánsának abszolút értéke) és E az L kúpmetszetnek megfelelő koordináta-hármasok a gömbi koordinátákban felírva: azaz $E = \{(r, \varphi, \theta)\ :\ 0 \leq r \leq R,\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi,\ 0 \leq \theta \leq \alpha\} = [0, R] \times [0, 2\pi] \times [0, \alpha]$, ahol a feltételek szerint $\alpha := \arcsin(\ell/R)$. A gömbi koordináta-áttérés Jacobi-determinánsa $J_G(r, \varphi, \theta) = \sin\theta r^2$.

A Fubini tétel alkalmazásával szukcesszív integrálokra áttérve $V(L) = \iiint_E J_G(r, \varphi, \theta)\ drd\varphi d\theta$ $= \int_0^\alpha \int_0^{2\pi} \int_0^R \sin\theta r^2 dr\ d\varphi\ d\theta = \left[\dfrac{r^3}{3} \right]_0^R 2\pi \int_0^\alpha \sin\theta\ d\theta = \dfrac{2\pi[1 - \cos\alpha]}{3} R^3.$

Behelyettesítve és az ismert azonosságokkal $\cos(\alpha) = \sqrt{1 - \sin^2(\alpha)} = \sqrt{1 - (\ell/R)^2} =$ $\sqrt{1 - 25/169} = \sqrt{144/169} = 12/13$. Ezért $V(L) = \dfrac{2\pi[1 - 12/13]}{3} 13^3 = \dfrac{2\pi}{3} \cdot 13^2 \approx 6,3/3 \cdot 169 = 2,1 \cdot 169 = 354,9$ (cm^3), azaz az L lék tömege $\approx 354,9$g ≈ 35 dkg.