Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem Gépészmérnöki Kar

Energetika és Mechatronika BSc szakok

Matematika A2H - Első Zh. Gyakorló feladatsor

Kiadva: 2016. március 30.

1.) Konvergensek-e az alábbi sorok?

a.) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{n^{2n}}$ b.) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+\frac{1}{n}}}$

2.) Igazoljuk, hogy tetszőleges *komplex* értékekre is fennáll a valósból ismert $2\cos z \cos w = \cos(z+w) + \cos(z-w)$ azonosság!

3.) a) Számítsuk ki $\sqrt{1,08}$ értékét a $\Phi(x) := (1+x)^{1/2}$ binomiális sorából négy tizedes pontossággal!

b) Számítsuk ki $\sqrt{3}$ értékét kicsit trükkösen úgy, hogy $\sqrt{3} = \sqrt{27/25 \cdot 25/9} = \frac{5}{3}\sqrt{1,08}$!

4.) Legyen $f \in C^2(\mathbb{R})$ 2π-vel periódikus kétszer folytonosan differenciálható függvény!

a) Igazoljuk, hogy ekkor f Fourier-sorának együtthatóira igaz az $a_n = O(1/n^2)$, $b_n = O(1/n^2)$ becslés! (Ugye $x_n = O(y_n)$, ha $\exists K$ konstans, hogy $|x_n| \leq K y_n$ $(\forall n \in \mathbb{N})$ teljesül.)

b) Igazoljuk, hogy ekkor f Fourier-sora egyenletesen konvergál az egész valós egyenesen!

5.) Írjuk fel a $P := (1,2,3)$ ponton átmenő és az $\mathbf{a} := \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix}$ és a $\mathbf{b} := \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix}$ vektorok által kifeszített síkot! Adjuk meg O h távolságát a síktól.

6.) Ki lehet-e fejezni $\mathbb{R}^4$-ben a $\mathbf{b} := \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ vektort az $\mathbf{u} := \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{v} := \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{w} := \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix}$ és a $\mathbf{z} := \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ vektorok lineáris kombinációjaként? Adjuk meg az összes lehetséges megoldást!

Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem Gépészmérnöki Kar

Energetika és Mechatronika BSc szakok

Matematika A2H - I. Zh. — Gyakorló feladatsor megoldások

Kiadva: 2016. március 30.

1.) a.) Ha $a_n := \frac{(2n)!}{n^{2n}}$ akkor $a_{n+1}/a_n = \frac{(2n+2)(2n+1)}{(1+1/n)^{2n}(n+1)^2} = 2(2-1/n)(1+1/n)^{-2n} \to 4/e^2$ $(n \to \infty)$, ami < 1, tehát a hányados-kritérium szerint a sor konvergens.

b.) A sor tagjait hasonlítsuk a $b_n := 1/n$ tagokhoz: ekkor $\frac{1}{n^{1+\frac{1}{n}}}/b_n = n^{-1/n} = \exp(-\frac{\log n}{n}) \to 1$, tehát a sor pontosan akkor konvergens, ha a $\sum_n b_n$ sor. Ez viszont a harmonikus sor, amiről tudjuk, hogy divergál, így az eredeti sor is divergens.

2.) A megoldást két lépésben végezzük el, az azonosságot (függvényegyenletet) előbb komplex z-re de csak valós w-re, majd innen tetszőleges $z, w \in \mathbb{C}$-re kiterjesztve. Legyen tehát rögzített $w \in \mathbb{R}$ mellett $f(z) := 2\cos z \cos w - \cos(z+w) - \cos(z-w)$. Tudjuk, hogy erre a függvényre a valósban ismert azonosság értelmében $f|_{\mathbb{R}} \equiv 0$. Ezért speciálisan $f(0) = 0$, sőt $f'(0) = 0, \dots, f^{(k)}(0) = 0$, és így f Maclaurin sora $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} 0 \cdot z^n$ alakú. Tehát $f \equiv 0$ $(\forall z \in \mathbb{C})$. Ezt tudva hasonlóan okoskodhatunk z értékét rögzítve ($\mathbb{C}$-ben!) és a $g(w) := 2\cos z \cos w - \cos(z+w) - \cos(z-w)$ függvényt tekintve. Mivel $w \in \mathbb{R}$-re az azonosságot már beláttuk, $g|_{\mathbb{R}} \equiv 0$, tehát a Taylor-együtthatók a 0 pontban azonosan nullák, és így a Maclaurin-sor is azonosan 0, tehát $g(w) \equiv 0$. Azaz az azonosság minden $z, w \in \mathbb{C}$ mellett fennáll.

3.) a) Binomiális sorral $\Phi(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \binom{1/2}{k} x^k$, ami $\binom{1/2}{k} = \frac{1/2\cdot(-1/2)\cdot\dots\cdot(3/2-k)}{k!}$ váltakozó előjele és $\binom{1/2}{k} x^k$ csökkenő abszolút értéke miatt egy Leibniz típusú sort ad $x = 0,08$-ra pl. (és egyébként minden $|x| < 1$-re is). Ennek megfelelően arra van szükségünk, hogy $(|\Phi(0,8) - T_n| \le) a_{n+1} < 5 \cdot 10^{-5}$ álljon fenn.

A hibabecsléshez – alkalmazva a "szemi-faktoriális" jelölést, amely páratlan számokra $(2m+1)!! := (2m+1)\cdot(2m-1)\dots 3 \cdot 1$ – kiszámolhatjuk, hogy $\binom{1/2}{k} = (-1)^{k-1}\frac{1}{2^k}\frac{(2k-3)!!}{k!} = (-1)^{k-1}\frac{1}{2^k}\frac{(2k-1)!!}{(2k-1)k!} = (-1)^{k-1}\frac{(2k)!}{2^{2k}(2k-1)k!^2} = (-1)^{k-1}\binom{2k}{k}\frac{1}{4^k(2k-1)}$, $a_{n+1} = \binom{2n+2}{n+1}\frac{1}{4^{n+1}(2n+1)}0,08^{n+1}$. Ez $n = 2$-re azt adja, hogy $a_3 = \binom{6}{3}\frac{8^3 10^{-6}}{4^3\cdot 5} = \frac{6\cdot5\cdot4}{3\cdot2}\frac{2^9}{2^6\cdot5}10^{-6} = 2^5 10^{-6} = 3,2 10^{-5} < 5\cdot 10^{-5}$.

Így a keresett közelítő érték $\sqrt{1,08} \approx T_2(0,08) = 1 + 0,04 - \frac{1}{8}0,0064 = 1,0392$.

b) A fentiekből $\sqrt{3} \approx 5/3 \cdot 1,0392 = 5 \cdot 0,3464 = 1,732$, és a hibabecslést tekintve még ez is $(5/3)\cdot 3,2\cdot 10^{-5}$ hibán belül van, tehát kb. 4 tizedesre jó. (A pontosabb érték 1,732051.)

4.) a) Pl. a cos együtthatókra számolva, $\pi a_n = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\, dx$ és innen kétszeri parciális integrálással $\pi a_n = [f(x)\frac{\sin(nx)}{n}]_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi} f'(x)\frac{\sin(nx)}{n}\, dx = 0 - [f'(x)\frac{-\cos nx}{n^2}]_{-\pi}^{\pi} + \int_{-\pi}^{\pi} f''(x)\frac{-\cos nx}{n^2}\, dx = \frac{-1}{n^2}\int_{-\pi}^{\pi} f''(x)\cos n\, dx$. Utóbbi integrál az $f'' \in C(\mathbb{R})$ 2π-periodikus függvény Fourier-együtthatói, és nyilvánvalóan $\left|\int_{-\pi}^{\pi} f''(x)\cos n\, dx\right| \le \int_{-\pi}^{\pi} |f''(x)|\, dx =: K$ konstans, tehát $a_n = O(1/n^2)$.

b.) Az a) szerint — mivel $|\cos x| \le 1$, $|\sin x| \le 1$ — majorizálhatóak a sor tagjai K/n^2 alakú numerikus tagokkal. Mivel a p-harmonikus sor minden $p > 1$-re, így $p = 2$-re is konvergens, a Fourier-sor egy normálisan konvergens sort ad, tehát egyenletesen és abszolút is konveregns lesz.

5.) (Elvi útmutatás.) A keresett S sík normálvektora $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$, aminek a változó $\mathbf{x} := (x, y, z)$ vektorral vett vegyes szorzata éppen annyit kell adjon, mint amennyit P-re kapunk (mert P-ből az $X := (x, y, z)$ pontba elmenve a síkban kell maradjunk, azaz $\mathbf{a}\times\mathbf{b}\perp\overrightarrow{PX}$, azaz az $\mathbf{ab}\overrightarrow{PX}$ vegyes szorzat 0). Ebből tehát az $\begin{bmatrix}(x-1) & (y-2) & (z-3)\\ 3 & -2 & 2\\ 2 & -2 & 3\end{bmatrix}$ mátrix determinánsa =0, és ez adja meg leggyorsabban a sík egyenletét:

$$\left|\begin{bmatrix}-2 & 2\\ -2 & 3\end{bmatrix}\right|(x-1) - \ldots(y-2) + \ldots(z-3) = 0.$$

Az O pont behelyettesítése révén azt olvashatjuk le, hogy mennyi a $\overrightarrow{PO}\mathbf{ab}$ vegyesszorzat, ami éppen az $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$-szorosa a távolságnak, ezért a keresett h távolság $h = \frac{1}{\mathbf{a}\times\mathbf{b}}\overrightarrow{P}\mathbf{ab}$.

6.) Egy ilyen lineáris kombináció az $x, y, z, w \in \mathbb{R}$ együtthatókkal éppen azt jelenti, hogy az x, y, z, w együtthatók a

$$\begin{aligned} 3x \qquad + z + 2w &= 0\\ x \qquad + 2z - w &= 0\\ x - 2y - z + 2w &= 0\\ x + y - 2z + 3w &= 1 \end{aligned}$$

lineáris egyenletrendszert elégítik ki. Az egyenletrendszer bővített mátrixa tehát

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 3 & 0 & 1 & 2 & 0\\ 1 & 0 & 2 & -1 & 0\\ 1 & -2 & -1 & 2 & 0\\ 1 & 1 & -2 & 3 & 1 \end{array}\right].$$

Megengedett ekvivalens átalakításokkal ebből ekvivalensen sorra kapjuk az

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & -1 & 0\\ 3 & 0 & 1 & 2 & 0\\ 1 & -2 & -1 & 2 & 0\\ 1 & 1 & -2 & 3 & 1 \end{array}\right] \Leftrightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & -1 & 0\\ 0 & 0 & -5 & 5 & 0\\ 1 & -2 & -1 & 2 & 0\\ 1 & 1 & -2 & 3 & 1 \end{array}\right] \Leftrightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0\\ 0 & -2 & -3 & 3 & 0\\ 0 & 1 & -4 & 4 & 1 \end{array}\right]$$

majd az

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0\\ 0 & 1 & -4 & 4 & 1\\ 0 & -2 & -3 & 3 & 0 \end{array}\right] \Leftrightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0\\ 0 & 1 & -4 & 4 & 1\\ 0 & 0 & -11 & 11 & 2 \end{array}\right] \Leftrightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right]$$

ekvivalens egyenletrendszer alakokat. Itt az utolsó sor ellentmondó egyenletrendszer, tehát ezek szerint nem lehet kifejezni a $\mathbf{b}$ vektort a mondott módon.