Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem Gépészmérnöki Kar
Energetika és Mechatronika BSc szakok

Matematika A2H — Halasztott vizsga feladatsor — I

Dátum: 2016. augusztus 22. Munkaidő: 90 perc

Hallgató neve: Hallgató Neptun kódja: .

0.) (3 pont: 3 jó válasz 3 pont, 2 jó 1, kevesebb 0 pont) Melyik állítás igaz, melyik nem?

a.) "Ha egy $\sum_k a_k$ sor tetszőleges $s \in \mathbb{R}$ érték esetén átrendezhető s-hez konvergens módon, akkor a végtelen sor abszolút konvergens."

b.) "Ha egy mátrix indefinit, akkor szinguláris is."

c.) "Egy $C^2(\mathbb{R}^n)$ osztályú valós függvény adott pontbeli Hesse-mátrixa mindig ortogonális transzformációval diagonalizálható."

- -

1.) (3 pont) Fogalmazza meg a Cauchy-Hadamard tételt!

2.) (3 pont) Mit jelent az, hogy egy mátrix *szinguláris*? Adjon meg ezzel ekvivalens feltételt determinánssal és sajátértékekkel is!

3.) (5 pont) Mik a V_n Jordan-térfogat alaptulajdonságai? Milyen egyértelműségi tétel érvényes ezekkel az alaptulajdonságokkal?

- -

4.) (4 pont) Konvergens-e a $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2^n(\sqrt{n} - \log^2 n)}{n!(n - \sqrt{n})}$ végtelen sor? Igazolja is állítását!

5.) (5 pont) Az ún. *normális eloszlás* sűrűségfüggvénye $N(x) := \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \displaystyle\int_{-\infty}^{x} e^{-t^2/2} dt.$

a.) Felhasználva, hogy $N(0) = 0,5$, írja fel $N(x)$ Maclaurin-sorát!

b.) Meddig kell elmenni a szummázásban, hogy $N(1)$ értékét legalább 2 tizedesre pontosan megállapítsuk?

6.) (4 pont) Legyenek $p(x) := 1 - 3x^2$, $q(x) := 1 + 2x^3$, $r(x) := 1 - 2x + x^2 + x^3$, $s(x) := 1 + 3x$. Kifeszítik-e ezek a polinomok a legfeljebb harmadfokú polinomok $\mathcal{P}_3$ terét?

7.) (9 pont) Határozza meg az $A = \begin{bmatrix} -2 & 2 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ mátrix sajátértékeit és a sajátértékekhez tartozó sajátvektorait! Írja fel a diagonális alakot, ha A diagonalizálható!

8.) (4 pont) Tekintsük a $\phi(x,y) := e^x \operatorname{ch} y$ függvényt! Határozza meg a függvény összes érintősíkját illetve támaszegyenesét az $(1,0,e)$ ponton keresztül!

9.) (4 pont) A $z = f(x,y)$ függvény a $z^3 - xy + yz + y^3 = 2$ függvényegyenletnek tesz eleget. Számítsa ki a $\nabla f(\mathbf{p})$ gradiens vektort a $\mathbf{p} = (1,1)$ pontban!

10.) (3 pont) Teljes differenciál-e az $(x^2+\cos y)\, dx + (z^2 - x\sin y)\, dy + 2zydz$ differenciál?

11.) (6 pont) A P paralelogrammát az xy síkban az $x = -3$, $x = 0$, $y = x$ és $y = x+1$ egyenesek határolják. Számítsuk ki az $I := \iint_P \frac{(2x-3y)\ \operatorname{ch}(y-x)}{2y-2x-1}\, dxdy$ területi integrált! (Útmutatás: Alkalmazzuk az $u := 2x - 3y$, $v := -x + y$ helyettesítést!)

12.) (7 pont) Egy talpas pohár kelyhe a $z = x^2$ parabola elforgatásával keletkező forgási paraboloid alakját mutatja. A pohárban 4 cm magasságig $\gamma = 1,25$ sűrűségű glicerin, afelett pedig 9 cm magasságig 1 sűrűségű víz van. Milyen magasan található a pohárban lévő folyadékmennyiség súlypontja?

Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem Gépészmérnöki Kar

Energetika és Mechatronika BSc szakok

Matematika A2H – Vizsga feladatok megoldásai – I

0.) (3 pont: 3 jó válasz 3 pont, 2 jó 1, kevesebb 0 pont)

a.) "Ha egy $\sum_k a_k$ sor tetszőleges $s \in \mathbb{R}$ érték esetén átrendezhető s-hez konvergens módon, akkor a végtelen sor abszolút konvergens."

HAMIS. (U.i. ha akár csak *két* különböző értékhez át lehet rendezni a sort, akkor már Riemann tétele értelmében nem lehet abszolút konvergens.)

b.) "Ha egy mátrix indefinit, akkor szinguláris is."

HAMIS. (U.i. indefinit azt jelenti, hogy vannak pozitív és negatív sajátértékei is – de ebből nem következik, hogy a 0 is sajátérték volna, ami pedig a szingularitással ekvivalens.)

c.) "Egy $f \in C^2(\mathbb{R}^n)$ osztályú valós függvény adott pontbeli Hesse-mátrixa mindig ortogonális transzformációval diagonalizálható."

IGAZ. (U.i. C^2 függvények második parciális deriváltjai folytonosak, így Young tétele értelmében a deriválások sorrendjétől függetlenek, azaz a $H = [h_{ij}]_{i,j=1}^n$ Hesse-mátrix elemeire $h_{ij} := \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} = h_{ji}$ minden $i, j = 1, \ldots, n$ indexre. Tehát H szimmetrikus mátrix, és így az előadáson tanult tétel szerint ortogonális transzformációval diagonalizálható is.)

\- -

1.) (3 pont) Fogalmazza meg a Cauchy-Hadamard tételt!

Megoldás: Ha $\exists L := \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$, akkor a $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ hatványsor konvergenciasugara $R = 1/L$ (beleértve, hogy ha $L = 0$ akkor $R = +\infty$, és ha $L = +\infty$, akkor $R = 0$).

2.) (3 pont) Mit jelent az, hogy egy mátrix *szinguláris*? Adjon meg ezzel ekvivalens feltételt determinánssal és sajátértékekkel is!

Megoldás: Az A mátrix akkor szinguláris, ha nincsen inverze: $\nexists A^{-1}$.
Ez ekvivalens azzal, hogy $\det A = 0$, és így azzal is, hogy $\lambda = 0$ A-nak sajátértéke.

3.) (5 pont) Mik a V_n Jordan-térfogat alaptulajdonságai? Milyen egyértelműségi tétel érvényes ezekkel az alaptulajdonságokkal?

0. $V_n(|0,1|^n) = 1$ (normáltság);
1. Ha $A = B + \mathbf{v}$ (vagy, ha $A \equiv B$) akkor $V_n(A) = V_n(B)$ (invariancia);
2. Ha $A \supset B$ akkor $V_n(A) \geq V_n(B)$ (monotonitás); $\Leftrightarrow$ $\forall$ H-ra $V_n(H) \geq 0$ (pozitivitás);
3. Ha A, B Jordan-mérhetőek és $A \cap B = \emptyset$ akkor $V_n(A \cup B) = V_n(A) + V_n(B)$ (additivitás).

Ilyen feltételeket kielégítő halmazfüggvény csak egyetlen egy létezik.

\- -

4.) (4 pont) Konvergens-e a $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2^n(\sqrt{n}-\log^2 n)}{n!(n-\sqrt{n})}$ végtelen sor? Igazolja is állítását!

Megoldás: Igen, konvergens lesz. Első közelítésben azt lehet "levenni" a formuláról, hogy a "lényeges része" olyan $2^n/n!$ (nagyon konvergens), pontosabban olyan $2^n\sqrt{n}/(n\cdot n!)$ (még konvergensebb) tagokból fog állni.

Innen többféleképpen befejezhetjük a megoldást. Dolgozhatunk a határérték-teszttel, mert egyrészt ha $a_n := \frac{2^n(\sqrt{n}-\log^2 n)}{n!(n-\sqrt{n})}$ és $b_n := \frac{2^n\sqrt{n}}{n!n} = \frac{2^n}{n!\sqrt{n}}$, akkor az eredetileg adott $\sum_n a_n$ sorunk ekvikonvergens a $\sum_n b_n$ sorral, mivel $a_n/b_n = \frac{2^n(\sqrt{n}-\log^2 n)}{n!(n-\sqrt{n})} / \frac{2^n}{n!\sqrt{n}} = \frac{(\sqrt{n}-\log^2 n)\cdot\sqrt{n}}{(n-\sqrt{n})} \to 1$, másrészt a $\sum_n b_n$ sor konvergál, mivel pl. a hányadokritérium, vagy a gyökkritérium is azt szolgáltatja, hogy $b_{n+1}/b_n \to 0$ illetve $\sqrt[n]{b_n} \to 0$. Ugyancsak követezik a $\sum_n b_n$ sor konvergenciája abból is, hogy majorálja a $\sum_n 2^n/n! = e^2$ sor.

Lehet igazolni a konvergenciát közvetlenül is, úgy, hogy mindjárt becsléseket (majorizálást) alkalmazunk, pl. használva, hogy ha $n \geq 4$, akkor $n-\sqrt{n} \geq \sqrt{n}$ és így legalábbis $n \geq 4$-re a sorunk a_n tagjait becsülhetjük a $2^n/n!$ tagokkal (amelyek a fentiek szerint konvergens sort alkotnak).

5.) (5 pont) Az ún. *normális eloszlás* sűrűségfüggvénye $N(x) := \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \displaystyle\int_{-\infty}^{x} e^{-t^2/2}dt.$

a.) Felhasználva, hogy $N(0) = 0,5$, írja fel $N(x)$ Maclaurin-sorát!

b.) Meddig kell elmenni a szummázásban, hogy $N(1)$ értékét legalább 2 tizedesre pontosan megállapítsuk?

Megoldás: Az $N(0) = 0,5$ értelmében $N(x) = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \displaystyle\int_{0}^{x} e^{-t^2/2}dt.$

Mivel az exponenciális függvény hatványsora egyenletesen konvergens, a hatványsorba $-t^2/2$-t helyettesítve a sor integrálása elvégezhető tagonként, amiből $N(x) =$

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-t^2/2)^n}{n!}\,dt = \frac{1}{2}+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\int_0^x \frac{(-1)^n t^{2n}}{2^n\ n!}\,dt\right) = \frac{1}{2}+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2^n\ (2n+1)\ n!}.$$

A felírt sor $x = 1$-re gyorsan konvergál, sőt a tagok abszolútértéke csökken és előjele váltakozik, így Leibniz típusú sor lesz. Ezért az N-edik közelítő összeg hibájára (használva $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} < \frac{1}{2}$-et)

$$R_N \leq |a_{N+1}| = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{2^{N+1}\ (2N+3)\ (N+1)!} < \frac{1}{2^{N+2}\ (2N+3)\ (N+1)!}.$$

Ezért ha $\varepsilon = 0,005$ hibán belül akarunk közelíteni, akkor elegendő azt biztosítani, hogy $(2N+3)\ (N+1)!\ 2^{N+2} > 1/\varepsilon = 200$ legyen. Tehát elegendő már az $N = 2$ érték is, u.i. $7\cdot 6\cdot 2^4 = 42\cdot 16 > 400 > 200$.

6.) (4 pont) Legyenek $p(x) := 1-3x^2$, $q(x) := 1+2x^3$, $r(x) := 1-2x+x^2+x^3$, $s(x) := 1+3x$. Kifeszítik-e ezek a polinomok a legfeljebb harmadfokú polinomok $\mathcal{P}_3$ terét?

Megoldás: A teljes $\mathcal{P}_3$ tér 4 dimenziós, egy bázisa az 1 (konstans polinom), x, x^2, x^3 rendszer. Ebben a bázisban felírva az adott polinomok koordinátáit, a $\mathbf{p} = (1,0,-3,0), \mathbf{q} = (1,0,0,2), \mathbf{r} = (1,-2,1,1)$ és $\mathbf{s} = (1,3,0,0)$ együttható-vektorok adódnak. A $\{p,q,r,s\}$ rendszer pontosan akkor lehet generátorrendszer, ha az oszloptér 4 dimenziós, tehát ha a mátrixuk teljes rangú, nem-szinguláris, azaz ha a vektorokból képzett determináns nem nulla. A kérdés tehát az, hogy $\begin{vmatrix}\mathbf{p} & \mathbf{q} & \mathbf{r} & \mathbf{s}\end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 3 \\ -3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0$ teljesül-e?

A kinullázást az $S_3 + 3S_1$ sorművelettel kezdve ebből ekvivalensen

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 3 & 4 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -2 & 3 \\ 3 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} \overset{O_1 - 2O_2}{=} \begin{vmatrix} 4 & -2 & 3 \\ -5 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (-1) \cdot \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ -5 & 3 \end{vmatrix} = -27 \neq 0.$$

Tehát a megadott polinomok generátorrendszert (és így bázist) alkotnak $\mathcal{P}_3$-ban.

7.) (9 pont) Határozza meg az $A = \begin{bmatrix} -2 & 2 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ mátrix sajátértékeit és a sajátértékekhez tartozó sajátvektorait! Írja fel a diagonális alakot, ha A diagonalizálható!

<u>Megoldás:</u> Az A mátrix karakterisztikus polinomja $p_A(\lambda) = |\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda + 2 & -2 & 2 & -2 \\ 0 & \lambda & 2 & -2 \\ 0 & 2 & \lambda & -2 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda - 2 \end{vmatrix}$.

Ezt előbb az első oszlop, majd az utolsó sor szerint kifejtve $p_A(\lambda) = (\lambda - 2)(\lambda + 2) \begin{vmatrix} \lambda & 2 \\ 2 & \lambda \end{vmatrix} = (\lambda - 2)^2(\lambda + 2)^2$ és így megkapjuk a karakterisztikus egyenletet, valamint a $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$ és $\lambda_3 = \lambda_4 = -2$ sajátértékeket.

A 2 sajátértékhez tartozó sajátvektorokat az $(A - 2I)\mathbf{x} = 0$ homogén lineáris egyenletrendszerből kapjuk, amelynek együttható mátrixa $\begin{bmatrix} -4 & 2 & -2 & 2 \\ 0 & -2 & -2 & 2 \\ 0 & -2 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. Ebből Gauss-Jordan elimináció után $\begin{bmatrix} -4 & 2 & -2 & 2 \\ 0 & -2 & -2 & 2 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} -4 & 0 & -4 & 4 \\ 0 & -2 & -2 & 2 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$ redukált lépcsős forma adódik, így a sajátvektorok $t \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ alakúak. Hasonlóan, a -2 sajátértékhez tartozó sajátvektorok az $(A + 2I)\mathbf{y} = 0$ homogén lineáris egyenletrendszerből számolhatóak. Ennek együtthatómátrixa $\begin{bmatrix} 0 & 2 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & -2 & 2 \\ 0 & -2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$, amiből a Gauss-Jordan eliminációt az $S_2 - S_1$ és $S_3 + S_1$ sorműveletekkel kezdve és a redukált lépcsős alakig folytatva $\begin{bmatrix} 0 & 2 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \Leftrightarrow$

$\begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ jön ki. Innen leolvasva tehát y_1 tetszőleges, $y_2 = y_3$ és $y_4 = 0$ adódik. A sajátvektorok ennek megfelelően $r \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + q \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ alakúak.

Az A mátrixnak van 4 lineárisan független sajátvektora, így diagonalizálható. A talált sajátvektorokat egymás mellé írva – és ügyesen választva a sorrendet – a $B := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ bázis áttérési mátrix adódik. Ennek B^{-1} inverzét is Gauss-Jordan eliminációval számítjuk ki:

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \overset{S_3 - S_2}{\Leftrightarrow} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \underset{S_1 - S_4, S_2 - S_4}{\overset{S_3 + S_4}{\Leftrightarrow}}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \underset{\substack{S_1 - S_3 \\ S_2 - S_3}}{\overset{(-1/2)S_3}{\Leftrightarrow}} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1/2 & 1/2 & -1/2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1/2 & -1/2 & -1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

ahonnan $B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1/2 & 1/2 & -1/2 \\ 0 & 1/2 & 1/2 & -1/2 \\ 0 & 1/2 & -1/2 & -1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. Tehát A diagonalizáltja:

$$A = BDB^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1/2 & 1/2 & -1/2 \\ 0 & 1/2 & 1/2 & -1/2 \\ 0 & 1/2 & -1/2 & -1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

8.) (4 pont) Tekintsük a $\phi(x, y) := e^x \mathrm{ch}\, y$ függvényt! Határozza meg a függvény összes érintősíkját illetve támaszegyenesét az $(1, 0, e)$ ponton keresztül!

Megoldás: Mivel ϕ parciális deriváltjai folytonosak, a függvény differenciálható, így van egy egyértelmű érintősíkja, amelynek egyenlete $z - e = \frac{\partial \phi}{\partial x}|_{(1,0)}(x-1) + \frac{\partial \phi}{\partial y}|_{(1,0)} y = e(x-1) + 0y = ex - e$, azaz $z = ex$.

Differenciálható függvényre az érintősík vagy támaszsík is, és akkor ez az egyetlen támaszsík, vagy egyáltalán nem is létezik támaszsík.

Annak eldöntéséhez, hogy esetünkben az érintősík támaszsík-e, elegendő a sík $(1, 0, e)$ ponton áthaladó egyeneseit megvizsgálni. Legyen $\ell(t) := (1 + at, bt)$, ekkor a kérdés az, hogy $\phi|_\ell \leq, \geq L(t)$, ahol $L(t) = e(1 + at)$ a $z(x, y)$ érintősík megszorítása ℓ-re. Most $\phi(1 + at, bt) = e^{1+at}\mathrm{ch}\,(bt)$ két pozitív és konvex függvény szorzata, így maga is pozitív és konvex, tehát $L(t) \leq \phi(t)$. Mivel ez minden (a, b) irányban így van, az egész érintősík alatta halad a fügvénynek, tehát alsó támaszsík lesz.

Eldönthető a támaszsík kérdése a második derivált kiszámításán keresztül is. A Hesse-mátrix

$$D^{(2)}(\phi)|_{(1,0)} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}|_{(1,0)} & \frac{\partial^2\phi}{\partial x\partial y}|_{(1,0)} \\ \frac{\partial^2\phi}{\partial x\partial y}|_{(1,0)} & \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}|_{(1,0)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^x \operatorname{ch} y|_{(1,0)} & e^x \operatorname{sh} y|_{(1,0)} \\ e^x \operatorname{sh} y|_{(1,0)} & e^x \operatorname{ch} y|_{(1,0)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e & 0 \\ 0 & e \end{bmatrix} = eI_2,$$

ami nyilvánvalóan pozitív definit és ezért az érintősík a függvény alatt helyezkedik el, azaz alsó támaszsík lesz.

9.) (4 pont) A $z = f(x, y)$ függvény a $z^3 - xy + yz + y^3 = 2$ függvényegyenletnek tesz eleget. Számítsa ki a $\nabla f(\mathbf{p})$ gradiens vektort a $\mathbf{p} = (1, 1)$ pontban!

Megoldás: Először is meghatározzuk, mi a $z_0 = f(\mathbf{p}) = f(1, 1)$ érték. Ez a behelyettesítés szerint a $z^3 + z = 2$, $z^3 + z - 2 = 0$ harmadfokú egyenletnek tesz eleget. Ránézésre is látszik, hogy $z_0 = 1$ ennek gyöke, így a $z - z_0 = z - 1$ faktorral elosztjuk a harmadfokú polinomot és kapjuk, hogy $z^3 + z - 2 = (z - 1)(z^2 + z + 2)$. Az utóbbi másodfokú faktornak nincsen valós gyöke, így az egyenletnek egyetlen valós megoldása van, a $z = z_0 = 1$. Tehát $f(\mathbf{p}) = 1$, és a $\mathbf{q} := (1, 1, f(\mathbf{p})) = (1, 1, 1)$ ponton halad át az implicit módon megadott $z = f(x, y)$ függvény.

Az implicit egyenlet azt jelenti, hogy az $F(x, y, z) := z^3 - xy + yz + y^3 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ függvénybe behelyettesítve a $z = f(x, y)$ függvényt, azonosan konstans függvényt kapunk. (Pontosabban: ha $G(x, y) := (x, y, f(x, y))$, akkor a $H := F \circ G : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ kompozíciófüggvény azonosan konstans 2.) Így az *implicit alakban megadott függvények deriválásáról szóló tétel értelmében* $\frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}}$ és $\frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}}$, tehát ki kell számoljuk F parciális deriváltjait mindegyik változója szerint. Ezt elvégezve, $\nabla F = \left(-y, -x + z + 3y^2, 3z^2 + y\right)$, tehát $\nabla f = \left(\frac{y}{3z^2 + y}, \frac{x - z - 3y^2}{3z^2 + y}\right)$, úgyhogy a $\mathbf{p} = (1, 1)$, $z_0 = 1$ értékeket beírva $\nabla f(\mathbf{p}) = (1/4, -3/4)$.

10.) (3 pont) Teljes differenciál-e az $(x^2 + \cos y)\, dx + (z^2 - x \sin y)\, dy + 2zydz$ differenciál?

Megoldás: Ehhez azt kell ellenőrizni, hogy a feltételezett potenciálfüggvényre ("primitív függvényre", aminek az adott kifejezés a differenciálja lehetne) teljesülnek-e a Young-tétel feltételei, azaz a keresztbe vett parciális deriváltakra azonosságot tapasztalunk-e?

Tehát legyen $U(x, y, z) := x^2 + \cos y, V(x, y, z) := z^2 - x \sin y, W(x, y, z) := 2zy$ – ekkor az a kérdés, hogy az $U'_y = V'_x$, $U'_z = W'_x$, $V'_y = W'_z$ azonosságok teljesülnek-e?

Ezeket kiszámolva: $U'_y = -\sin y$, $V'_x = -\sin y$, $U'_z = 0$, $W'_x = 0$, és $V'_z = 2z$, $W'_y = 2z$, tehát a Young-tételnek megfelelő azonosságok teljesülnek, és így az $Udx + Vdy + Wdz$ kifejezés teljes differenciál.

Egyébként a potenciálfüggvényt is meg lehet határozni a feltételezett $F'_x = U, F'_y = V, F'_z = W$ formulákból: $F = \frac{1}{3}x^3 + x \cos y + A(y, z) = z^2y + x \cos y + B(x, z) = z^2y + C(x, y)$, így pl. az első kettőből $\frac{1}{3}x^3 + A(y, z) - z^2y = B(x, z)$, ami tehát nem függhet y-tól, ezért $A(y, z) - z^2y$ sem függhet y-tól, azaz akkor csak z-től függhet, és $a(z) = A(y, z) - z^2y$, $A(y, z) = z^2y + a(z)$; a második és a harmadik egyenletből pedig hasonlóan $x \cos y + B(x, z) = C(x, y)$ nem függ z-től, ezért $B(x, z) = b(x)$; és ezekből $F(x, y, z) = \frac{1}{3}x^3 + x \cos y + z^2y + a(z) = z^2y + x \cos y + b(x)$, így $b(x) = \frac{1}{3}x^3 + a(z)$, tehát $a(z) = c$ konstans és $b(x) = \frac{1}{3}x^3 + c$: végül tehát $F(x, y, z) = \frac{1}{3}x^3 + x \cos y + z^2y + c$ (amit parciálisan deriválva vissza is kapjuk az előírt $\nabla F = (U, V, W)$ gradiens vektort). A potenciálfüggvény megkeresése azonban nem része a feladat kitűzésének.

11.) (6 pont) A P paralelogrammát az xy síkban az $x=-3$, $x=0$, $y=x$ és $y=x+1$ egyenesek határolják. Számítsuk ki az $I := \iint_P \frac{(2x-3y)\,\mathrm{ch}\,(y-x)}{2y-2x-1}\,dxdy$ területi integrált! (Útmutatás: Alkalmazzuk az $u := 2x-3y$, $v := -x+y$ helyettesítést!)

Megoldás: A helyettesítési transzformáció egyelőre csak a $W(x,y) = (u(x,y), v(x,y)) = (2x-3y, -x+y)$ alakban van meg. Ezért először is kiszámítjuk a $T(u,v) = (x,y)$ fordított irányú transzformációt. Lineáris transzformációkról van szó, azaz a W transzformáció 2×2-es mátrixának az inverzét keressük. Ez mátrix invertálási feladatot jelent, aminek a megoldása Gauss eliminációval:

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 2 & -3 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right] \Leftrightarrow \left[\begin{array}{cc|cc} 0 & -1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right] \Leftrightarrow \left[\begin{array}{cc|cc} 0 & -1 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right] \Leftrightarrow \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \end{array}\right],$$

azaz $x = -u-3v$, $y = -u-2v$, tehát $T(u,v) = (-u-3v, -u-2v)$.

A javasolt helyettesítéssel $f(x,y) = \frac{(2x-3y)\,\mathrm{ch}\,(y-x)}{2y-2x-1} = \frac{u\,\mathrm{ch}\,v}{2(-u-2v)-2(-u-3v)-1} = \frac{u\,\mathrm{ch}\,v}{2v-1} =: \phi(u,v)$ alakba kerül, ami már kicsit kedvezőbb kinézetű. Az áttérés derivált-mátrixa $DT(u,v) = \begin{bmatrix} \partial x/\partial u & \partial x/\partial v \\ \partial y/\partial u & \partial y/\partial v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -3 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$ (konstans, mivel lineáris volt a T transzformáció). Ezért a Jacobi-determináns $J_T(u,v) = |\det DT(u,v)| = |-1| = 1$. (Egyébként a determinánsok szorzástétele miatt a T inverz lineáris leképezés mátrixának a determinánsa a W lineáris leképezés mátrixának a determinánsából reciprok képzéssel is adódik.)

Meg kell határozzuk azt az E tartományt is az uv síkon, amelyre $T(E) = P$. Tekintve, hogy lineáris transzformációról van szó, egyenesek egyenesekbe mennek át, így elég a határegyenesek megfelelőit megkeresni. $x=-3 \Leftrightarrow -u-3v=-3$, azaz $v = 1-u/3$ vagy $u = 3-3v$; $x=0 \Leftrightarrow -u-3v=0$, azaz $v=-u/3$ vagy $u=-3v$; $y=x \Leftrightarrow v=0$ $y=x+1 \Leftrightarrow v=1$. Természetesen az ezekkel határolt E tartomány szintén egy paralelogramma lesz, amelynek a csúcsai egyébként az $O=(0,0)$, a $Q=(3,0)$, az $R=(0,1)$ és az $S=(-3,1)$ pontok lesznek. Ezzel a tartománnyal tehát

$$I := \iint_P \frac{(2x-3y)\,\mathrm{ch}\,(y-x)}{2y-2x-1}\,dxdy = \iint_E \phi(u,v) J_T(u,v)\,dudv = \iint_E \frac{u\,\mathrm{ch}\,v}{2v-1}\,1\,dudv.$$

Innen Fubini tételét alkalmazva egyszeres integrálásokkal próbáljuk kiszámnítani I értékét. Mivel az integrandus $\frac{u\,\mathrm{ch}\,v}{2v-1}$, először v szerint integrálva nehézségeink lennének, így a szerencsés választás az, ha belül először u szerint (azaz az uv síkon először a vízszintes egyenesek mentén) integrálunk. Az E tartomány határegyeneseinek megfelelő alakját tekintve tehát az integrálási határok a $[-3v, 3-3v]$ szakasznak felelnek meg minden egyes rögzített $v \in [0,1]$ szóba jövő értékre. Az integrált ennek megfelelően átalakítva adódik

$$I = \int_0^1 \left(\frac{\mathrm{ch}\,v}{2v-1} \int_{-3v}^{3-3v} u\,du \right) dv = \int_0^1 \frac{\mathrm{ch}\,v}{2v-1} \left[\frac{u^2}{2}\right]_{-3v}^{3-3v} dv = \int_0^1 \frac{\mathrm{ch}\,v}{2v-1} \cdot \frac{(3-3v)^2-(3v)^2}{2}\,dv$$
$$= \int_0^1 \frac{\mathrm{ch}\,v}{2v-1} \cdot \frac{1}{2}(-18v+9)\,dv = -\frac{9}{2}\int_0^1 \mathrm{ch}\,v\,dv = -\frac{9}{2}[\mathrm{sh}\,v]_0^1 == -\frac{9}{2}\,\mathrm{sh}\,1 = -\frac{9(e-1/e)}{4}.$$

12.) (7 pont) Egy talpas pohár kelyhe a $z = x^2$ parabola elforgatásával keletkező forgási paraboloid alakját mutatja. A pohárban 4 cm magasságig $\gamma = 1,25$ sűrűségű glicerin, afelett pedig 9 cm magasságig 1 sűrűségű víz van. Milyen magasan található a pohárban lévő folyadékmennyiség súlypontja?

Megoldás: Jelölje a pohár folyadékkal töltött belsejét P! Ekkor a pohár fala a $z = x^2 + y^2$, $(0 \leq z \leq 9 \Leftrightarrow |(x,y)| \leq 3)$ egyenletekkel írható le, így könnyen látható, hogy $P = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ (0 \leq)|(x,y)| = \sqrt{x^2+y^2} \leq 3,\ x^2+y^2 \leq z \leq 9\}$.

A forgásszimmetria miatt a súlypont (tömegközéppont) a z tengelyen helyezkedik el, mégpedig a $\overline{z} = \frac{M_{xy}}{M}$ magasságban, ahol M a teljes P-ben elhelyezkedő folyadékmennyiség tömege, M_{xy} pedig az xy síkra gyakorolt statikai nyomatéka. Tehát $\overline{z}$ meghatározásához ki kell számítsuk az M össztömeget és az M_{xy} statikai nyomatékot.

Vegyük észre, hogy, bár nehezíti a dolgunkat, hogy változó sűrűségű anyaggal van dolgunk, azért a sűrűségfüggvény igen egyszerű alakú, hiszen csak a magasságtól függ, és konkrétan így írható fel: $\rho(x,y,z) = \rho_0(z) = \begin{cases} 1,25 & \text{ha } 0 \leq z \leq 4 \\ 1 & \text{ha } 4 \leq z \leq 9 \end{cases}$.

A feladatot direkt integrálással is meg lehet oldani, de talán elegánsabb és így könnyebb az (r,φ,h) hengerkoordinátákra áttérve dolgozni. Valóban, ha $H(r,\varphi,h) = (x,y,z) = (r\cos\varphi, r\sin\varphi, h)$ az áttérési transzformáció, akkor $Q := H^{-1}(P) = \{(r,\varphi,h) \ : \ 0 \leq r \leq 3, 0 \leq \varphi \leq 2\pi, r^2 \leq h \leq 9\} = \{(r,\varphi,h) \ : \ 0 \leq h \leq 9, 0 \leq \varphi \leq 2\pi, 0 \leq r \leq \sqrt{h}\}$ egyszerű alakú, ráadásul a sűrűségfüggvény is ugyanolyan egyszerű marad, hiszen $\rho(H(r,\varphi,h)) = \rho_0(h)$.

A kiszámítandó mennyiségek tehát hengerkoordinátákra áttérve (és eközben felhasználva, hogy az áttérés Jacobi-determinánsa a jól ismert $J_H(r,\varphi,h) = r$ érték), majd Fubini tételének alkalmazásával szukcesszív integrálásra átalakítva:

$$M = \iiint_P \rho(x,y,z)\ dxdydz = \iiint_Q \rho_0(h) r\ drd\varphi dh = \int_0^9 \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{h}} \rho_0(h) r\ dr\ d\varphi\ dh$$

és

$$M_{xy} = \iiint_P z\rho(x,y,z) dxdydz = \iiint_Q h\rho_0(h) r\ drd\varphi dh = \int_0^9 \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{h}} h\rho_0(h) r\ dr\ d\varphi\ dh.$$

A belső dr és $d\varphi$ szerinti integrálok könnyen kiszámíthatóak, mert sem h, sem $\rho_0(h)$ nem függenek ezektől a változóktól (csak az r Jacobi-determináns értékét kell integrálni, ami φ-ben szintén konstans, de r-ben is igen egyszerű), így tehát

$$M = 2\pi \int_0^9 \rho_0(h)[r^2/2]_0^{\sqrt{h}}\ dh = \pi \int_0^9 \rho_0(h) h dh = \pi \left(\int_0^4 \frac{5}{4} h dh + \int_4^9 h dh \right) = \frac{85}{2}\pi$$

és hasonlóan számolva

$$M_{xy} = 2\pi \int_0^9 h\rho_0(h)[r^2/2]_0^{\sqrt{h}}\ dh = \pi \left(\int_0^4 \frac{5}{4} h^2 dh + \int_4^9 h^2 dh \right) = \pi \left(\frac{80}{3} + \frac{665}{3} \right) = \frac{745}{3}\pi,$$

amiből

$$\overline{z} = \frac{M_{xy}}{M} = \frac{745/3\ \pi}{85/2\ \pi} = \frac{1490}{85 \cdot 3} = \frac{298}{51} (\approx 5.843).$$