Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem Gépészmérnöki Kar

Energetika és Mechatronika BSc szakok

Matematika A2H - Egy, a konzultáción kitűzött feladat

Dátum: 2016. március 18.

Feladat a) Tekintsük a $g(x) := \dfrac{1}{2-\cos x}$ függvényt! Mutassuk meg, hogy a függvény analitikus a 0 körül, és határozzuk meg Maclaurin sorának konvergencia-sugarát!

b) Milyen $q > 0$ paraméter választása esetén lesz az $f(x) := \dfrac{1}{q-\cos x}$ függvény Maclaurin sora egyenletesen konvergens az egész $[-\pi, \pi]$ periódus-intervallumon?

Megoldás. a) Azt nem olyan nehéz bebizonyítani, hogy egy a pontban analítikus Φ függvény *reciproka is analítikus* az a pont kellően kis környezetében, ha $\Phi(a) \neq 0$. Erre nem lesz szükségünk, nekünk a konkrét függvény esetében ki fog jönni, hogy van a 0 körül egy konvergens Maclaurin-sor elállítás: de ha valakit érdekel, alább adunk egy bizonyítást erre is.

* * * * *

Egyszerűség kedvéért tekintsük azt az esetet, amikor $a = 0$, $F(a) = 1$, és F hatványsorának konvergencia-sugara $R > 1$ – ebből az általános eset is következik. (Valóban, ha $1/F(z)$ mindig analítikus a 0 körül, akkor $\Phi(a)/\Phi(z-a)$ is analítikus a 0 körül, tehát $\Phi(z)$ reciproka is analítikus a körül: és F helyett $F(qz)$-t tekintve az is feltehető, hogy a konvergenciasugár tetszőlegesen nagy, pl. $R > 1$.)

Írjuk F hatványsorát abba az alakba, hogy $F(z) = 1 - S(z)$, ahol $S(z) := \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$: ekkor $F(1)$ kovergenciája miatt $a_n \to 0$, tehát egyúttal a_n korlátos is, és így az $|z| \leq r$ körben $|a_n z^n| < Kr^n$ $(n \geq 1)$.

Írjuk be a reciprokba a geometriai sort, majd a k-adik hatványozást az $S(z)$ során Cauchy-szorzásokkal végezzük el, végül a keletkező kettős indexezésű sort rendezzük át úgy, hogy tagonként összegyűjtjük az egy-egy fix z^m hatványhoz tartozó tagjait. Ilymódon felírhatjuk a keletkező hatványsort:

$$\frac{1}{F(z)} = \frac{1}{1-S(z)} = \sum_{k=0}^{\infty} S^k(z) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty}\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n\right)^k = 1 + \sum_{k=1}^{\infty}\left(\sum_{m=1}^{\infty} b_m^{(k)} z^m\right)$$
$$= 1 + \sum_{m=1}^{\infty}\left(\sum_{k=1}^{\infty} b_m^{(k)}\right) z^m = \sum_{m=0}^{\infty} c_m z^m \qquad \left(c_0 := 1,\quad c_m := \sum_{k=1}^{\infty} b_m^{(k)} \quad (m \geq 1)\right).$$

Persze ehhez a nagy átrendezéshez – tag összegyűjtéshez kell az abszolút konvergencia, de ez fennáll:

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left(\sum_{n=1}^{\infty}|a_n z^n|\right)^k \leq \sum_{k=0}^{\infty}\left(\sum_{n=1}^{\infty} Kr^n\right)^k = \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{Kr}{1-r}\right)^k < \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^k = 2,$$

ha r-et olyan kicsinek választjuk, hogy teljesüljön $(2K+1)r < 1$.

Ezt persze a komplex függvénytanban nem így, hanem sokkal elegánsabban csinálják - de ugye mi nem tanulunk komplex függvénytant...

* * * * *

Ezután a "kitérő" után akkor nézzük tehát a feladat megoldását! Az analítikusság fenti bizonyításával két nehézségünk van: nem látszik belőle sem a konvergencia-sugár (amit a feladat kérdezett), sem az együtthatókra valami jól kezelhető formula (amből mondjuk gyökkritériummal ki tudnánk számolni a konvergencia-sugarat).

Fogjunk neki kicsit másképp akkor! A függvény (a valós egyenesen értelmezve) differenciálható függvények hányadosa, és akárhányszor deriválható, mert a nevező sohasem lesz 0. (Minden deriválásnál a nevezőben csak az eredeti nevező, tehát $2 - \cos x$ egyre nagyobb hatványai lépnek fel, de mivel $|\cos x| \leq 1$, a nevező megmarad 1 és 3 között, így ennek hatványai sem fognak nullává válni.) Így formálisan persze felírható a Taylor furmulákkal a Maclaurin-sor: az együtthatók $a_n := g^{(n)}(0)/n!$. Mivel azt már tudjuk (legalábbis, ha a fenti bizonyítást tekintetbe vesszük), hogy ez a függvény analítikus, a Maclaurin sor konvergens is valamilyen körben: de ugye pont ezt a sugarat kéne kiszámoljuk. Megint oda jutunk, hogy a Taylor-féle együttható-formulákat ugyan beírhatjuk, de nincsen rá jól kezelhető, zárt alak, így nem tudjuk elvégezni a konvergenciasugár (Cauchy-Hadamard formula szerinti) kiszámolását sem.

Próbálkozzunk akkor kicsit másképpen, úgy, mint fentebb, a reciprok függvény analítikus voltának igazolásakor: próbáljuk konkrétan, ismert hatványsorok alkalmazásával, felírni a keresett Maclaurin-sort. A változót x helyett akár z-vel jelölve (tehát, ha kell, akár komplex változókat is megengedve), azt írhatjuk fel, hogy

$$g(z) = \frac{1}{2-\cos z} = \frac{1}{2}\frac{1}{1-\frac{1}{2}\cos z} = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{\cos z}{2}\right)^n = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k)!}z^{2k}\right)^n = \sum_{m=0}^{\infty} c_m z^m,$$

ahol az utolsó lépésben c_m-et úgy kapjuk, hogy előbb elvégezzük a sorok n-edik hatványra emelését – Cauchy-.szorzásokkal azok is hatványsorok lesznek – és aztán összevonjuk, összeadjuk mindazon tagokat a többszörös sorokból, amelyek a z^m együtthatói.

Mindez a nagy átrendezés, a tagok összegyűjtése, persze csak akkor megengedett, ha a sor abszolút konvergens: tehát ha a legbelső helyre, az egyedi tagokhoz abszolút értéket írhatunk. Az abszolút konvergenciához az kell tehát, hogy

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\left|\frac{(-1)^k}{(2k)!}z^{2k}\right|\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k)!}|z|^{2k}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n}(\mathrm{ch}\,|z|)^n < \infty, \qquad (1)$$

azaz $\mathrm{ch}\,|z| < 2$ teljesüljön. Ez egyenletesen teljesül minden olyan $|z| \leq r$ körben, amelyre $\mathrm{ch}\, r < 2$ (és itt akkor normális konvergencia is van persze).

Oldjuk meg tehát a $\mathrm{ch}\, r < 2$ egyenletet – illetve, ami ezzel ekvivalens, a $\mathrm{ch}\, r = 2$ egyenletet! Itt $0 \leq r$, és az $x := e^r$ helyetesítéssel $2 = \mathrm{ch}\, r = \frac{1}{2}(e^r + e^{-r}) = \frac{1}{2}(x + \frac{1}{x})$ azaz $x^2 - 4x + 1 = 0$. Ennek megoldásai $x_{1,2} = 2 \pm \sqrt{3}$, melyek közül persze csak az egyik lesz ≥ 1, azaz e^r alakú $r \geq 0$ mellett (és a másik megoldás ennek a párja: persze a $\mathrm{ch}\, r = \mathrm{ch}\,(-r)$ miatti negatív valós r megoldás tükröződik abban, hogy van egy $x \geq 1$ és ennek reciproka, egy $x \leq 1$ megoldás is). Tehát normális, így abszolút és egyenletes konvergencia van, ha $|z| \leq r$, ahol $r < r_0 := \log(2 + \sqrt{3})$.

Azt találtuk, hogy *a keresett R konvergenciasugár legalább r_0*, mert ezen a körön belül szépen konvergál a hatványsorfejtés (még ha az együtthatókat, tagokat továbbra sem tudjuk valami szép, zárt alakban előállítani!). Ezt végül is csupán valós értékekről beszélve is láthatjuk—ehhez a részhez nem kell kimenjünk a komplex változókra.

* * * * *

A továbbiakban tehát azt kellene vizsgáljuk, hogy a R konvergenciasugár *legfeljebb* mekkora lehet: természetes módon azt sejtjük, hogy $R = r_0$, amihez az hiányzik, hogy $R \le r_0$.

Először most elmondom, hogyan lehet "végigerőltetni", pusztán valósban maradva is, ennek a kiszámolását. A gyengébb idegzetűek ugorjanak a következő szakaszra!

Az mindenesetre bekövetkezik, hogy ha $|z| = r_0$-t írunk az abszolút konvergencia (1) alatti becslésébe — tehát pl. az $x = r_0$ valós pontban, és hasonlóan az $x = -r_0$ valós pontban is — akkor az abszolút konvergencia ebben a felírásban már nem áll fenn, mert az utolsó szummában $\sum_n 1 = \infty$ adódik. De ez a "trükkös" hatványsoros számolás *nem a g-hez talált Maclaurin-sorból indult ki*, hanem egy másféle felírásból (amiből abszolút konveregncia esetén komplikált átrendezésekkel nyertük aztán a Maclaurin-sort), így az, hogy ez a felírás már nem lesz abszolút konvergens, még nem jelenti azt, hogy $g(x)$ Maclaurin-sora ne lehetne abszolút konvergens.

Pórbáljuk meg a g hatványsorának felírásából a konkrét együttható-értékeket (a c_m értékeit) kiszámítani! Az utolsó alakból következetesen végignézve, mi fog bekerülni c_m-be, az adódik, hogy

$$c_0 = 1, \qquad c_m = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n+1}} \sum_{\substack{0 \le k_1, \dots, k_n \\ 2k_1 + \cdots + 2k_n = m}} \frac{(-1)^{k_1 + \cdots + k_n}}{(2k_1)! \cdot \cdots \cdot (2k_n)!} \qquad (m \ge 1).$$

Hát annyi azért látszik, hogy $c_m = 0$ páratlan m-ekre (mert sehogysem lehet $2k_1 + \cdots + 2k_n = m$, ha m páratlan). Továbbá, ha azt tudjuk, hogy $2k_1 + \cdots + 2k_n = m$, akkor ezt az összeszorzott előjelekbe beírhatjuk: $c_0 = 1$, $c_{2m-1} = 1$, $(m \ge 1)$, és, $m = 2\ell$ téve páros indexekre:

$$c_{2\ell} = (-1)^{\ell} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n+1}} \sum_{\substack{0 \le k_1, \dots, k_n \\ k_1 + \cdots + k_n = \ell}} \frac{1}{(2k_1)! \cdot \cdots \cdot (2k_n)!} \qquad (\ell \ge 1).$$

Alulról kéne megbecsüljük a c_m-eket, hogy lássuk, milyen határig lesz még konvergens g Maclaurin sora – de ezt a váltakozó előjelű sort igen nehéz konkrétan akár kiszámolni, akár megbecsülni is.

Újfent másként próbálkozva, írjuk be a konkrét $x := \pm r_0$ értékeket a g-re számolt sorfejtésbe! Ha pl. ez divergálna (vagy az látszana, hogy valamilyen $r' > r_0$ értéket téve divergálna), akkor máris kapnánk egy felső korlátot a konvergencia-sugárra. Egyszerűség kedvéért $\rho := -(r_0)^2$ jelölést alkalmazva, azt találjuk, hogy a Maclaurin-sor felírása ezen a helyen

$$g(\pm r_0) = 1 + \sum_{\ell=1}^{\infty} c_{2\ell} r_0^{2\ell} = 1 + \sum_{\ell=1}^{\infty} |c_{2\ell}| \rho^{\ell}.$$

alakot ölt. Ez egy váltakozó előjelű sor, de nem látszik (hacsak el nem tudjuk dönteni, hogy pl. $|c_{2\ell}| \searrow 0$, amikor Leibniz típusú sorokra hivatkozhatunk) a konvergencia kérdését.

Azt viszont vizsgálhatjuk, hogy ez a Maclaurin-sor *abszolút konvergens lesz-e*? Beírva a tagokhoz az abszolút értékeket, majd felhasználva, hogy az $r_0^{2\ell}$ hatványok épp a tekintetbe vett $k_1 + \cdots + k_n = \ell$ miatt $r_0^{2k_1 + \cdots + 2k_n}$ hatványok formájában írhatóak fel, a következő kifejezést kapjuk:

$$1+\sum_{\ell=1}^{\infty}\left|c_{2\ell}r_0^{2\ell}\right| = 1+\sum_{\ell=1}^{\infty}|c_{2\ell}|r_0^{2\ell} = 1+\sum_{\ell=1}^{\infty}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^{n+1}}\sum_{\substack{0\le k_1,\dots,k_n\\ k_1+\dots+k_n=\ell}}\frac{1}{(2k_1)!\cdot\dots\cdot(2k_n)!}\right)r_0^{2\ell}$$

$$= 1+\sum_{\ell=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^{n+1}}\left(\sum_{\substack{0\le k_1,\dots,k_n\\ k_1+\dots+k_n=\ell}}\frac{r_0^{2k_1+\dots+2k_n}}{(2k_1)!\cdot\dots\cdot(2k_n)!}\right)$$

$$= 1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^{n+1}}\sum_{\ell=1}^{\infty}\left(\sum_{\substack{0\le k_1,\dots,k_n\\ k_1+\dots+k_n=\ell}}\frac{r_0^{2k_1+\dots+2k_n}}{(2k_1)!\cdot\dots\cdot(2k_n)!}\right)$$

$$= 1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^{n+1}}\sum_{\ell=1}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k)!}r_0^{2k}\right)^n = 1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^{n+1}}\mathrm{ch}^n r_0 = \sum_{\ell=0}^{\infty}\frac{1}{2} = \infty,$$

mert $\mathrm{ch}\, r_0 = 2$. Gondoljuk meg, hogy ebben a számolásban mindvégig pontos egyenlőségeket alkalmaztunk: persze nemnegatív tagú soroknál vagy abszolút konvegencia van, és akkor minden sorrendben ugyanoda konvergálnak, vagy ha valamilyen sorrendben végtelen (nem korlátos) az összeg, akkor az összes sorrrendben az (mert más sorrendben véges összeget kapván persze abszolút konvergencia kellene legyen), tehát nem hibázhattunk azzal sem, hogy a végtelen összegek tagjainak sorrendjét itt is alaposan átrendezgettük.

Tehát akkor az adódik, hogy, bár $g(\pm r_0)$ Maclaurin-sora lehet konvergens, de már nem lesz abszolút konvergens: így a konvergencia-sugár ennél nagyobb már nem lehet, $R \le r_0$.

* * * * *

Végső soron tehát fentebb tisztán valós módszereinkkel is meg tudtuk határozni a konvergenciasugarat, de azért ez nem volt egyszerű menet, és az is kiviláglik, hogy igencsak "szerencsénk volt" egy csomó formulával, amelyekben pont úgy alakultak az előjelek, ahogyan nekünk épp kezelhető volt még. Általában erre nem számíthatunk, és érdemes megnézni, hogy a komplex változókra kimenvén, milyen természetes, szinte mechanikus úton érhetünk el ugyanahhoz az eredményhez.

Most tehát komplex függvényként fogjuk tekinteni a g függvényt és komplex módszerekkel fogjuk kiszámolni a konvergencia-sugarát. Persze az alsó becslés már megvan, az nem tér el a megoldás elejétől: tudjuk, hogy ha $|z| \le r < r_0$, akkor normális, így abszolút és egyenletes konvergencia van, akár valós, akár komplex változókat tekintsünk. Tehát $R \ge r_0$.

Megjegyzem, az $R \ge r_0$ alsó becslés fenetebb egy konkrét számoláson alapult, de ha valaki tanult komplex függvénytant, akkor erre nincs is szüksége. Ugyanis a komplex függvénytanban megmutatják — és, ha hiszik, ha nem, vagyunk már mi is olyan közel ehhez, hogy én is meg tudnám mutatni maguknak az általam tanított anyag alapján egy fél előadás ideje alatt ! – azt a tételt, hogy ha G egy komplex analitikus függvény egy $D \subset \mathbb{C}$ tartományon, akkor tetszőleges $a \in D$ pont körüli hatványsora konvergens lesz *legalább akkora sugárban, amekkora sugarú a körüli kör még belefér a D tartományba.* Ha tehát most elfelejtkeznénk a már igazolt $R \ge r_0$ becslésekről, és végigkövetjük az alábbi gondolatmenetet, ahol meg lesz határozva g analitikussági tartománya is, akkor abból is levonhatnánk a következtetést R pontos értékére nézve.

Minden esetre a feladatunk most az, hogy adjunk felső becslést is a konvergencia-sugárra! Ezt úgy fogjuk megtenni, hogy erősen kihasználjuk a komplex értékeket: azt, hogy a $g(z)$ függvény *nem lehet analítikus akkora körben, amiben már a nevező valahol nullává válhat.* Ugyanis a függvényértékek ahhoz a ponthoz konvergáló változó-értékekre divergálnak, végtelenhez tartanak (komplex érteleben, azaz abszolút értékben persze, $1/|g(z)| \to \infty$), miközben, ha ott még analítikus lenne, akkor folytonos, és így korlátos is kellene legyen.

Meg akarjuk oldani tehát a $\cos z = 2$ egyenletet. Ez az első pillantásra meghökkentő egyenlet csak valósban megoldhatatlan: na de ilyennel már a másodfokú egyenleteknél is találkoztunk, hogy valósban esetleg nincsen gyöke, de komplexben azért van. Ez történik itt is, mégpedig, ha az Euler-formulákat felidézzük, akkor $\cos z = \mathrm{ch}\,(iz)$ miatt ez nem is olyan meglepő, hiszen annak van megoldása, hogy $\mathrm{ch}\,(w) = 2$, még valós w-re is. Tehát akkor írjunk most először $w := e^{iz}$ helyettesítést, és így alakítsuk át az egyenletet $2 = \cos z = \frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz}) = \frac{1}{2}(w + 1/w)$, azaz megint $w^2 - 4w + 1 = 0$ alakba, amit w-re megoldva $w_{1,2} = 2 \pm \sqrt{3}$. (Vegyük észre, hogy a két megoldás egymás reciproka, hiszen szorzatuk $4 - \sqrt{3}^2 = 1$ – ami egyébként pont a konstans tagja a másodfokú, egy főegyütthatós egyenletünknek.)

Annyi van hátra, hogy ha tudjuk, hogy $w = 2 \pm \sqrt{3}$, akkor mennyi lesz z? Ha iz-t most a valósok körében keresnénk, akkor ez máris adódna: $iz = \log(2 \pm \sqrt{3}) = \pm \log(2 + \sqrt{3})$. Márpedig az exponenciális függvényre igaz, hogy ha $e^s = e^t$, akkor $e^{s-t} = e^s/e^t = 1$, és ugye $e^{u+iv} = e^u(\cos v + i \sin v)$ miatt ha $e^{u+iv} = 1$, akkor $u = 0$ és $v = 2k\pi$ alakú: tehát $s - t = iv = 2k\pi i$ alakú. Azt nyerjük így, hogy minden megoldásra $iz = \log(2 + \sqrt{3}) + 2k\pi i$ alakú kell legyen. Tehát z-ben tekintve akkor, az eredeti $\cos z = 2$ egyenlet összes komplex megoldása $\pm \log(2 + \sqrt{3})i + 2k\pi$ alakban áll elő.

Melyek ezek a pontok tehát? A 0-tól szimmetrikus távolságra az imaginárius tengelyen ott lesz a két tiszta imaginárius megoldás, a $\pm \log(2 + \sqrt{3})i$ tiszta imaginárius komplex számok; továbbá ezeknek az értékeknek a $2k\pi$- vel vett valós irányú eltoltjai fognak szerepelni.

Más szóval, $g(z)$ analítikus lesz a $D := \mathbb{C} \setminus \{\pm \log(2 + \sqrt{3} + 2k\pi \ : \ k \in \mathbb{Z}\}$ tartományon. Vegyük észre, hogy nem annyira meglepő a $\cos z = 2$ egyenlet gyökeinek ez a periódikus eloszlása, hiszen a $g(z)$ függvény tényleg periódikus 2π-vel: ezt valós értékekre azonnal látjuk, és mondjuk az Euler-formulákból komplex z-re is azonnal levezethető.

Megint oda érünk, hogy persze akkor 0 körül annál nagyobb sugarú körben, mint ahol már belekerülhet ilyen $\cos z = 2$ megoldás-érték, nyilván nem lesz analítikus a $g(z)$ függvény, és ezért *nem lesz konvergens a Maclaurin sora*, hiszen ott a függvényértékek már "felrobbannak", végtelenné válnak.

Összegezve tehát: ha $|z| \le r < r_0$, akkor szép abszolút konvergencia van, viszont ha z elérheti abszolút értékben az r_0 értéket, akkor ott divergencia: a konvergencia-sugár tehát $R = r_0 = \log(2 + \sqrt{3})$ lesz.

* * * * *

A b) feladat-rész megoldása. Hasonlóan gondolkodunk, csak most az a további kérdés merül fel, hogy milyen q paraméter mellett lesz a konvergencia-sugár legalább π?

Először is, a $\cos z = q$ egyenlet a fentiekhez hasonlóan a $w^2 + 2qw + 1 = 0$ másodfokú egyenlethez és a $\{z = \pm i \log(q + \sqrt{q^2 - 1}) + 2k\pi \ : \ k \in \mathbb{Z}\}$ megolás-halmazhoz, illetve a $D_q := \mathbb{C} \setminus \{\pm i \log(q + \sqrt{q^2 - 1}) + 2k\pi \ : \ k \in \mathbb{Z}\}$ analítikussági tartományhoz vezet, ezért $R \le r_0(q) := \log(q + \sqrt{q^2 - 1})$; mert a MAclaurin sor 0-beli középpontjától ilyen távolságra már a nevező 0-vé, $g(z)$ végtelenné vlik, odáig tehát már semmiképp sem terjedhet ki a konvergencia.

Másfelől viszont a fentiekhez hasonló átalakítással abszolút és egyenletes konvergencia tapasztalható, ha $|z| \leq r < r_0$. Tehát tényleg a konvergenciasugár az általánosabb esetben a q paraméter függvényében úgy írható, mint $R = R(q) = \log(q + \sqrt{q^2 - 1})$, és annyi a feladat, hogy ez mikor lesz π-nél nagyobb, illetve kisebb, azaz mikor lesz éppen π? Hát akkor, ha $e^\pi = q + \sqrt{q^2 - 1}$, amit átalakítva megoldhatunk: $q = q_0 \dfrac{e^{2\pi} + 1}{2e^\pi}$.

Tehát a feltett kérdésre az a válasz, hogy ha $q > q_0$, akkor $R(q) > R(q_0) = \pi$, és egyenletes (és normális és abszolút) konvergencia van, és ha $q < q_0$, akkor $R < \pi$ és még a Maclaurin sor tagjai sem tartanak 0-hoz (amit ismét csak komplexből tudunk!).

A $q = q_0$ határesetben sajnos nem látom teljesen világosan, hogy lesz-e konvergencia, illetve a $[-\pi, \pi]$-ben egyenletes lesz-e a konvergenciája a Maclaurin sornak - érdekes feladat!