Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem Gépészmérnöki Kar

Energetika és Mechatronika BSc szakok

Matematika A2H - Példa mátrixegyenletre Dátum: 2016. április 18.

Feladat: Oldjuk meg a $\begin{bmatrix} 7 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ mátrixegyenletet!

1. Megoldás: Jelölje a bal oldalon szereplő együtthatómátrixot A, a jobb oldalon álló előírt "eredménymátrixot" B: ekkor a mátrixegyenletünk az $AX = B$ egyenlet. A rendszer – az oszloponként adódó szimultán lineáris egyenletrendszer-család – kibővített mátrixa ekkor

$$[A|B] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 7 & 3 & -4 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right],$$

amit az $S_1 + 3S_3$ majd (most már az első sor első elemét választva vezérelemnek) az $S_3 + 2S_1$ sorműveletekkel átalakítva a következő sorekvivalens alakokat kapjuk:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 7 & 3 & -4 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right] \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 6 & -1 & -3 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right] \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 6 & -1 & -3 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 13 & -1 & -8 & 0 & 5 \end{array}\right].$$

Itt a 2. sor 2. elemét választva vezérelemnek, $S_3 - 13S_2$ adja a Gauss-féle lépcsős alakot, ahonnan $S_1 - 6S_2$ és $(-1) \cdot S_3$, végül pedig $S_1 + S_3$ vezet a *redukált lépcsős alakra*:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 6 & -1 & -3 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -21 & -13 & 5 \end{array}\right] \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & -9 & -6 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 21 & 13 & -5 \end{array}\right] \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 12 & 7 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 21 & 13 & -5 \end{array}\right].$$

A redukált lépcsős alakban a baloldalon minden változó kötött, ami persze ekvivalens azzal, hogy az eredeti A együtthatómátrix rangja 3, és így minden jobboldali vektorhoz létezik egy egyértelmű megoldás; és a B mátrixhoz is létezik egy egyértelmű mátrix megoldás, melyet a r.r.e.f.(A)-ból (illetve r.r.e.f.$([A|B]$-ből) leolvashatunk: $X = \begin{bmatrix} 12 & 7 & -3 \\ 1 & 1 & 0 \\ 21 & 13 & -5 \end{bmatrix}$.

Ellenőrzésképpen elvégezhetjük az $A \cdot X$ mátrixszorzást: ha jól számolunk, kijön a B mátrix. Pl. $b_{11} = \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{x}^{(1)} = [7\ 3\ -4] \cdot [12\ 1\ 21] = 3$, vagy $b_{32} = \mathbf{a}_3 \cdot \mathbf{x}^{(2)} = [-2\ 1\ 1] \cdot [7\ 1\ 13] = 0$.

2. Megoldás: Az $AX = B$ mátrixegyenlet megoldását azonnal megkapjuk, ha megvan az A mátrix R balinverze, $R \in \mathbb{R}^{3\times 3}$, amelyre tehát $R \cdot A = I_3$: ekkor ui. az egyenletet balról beszorozva R-rel a baloldalon előáll $RAX = I_3X = X$, ami a feltétel szerint $= RB$-vel a jobb oldalon, és így X-et már egy egyszerű mátrixszorzás adja meg: $X = RB$.

Felhasználva, hogy négyzetes mátrixokra az R balinverz és az S jobbinverz egyszerre létezik és ugyanaz, az $R = A^{-1} = S$ mátrixot megkereshetjük jobbinverzként is, azaz az $AY = I_3$ egyenletből, melynek kibővített mátrixa $[A|I_3]$. A Gauss–Jordan-elimináció lépései itt $S_1 + 3S_3$ majd $S_3 + 2S_1$, aztán $S_1 - 6S_2$, $S_3 - 13S_2$ és végül $(-1)S_3$ és $S_1 + S_3$, amivel

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 7 & 3 & -4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 6 & -1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 6 & -1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 13 & -1 & 2 & 0 & 7 \end{array}\right]$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & | & 1 & -6 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & | & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & | & 2 & -13 & 7 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & | & -1 & 7 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & | & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & -2 & 13 & -7 \end{bmatrix}.$$

Innen $Y = A^{-1} = S = R = \begin{bmatrix} -1 & 7 & -4 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 13 & -7 \end{bmatrix}$, ahonnan a feladat befejezése egyszerű mátrixszorzás:

$$X = A^{-1}B = \begin{bmatrix} -1 & 7 & -4 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 13 & -7 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 & 7 & -3 \\ 1 & 1 & 0 \\ 21 & 13 & -5 \end{bmatrix}.$$

3. Megoldás: Ahhoz, hogy $RA = I_3$ legyen, ekvivalensen a transzponáltat tekintve $(RA)^T = I_3^T = I_3$, tehát az $A^TY = I_3$ egyenletet kell megoldani az ismeretlen $Y(= R^T) \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ mátrixra (és ebből az $R := Y^T$ mátrixot kell leolvasni).

Tehát egy olyan mátrixegyenletet kapunk, amelynek a kibővített mátrixa $[A^T|I_3]$ alakú: ez egyébként a 2. Megoldásbeli egyenlet transzponált egyenlete.

Ezt is megoldhatjuk Gauss–Jordan-eliminációval. Mondjuk előbb $S_1 - 2S_2$ és $S_3 + S_2$-vel egyszerűbbé téve a mátrix alakját, vesszük az 1. sor 1. elemét vezérelemnek, és kinullázzuk az első oszlopot az $S_2 - 3S_1$ és $S_3 + S_1$ sorműveletekkel: ezzel kapjuk, hogy

$$\begin{bmatrix} 7 & 0 & -2 & | & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & | & 0 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & 1 & | & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -2 & -4 & | & 1 & -2 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & | & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & | & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -2 & -4 & | & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 7 & 13 & | & -3 & 7 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & | & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Itt az $S_2 \leftrightarrow S_3$ sorcsere után a 2. sor 2. elemét választhatjuk vezérelemnek, (ez ugyan -1, de nem kell mindjárt normált vezérelem nekünk); ezután az $S_3 + 7S_2$ művelet kinullázza az ezalatti oszlopot is, amivel már egy lépcsős alakra jutunk: és itt könnyen normálhatjuk is a vezérelmeket a $(-1) \cdot S_2$ és $(-1) \cdot S_3$ beszorzásokkal. Ezekkel a sorműveletekkel adódik tehát

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & -4 & | & 1 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & | & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 7 & 13 & | & -3 & 7 & 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -2 & -4 & | & 1 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & | & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & | & 4 & 0 & 7 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -2 & -4 & | & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & | & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & | & -4 & 0 & -7 \end{bmatrix}.$$

Végül a Gauss-Jordan r.r.e.f.-et is meghatározzuk az $S_1 + 2S_2$, majd az $S_2 - 2S_3$ lépésekkel:

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & -4 & | & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & | & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & | & -4 & 0 & -7 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & | & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & | & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & | & -4 & 0 & -7 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & | & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & | & 7 & 1 & 13 \\ 0 & 0 & 1 & | & -4 & 0 & -7 \end{bmatrix}.$$

Ahogyan fentebb, úgy itt is leolvasható, hogy r.r.e.f.$(A) = I_3$ és a megoldásmátrix r.r.e.f.-ben a kibővített mátrix jobb oldalán (a függőleges vonal után) álló Y mátrix. (Ellenőrzésképpen el lehet végezni az $A^T \cdot Y = I_3$ mátrixszorzást.)

Innen tehát a balinverz $R = Y^T = \begin{bmatrix} -1 & 7 & -4 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 13 & -7 \end{bmatrix}$. Ebből a keresett X mátrix ismét

$$X = R \cdot B = \begin{bmatrix} -1 & 7 & -4 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 13 & -7 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 & 7 & -3 \\ 1 & 1 & 0 \\ 21 & 13 & -5 \end{bmatrix}.$$