Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem Gépészmérnöki Kar
Energetika és Mechatronika BSc szakok

Matematika A2H — Elővizsga feladatsor — E

Dátum: 2016. május 25. Munkaidő: 90 perc

Hallgató neve: Hallgató Neptun kódja: .

0.) (3 pont: 3 jó válasz 3 pont, 2 jó 1, kevesebb 0 pont) Melyik állítás igaz, melyik nem?

a.) Ha a $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ sor részletösszegei felülről korlátosak, akkor a sor konvergens.

b.) Tekintsük $\mathbb{R}^3$-ban azt a P parallelepipedont, amelynek egyik csúcsa az origóban van, és az innen induló élei $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ és $\mathbf{w}$. Igaz-e az, hogy ha az $[\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}]$ kifeszített altér nem tartalmazza az $(1, 0, 1)$ vektort, akkor P térfogata 0?

c.) Egy C^2 függvény adott pontbeli Hesse-mátrixa mindig ortogonális transzformációval diagonalizálható.

1.) (3 pont) Mit értünk a $\sum_k a_k, \sum_k b_k$ végtelen sorok Cauchy-szorzatán? Mondjon elegendő feltételt a Cauchy-szorzat konvergenciájára!

2.) (3 pont) Mikor nevezünk egy $L : U \to V$ leképezést az U és V vektorterek között *lineáris leképezésnek*? Hogyan lehet felírni egy lineáris leképezés mátrixát?

3.) (3 pont) Mondja ki a kompozíció függvények differenciálására vonatkozó tételt (a "láncszabályt") vektorértékű függvényekre!

4.) (3 pont) Milyen p paraméter-értékekre konvergens a $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} n \sin\left(\frac{1}{n^p}\right)$ numerikus sor?

5.) (5 pont) **a.)** Fejtse hatványsorba az $S(x) := \displaystyle\int_0^x t \sin(t^3) dt$ függvényt!

b.) Határozzon meg olyan N küszöbszámot is, ameddig kiszámolva az S-re felírt hatványsor összegét, a közelítés már $\varepsilon := 5 \cdot 10^{-5}$ hibán belül marad, ha $|x| \le 1$.

6.) (5 pont) Legyenek $P(x) = x + 2x^2 + 3x^3$, $Q(x) = 3x^3 - 2x^2$, $R(x) := x^2 + 1$, $S(x) := x^2 + 2x$. Lineárisan összefüggenek, vagy függetlenek ezek a polinomok a legfeljebb harmadfokú polinomok $\mathcal{P}_3$ terében?

7.) (7 pont) Határozza meg az $A := \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ mátrix sajátértékeit és a sajátértékekhez tartozó sajátvektorait! Diagonalizálható-e a mátrix?

8.) (7 pont) Állapítsa meg, hogy hol, és milyen helyi szélsőértéke van a $g(x, y, z) := x^3 + y^2 + z^2 + 12xy + 2z$ függvénynek!

9.) (6 pont) A $\Phi(x, y, z) := (xy, e^{x-z}, x^2 + \operatorname{ch}(y + z)) : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ leképezés a $P(1, -1, 1)$ pontot a $Q = (-1, 1, 2)$ pontba viszi. Létezik-e Φ-nek differenciálható Φ^{-1} inverz függvénye a Q pont körül egy alkalmas kis környezetben? Ha igen, számítsa ki a $D\Phi^{-1}(Q)$ inverz deriváltat!

10.) (3 pont) Teljes differenciál-e a $\operatorname{ch}(x - y^2)dx + xyzdy + \operatorname{sh}(x - z)dz$ kifejezés?

11.) (4 pont) Legyen H az a háromszög alakú tartomány a síkon, amelynek határai az x-tengely, az $y = x$ egyenes és az $x = \pi$ egyenes. Számítsa ki az $I := \iint_H \frac{\sin x}{x}\, dxdy$ kettős integrált!

12.) (8 pont) Egy talpas pohár kelyhe a $z = x^2$ parabola elforgatásával keletkező forgási paraboloid alakját mutatja. A pohárban 4 cm magasságig 1 sűrűségű víz, afelett pedig 9 cm magasságig α sűrűségű ismeretlen folyadék van. Mennyi az ismeretlen folyadék α sűrűsége, ha a teljes folyadékmennyiség súlypontja 5 cm magasan található?

Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem Gépészmérnöki Kar
Energetika és Mechatronika BSc szakok

Matematika A2H – Elővizsga feladatok megoldásai – E

0.) (3 pont: 3 jó válasz 3 pont, 2 jó 1, kevesebb 0 pont)

a.) HAMIS. (Nyilván: pl. $\sum_n (-1)^n$ és $\sum_n -2^n$ is divergens.)

b.) IGAZ. (Ha $(1,0,1) \notin [\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w}]$, akkor ezek nem alkotnak bázist, ezért nem is lineárisan függetlenek, és determinánsuk – ami $= V(P)$-vel – 0 lesz.)

c.) IGAZ. (U.i. C^2 függvény második parciális deriválétjai a Young tétel szerint nem függenek a sorrendtől, ami azt jelenti, hogy H szimmetrikus: ekkor pedig tanult tétel szerint ortogonális transzformációval diagonalizálható is.)

1.) (3 pont) A sorok Cauchy-szorzata $\sum_k c_k$, ahol $c_k = (a_0 b_k + a_1 b_{k-1} + \cdots + a_k b_0)$.

Ha a két összeszorzott sor egyike abszolút konvergens, a másik pedig legalább is konvergens, akkor a Cauchy-szorzat is (abszolút) konvergens.

2.) (3 pont) Akkor, ha $L(\alpha\mathbf{x}+\beta\mathbf{y}) = \alpha L\mathbf{x} + \beta L\mathbf{y}$ teljesül minden $\alpha,\beta \in \mathbb{K}$ számtestbeli (skalár) együtthatókkal és $\mathbf{x},\mathbf{y} \in U$ vektorra.

Ha $\mathbf{u}_1, \dots \mathbf{u}_n$ az U, $\mathbf{v}_1, \dots \mathbf{v}_m$ a V tér egy-egy bázisa, akkor ezen bázisok mellett a lineáris leképezés mátrixa $M_L = [e_i(L(\mathbf{u}_j))]_{i=1,j=1}^{m,n}$, ahol tetszőleges $\mathbf{v} \in V$-re $e_i(\mathbf{v})$ a $\mathbf{v}_i$ bázisvektor együtthatója a $\mathbf{v} = \sum_{i=1}^n e_i \mathbf{v}_i$ felírásban (ami minden $\mathbf{v} \in V$-re egyértelmű, hiszen $\mathbf{v}_i$ bázis).

3.) (3 pont) Láncszabály: Tegyük fel, hogy $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^k$ és $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$; $f \in C^1(\mathcal{E}), g \in C^1(\mathcal{D})$, $\underline{a} \in \mathcal{D}$, $R_g \subset \mathcal{E}$, $g(\underline{a}) = \underline{b} \in \mathcal{E}$. Legyen $h := f \circ g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$.

Ekkor h is folytonosan differenciálható $\mathcal{D}$-ben, és $Dh(\underline{a}) = Df(\underline{b})Dg(\underline{a})$, azaz $D(f \circ g)(\underline{a}) = Df(g(\underline{a})) \cdot Dg(\underline{a})$ (mátrix szorzás).

4.) (3 pont) Az ú.n. speciális összehasonlító kritérium, vagy más néven határérték-teszt segítségével dolgozunk: összehasonlítjuk az adott $\sum_n a_n$ sort a $\sum_n b_n$ sorral, ahol $b_n = n^{1-p}$. Ekkor $\lim_{n\to\infty} a_n/b_n = \lim_{n\to\infty} \sin(n^{-p})/n^{-p} = \lim_{x\to+0} \sin x/x = 1$, tehát véges nem nulla határérték van, és, mivel $a_n, b_n \geq 0$, a teszt alkalmazható: a két sor ekvikonvergens.

Márpedig a $\sum_n b_n$ sor a p-harmonikus sor, csak eltolt paraméter-értékkel: tehát konvergens akkor lesz, ha $1-p < -1$, tehát $p > 2$, és egyébként divergens. Ezért az eredeti sor is pontosan akkor konvergens, ha $p > 2$ (és $p \leq 2$-re divergál).

5.) (5 pont) Mivel sin az egész komplex síkon analitikus, a $[0,1]$ intervallumon belüli t, és így t^3 értékek a hatványsorba helyettesíthetőek és a hatványsor egyenletesen és abszolút konvergens is lesz, így tagonként integrálható is. Az ismert $\sin z = \sum_n \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1}$ sorfejtésbe beírva tehát t^3-öt, $S(x) = \int_0^x t \sum_n \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} t^{6n+3}\, dt = \sum_n \int_0^x \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} t^{6n+4}\, dt = \sum_n \left[\frac{(-1)^n}{(6n+5)(2n+1)!} t^{6n+5} \right]_0^x = \sum_n \frac{(-1)^n}{(6n+5)(2n+1)!} x^{6n+5}$ sorfejtés adódik.

A sor tagjainak abszolút értékei láthatóan monoton csökkennek, előjelei pedig alternálnak, így ez egy alternáló (Leibniz típusú) sor. Az ismert hibabecslés szerint tehát $|R_N| \leq |a_{N+1}| = |\frac{(-1)^{N+1}}{(6(N+1)+5)(2(N+1)+1)!}x^{6(N+1)+5}| \leq \frac{1}{(6N+11)(2N+3)!}$, tekintve, hogy $0 \leq x \leq 1$.

Innen próbálgatással megnézhetjük, mikor lesz a kiszámolt hibabecslés elegendően kicsiny. Ha $N = 2$, akkor még talán nem, de $N = 3$-ra már $(6N+11)(2N+3)! = 29 \cdot 9! = 29 \cdot 9 \cdot 56 \cdot 6! = 261 \cdot 56 \cdot 720 > 200 \cdot 50 \cdot 500 = 5 \cdot 10^6$ tehát a reciproka kisebb, mint $2 \cdot 10^{-7} < \varepsilon$, bőven jó lesz.

6.) (5 pont) A teljes $\mathcal{P}_3$ tér 4 dimenziós, egy bázisa az 1 (konstans polinom), x, x^2, x^3 rendszer. Ebben a bázisban felírva az adott polinomok koordinátáit, a $\mathbf{p} = (0, 1, 2, 3), \mathbf{q} = (0, 0, -2, 3), \mathbf{r} = (1, 0, 1, 0)$ és $\mathbf{s} = (0, 2, 1, 0)$ együttható-vektorok adódnak. A rendszer lineárisan független pontosan akkor, ha ezek a vektorok lineárisan függetlnek, azaz ha a mátrixuk teljes rangú, nem-szinguláris, azaz ha a vektorokból – mondjuk mint oszlopokból, de ekvivalensen akár mint sorokból – képzett determináns nem nulla. A kérdés tehát az, hogy

$$d := \begin{vmatrix} \mathbf{p} \\ \mathbf{q} \\ \mathbf{r} \\ \mathbf{s} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \qquad \text{teljesül-e?}$$

Az első oszlop szerint kifejtve, majd további ekvivalens sorműveletekkel kapjuk, hogy

$$d = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} \overset{S_3 - 2S_1}{=} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ -3 & -6 \end{vmatrix} = 21 \neq 0.$$

Tehát a megadott polinomok lineárisan függetlenek.

7.) (7 pont) Az A mátrix karakterisztikus polinomja a

$$p_A(\lambda) = \det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda - 3 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & \lambda - 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda - 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda - 2 \end{vmatrix}$$

determináns kifejtésével kapható meg. A fenti determináns definíció szerint történő kifejtésekor csak két nem nulla szorzat keletkezik: $(\lambda-3)(\lambda-3)(\lambda-2)(\lambda-2)$ és $(-1)(-1)(\lambda-2)(\lambda-2)$, előbbi pozitív, utóbbi negatív előjellel. (Vagy: előbb a 3. majd az utolsó oszlop szerint kifejtve a determinánst, $p_A(\lambda) = (\lambda-2)^2 \begin{vmatrix} \lambda - 3 & -1 \\ -1 & \lambda - 3 \end{vmatrix} = (\lambda-2)^2[(\lambda-3)^2 - 1] = (\lambda-2)^3(\lambda-4)$.)

Ebből a $p_A(\lambda) = (\lambda-2)^3(\lambda-4) = 0$ karakterisztikus egyenlet, valamint a $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 2$ és $\lambda_4 = 4$ sajátértékek adódnak. A $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 2$ sajátértékekhez tartozó sajátvektorok az $(A - 2I)\mathbf{x} = 0$ homogén lineáris egyenletrendszer megoldásaként adódnak, melynek együtthatómátrixa $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \overset{S_2 - S_1}{\Leftrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. Ebből $x_1 = -x_2$, x_3 szabadon választható és $x_4 = 0$ adódik, így a sajátvektorok $t \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ alakúak.

A $\lambda_4 = 4$ sajátértékhez tartozó sajátvektorok az $(A - 4I)\mathbf{y} = 0$ homogén lineáris egyenletrendszer megoldásai. A rendszer együtthatómátrixa

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{matrix} S_2 + S_1, (-1/2)S_4 \\ \Leftrightarrow \end{matrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} S_3 - S_4, (-1/2)S_3 \\ \Leftrightarrow \end{matrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

és így $y_1 = y_2$ (értékük szabadon megválasztható) és $y_3 = y_4 = 0$ adódik, ezért a sajátvektorok $r \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ alakúak.

Az összes sajátvektorok által kifeszített altér három dimenziós, ezért az A mátrix nem diagonalizálható.

8.) (7 pont) $\mathcal{D}_g = \mathbb{R}^3$, ahol $g \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$. A szélsőértékek csak kritikus pontokban léphetnek fel, ahol $\nabla g = (3x^2 + 12y, 2y + 12x, 2z + 2) = \mathbf{0}$. Ebből (a harmadik koordinátából) $z = -1$, és az első két koordináta által szolgáltatott egyenletrendszerből kiküszöbölve y-t $0 = 3x^2 + 12y - 6(2y + 12x) = 3x^2 - 72x = 0$ azaz $3x(x - 24) = 0$, tehát vagy $x = 0$, vagy $x = 24$; a megfelelő y értékek pl. a második egyenletből $y = -6x = 0$ és -144. Tehát a két kritikus pont $\mathbf{a} = (0, 0, -1)$ és $\mathbf{b} = (24, -144, -1)$.

Ezekben a pontokban megvizsgáljuk a második deriváltat, a Hesse mátrixot. Általában $H = D^{(2)}g = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 g}{\partial xy} & \frac{\partial^2 g}{\partial xz} \\ \frac{\partial^2 g}{\partial xy} & \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} & \frac{\partial^2 g}{\partial yz} \\ \frac{\partial^2 g}{\partial xz} & \frac{\partial^2 g}{\partial yz} & \frac{\partial^2 g}{\partial z^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6x & 12 & 0 \\ 12 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$, aminek sajátértékei nyilvánvalóan $\lambda_3 = 2$ és a bal felső 2×2 részmátrix sajétértékei: az $\mathbf{a}$ pontban tehát $H(\mathbf{a}) = \begin{bmatrix} 0 & 12 & 0 \\ 12 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$, a $\mathbf{b}$ pontban pedig $H(\mathbf{b}) = \begin{bmatrix} 144 & 12 & 0 \\ 12 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$.

A $H(\mathbf{a})$ mátrix karakterisztikus polinomja $P_\mathbf{a}(\lambda) = \det(H(\mathbf{a}) - \lambda I) = (2 - \lambda)[\lambda^2 - 2\lambda - 144]$, aminek $\lambda = 2 > 0$ is gyöke, de van negatív gyöke is (u.i. pl. a második, másodfokú tényező konstans tagja a két gyök szorzata, és ez negatív). Tehát $H(\mathbf{a})$ indefinit, és $\mathbf{a}$-ban nyeregpont van.

A $H(\mathbf{b})$ mátrix karakterisztikus polinomja $P_\mathbf{b}(\lambda) = \det(H(\mathbf{b}) - \lambda I) = (2 - \lambda)[\lambda^2 - 146\lambda + 144] = (2 - \lambda)(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)$, ahol a másodfokú egyenlet megoldóképletéből $\lambda_{1,2} = 73 \pm \sqrt{73^2 - 144}$, tehát minden sajátérték pozitív, és $H(\mathbf{b}) \gg 0$. Ennek megfelelően $\mathbf{b}$-ben a g függvénynek helyi minimuma van.

Gondolkozhatunk úgy is, hogy meghatározzuk a H mátrix főminorait. Az $\mathbf{a}$ pontban ezek rendre 0, negatív és negatív lesznek, így $H(\mathbf{a})$ nem lehet sem negatív definit sem pozitív definit: mivel a determinánsa nem 0, a $\lambda = 0$ sem lehet sajátértéke, ezért szemidefinit sem lehet. Így csak az indefinit lehetőség marad. A $H(\mathbf{b})$ mátrix főminorai viszont 144, 144, 288, csupa pozitív érték, ezért $H(\mathbf{b}) \gg 0$.

9.) (6 pont) Létezik egy környezetben inverz, amely ráadásul a Q pontban még deriválható is, pontosan akkor, ha a $D\Phi(P)$ derivált-mátrix nem-szinguláris (és ekkor $D\Phi^{-1}(Q) = D\Phi(P)^{-1}$ inverz mátrix). Tehát tisztáznunk kell, hogy a $D\Phi(P)$ derivált-mátrix szinguláris-e?

A deriváltmátrix

$$D\Phi(x,y,z) = \begin{bmatrix} \frac{\partial\Phi_1}{\partial x}(x,y,z) & \frac{\partial\Phi_1}{\partial y}(x,y,z) & \frac{\partial\Phi_1}{\partial z}(x,y,z) \\ \frac{\partial\Phi_2}{\partial x}(x,y,z) & \frac{\partial\Phi_2}{\partial y}(x,y,z) & \frac{\partial\Phi_2}{\partial z}(x,y,z) \\ \frac{\partial\Phi_3}{\partial x}(x,y,z) & \frac{\partial\Phi_3}{\partial y}(x,y,z) & \frac{\partial\Phi_3}{\partial z}(x,y,z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y & x & 0 \\ e^{x-z} & 0 & -e^{x-z} \\ 2x & \mathrm{sh}\,(y+z) & \mathrm{sh}\,(y+z) \end{bmatrix}$$

aminek az értéke P-ben

$$D\Phi(P) = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Láthatólag ez a mátrix nem szinguláris (a determináns értéke -2), így létezik deriválható inverz.

Az inverz meghatározásához Gauss-Jordan eliminációt végzünk:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{c} S_2+S_1 \\ S_3+2S_1 \\ \Leftrightarrow \\ (-1)S_1 \end{array} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{c} S_1+S_2 \\ S_3-2S_2 \\ \Leftrightarrow \\ (-1)S_1 \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & -2 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{c} (1/2)S_3 \\ S_1+S_3 \\ \Leftrightarrow \end{array} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1/2 \end{array}\right],$$

tehát

$$D\Phi^{-1}(Q) = D\Phi(P)^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1/2 \\ 1 & 0 & 1/2 \\ 0 & -1 & 1/2 \end{bmatrix}.$$

10.) (3 pont) Nem lesz teljes differenciál, mert ez egy $C^1(\mathbb{R}^3)$ függvény, így a feltételezett potenciáljának (ami már akkor $C^2(\mathbb{R})$-beli) teljesítenie kellene a Young tétel állításait, de a keresztbe vett parciális deriváltak itt láthatóan nem egyeznek meg. Pl. dx együtthatójának y szerinti parciális deriváltja $\partial \mathrm{ch}\,(x-y^2)/\partial y = -2y\mathrm{sh}\,(x-y^2)$ míg $\partial xyz/\partial x = yz$.

11.) (4 pont) Vegyük észre, hogy az integrandus függvény folytonos (legalábbis megszüntethető a szakadása, ha a határokat is beleértjük a tartományba és a határra eső $O = (0,0)$ pontban az 1 határértéket tekintjük a függvény értékének). Így a függvény Riemann-integrálható is, és alkalmazhatjuk rá a Fubini-tételt: a területi integrált a változók bármelyik sorrendje szerinti egyszeres integrálok egymásutáni elvégzésével is kiszámíthatjuk.

Itt a célszerű az, ha előbb (a belső integrálban) y szerint integrálunk, másként nem jutunk célhoz egykönnyen. (Lehetséges hatványsort is felírni, de ez nehezbb technika, mint az y szerint kezdeni az integrálást). Az y függvényében konstans az integrandus, viszont az integrálási határokat meg kell határozzuk: y-ban a H háromszög-tartomány az $y = 0$ és az $y = x$ függvények közzötti normáltartomány, és így adott $0 \leq x \leq \pi$ esetén y-ban a $[0,x]$ intervallumon fogunk integrálni.

$$I := \iint_H \frac{\sin x}{x}\,dxdy = \int_0^\pi \int_0^x \frac{\sin x}{x}\,dy\,dx = \int_0^\pi \frac{\sin x}{x}[y]_0^x\,dx = \int_0^\pi \sin x\,dx = [-\cos x]_0^\pi = 2.$$

12.) (8 pont) Jelölje a pohár folyadékkal töltött belsejét P: ekkor a pohár fala a $z = x^2 + y^2$, $(0 \leq z \leq 9 \Leftrightarrow |(x,y)| \leq 3)$ egyenletekkel írható le, így könnyen látható, hogy $P = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ (0 \leq)|(x,y)| = \sqrt{x^2+y^2} \leq 3, \ x^2+y^2 \leq z \leq 9\}$.

A forgásszimmetria miatt a súlypont (tömegközéppont) a z tengelyen helyezkedik el, mégpedig a $\overline{z} = \frac{M_{xy}}{M}$ magasságban, ahol M a teljes P-ben elhelyezkedő folyadékmennyiség tömege, M_{xy} pedig az xy síkra gyakorolt statikai nyomatéka. Tehát azt az egyenletet kell megoldjuk, hogy $\overline{z} =$, amihez az ismeretlen α paraméterrel ki kell számítsuk az M össztömeget és az M_{xy} statikai nyomatékot.

Vegyük észre, hogy, bár nehezíti a dolgunkat, hogy változó sűrűségű anyaggal van dolgunk, azért a sűrűségfüggvény igen egyszerű alakú, hiszen csak a magasságtól függ, és konkrétan így írható fel: $\rho(x,y,z) = \rho_0(z) = \begin{cases} 1 & \text{ha } 0 \leq z \leq 4 \\ \alpha & \text{ha } 4 \leq z \leq 9 \end{cases}$.

A feladatot direkt integrálással is meg lehet oldani, de talán elegánsabb és így könnyebb az (r,φ,h) hengerkoordinátákra áttérve dolgozni. Valóban, ha $H(r,\varphi,h) = (x,y,z) = (r\cos\varphi, r\sin\varphi, h)$ az áttérési transzformáció, akkor $Q := H^{-1}(P) = \{(r,\varphi,h) \ : \ 0 \leq r \leq 3, 0 \leq \varphi \leq 2\pi, r^2 \leq h \leq 9\} = \{(r,\varphi,h) \ : \ 0 \leq h \leq 9, 0 \leq \varphi \leq 2\pi, 0 \leq r \leq \sqrt{h}\}$ egyszerű alakú, ráadásul a sűrűségfüggvény is ugyanolyan egyszerű marad, hiszen $\rho(H(r,\varphi,h)) = \rho_0(h)$.

A kiszámítandó mennyiségek tehát hengerkoordinátákra áttérve (és eközben felhasználva, hogy az áttérés Jacobi-determinánsa a jól ismert $J_H(r,\varphi,h) = r$ érték), majd Fubini tételének alkalmazásával szukcesszív integrálásra átalakítva:

$$M = \iiint_P \rho(x,y,z)\ dxdydz = \iiint_Q \rho_0(h)r\ drd\varphi dh = \int_0^9 \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{h}} \rho_0(h)r\ dr\ d\varphi\ dh$$

és

$$M_{xy} = \iiint_P z\rho(x,y,z)dxdydz = \iiint_Q h\rho_0(h)r\ drd\varphi dh = \int_0^9 \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{h}} h\rho_0(h)r\ dr\ d\varphi\ dh.$$

A belső dr és $d\varphi$ szerinti integrálok könnyen kiszámíthatóak, mert sem h, sem $\rho_0(h)$ nem függenek ezektől a változóktól (csak az r Jacobi-determináns értékét kell integrálni, ami φ-ben szintén konstans, de r-ben is igen egyszerű), így tehát

$$M = 2\pi \int_0^9 \rho_0(h)[r^2/2]_0^{\sqrt{h}}\ dh = \pi \int_0^9 \rho_0(h)hdh = \pi \left(\int_0^4 hdh + \int_4^9 \alpha hdh \right) = \pi \left(8 + \alpha\frac{65}{2} \right)$$

és hasonlóan számolva

$$M_{xy} = 2\pi \int_0^9 h\rho_0(h)[r^2/2]_0^{\sqrt{h}}\ dh = \pi \int_0^9 \rho_0(h)h^2dh = \pi \left(\int_0^4 h^2dh + \int_4^9 \alpha h^2dh \right) = \pi \left(\frac{64}{3} + \alpha\frac{665}{3} \right),$$

amiből

$$\overline{z} = \frac{M_{xy}}{M} = \frac{\pi\left(\frac{64}{3} + \alpha\frac{665}{3}\right)}{\pi\left(8 + \alpha\frac{65}{2}\right)} = \frac{128 + 1330\alpha}{48 + 195\alpha}$$

Behelyettesítve a kitűzés szerinti $\overline{z} = 5$ értéket és megoldva az egyenletet, $\alpha = \frac{112}{355} \approx 0,315$ adódik.