Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem Gépészmérnöki Kar

Energetika és Mechatronika BSc szakok

Matematika A2H — Vizsga feladatsor — L

Dátum: 2016. június 22. Munkaidő: 90 perc

Hallgató neve: Hallgató Neptun kódja: .

0.) (3 pont: 3 jó válasz 3 pont, 2 jó 1, kevesebb 0 pont) Melyik állítás igaz, melyik nem?

a.) "Ha egy $\sum_{k=0}^{\infty} u_k$ Leibniz típusú sor minden második tagját összevonjuk az utána következő páratlanadik taggal, akkor a keletkező $\sum_{n=0}^{\infty}(u_{2n}+u_{2n+1})$ új sor már abszolút konvergens lesz."

b.) "Ha egy mátrix indefinit, akkor szinguláris is."

c.) "Ha egy f függvénynek egy $P \in \operatorname{int}\mathcal{D}_f$ pontban van támaszsíkja, akkor az egyértelmű."

- -

1.) (6 pont) Fogalmazza meg és bizonyítsa be a Cauchy-Hadamard tételt!

2.) (3 pont) Mikor nevezünk egy V vektortérben egy $U \subset V$ halmazt *altérnek*? Igazolja, hogy ha $U, W \subset V$ két altér, akkor $U \cap W$ is altér V-ben!

3.) (3 pont) Hogyan függ össze egy konvex, nyílt $D \subset \mathbb{R}^n$ halmazon értelmezett $C^2(D)$ osztályú függvény konvexitása és Hesse-mátrixának jellege?

- -

4.) (4 pont) Igazoljuk, hogy a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1+i)^n}{3^n}$ komplex tagú sor konvergens, és keressünk az $\varepsilon := 0,001$ értékhez alkalmas $N := N(\varepsilon)$ küszöb-indexet, amelyre teljesül, hogy $n \geq N$ esetén az n-edik részletösszegek a sor összegét ε hibán belül megközelítik!

5.) (5 pont) Az ún. *normális eloszlás* sűrűségfüggvénye $N(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-t^2/2} dt.$

a.) Felhasználva, hogy $N(0) = 0,5$, írja fel $N(x)$ Maclaurin-sorát!

b.) Meddig kell elmenni a szummázásban, hogy $N(1)$ értékét legalább 2 tizedesre pontosan megállapítsuk?

6.) (3 pont) Számítsa ki a $Q := \begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & 4 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & -3 & 4 \end{bmatrix}$ mátrix rangját!

7.) (4 pont) Határozza meg az $A := \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & -2 \end{bmatrix}$ mátrix sajátértékeit és a sajátértékekhez tartozó sajátvektorait! Diagonalizálható-e az A mátrix?

8.) (7 pont) Tekintsük az $F(x, y, z) = (\cos(x+z), xy+zx^2, y^2+e^x) : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ függvényt! Ekkor a $\mathbf{p} := (0, 1, \pi/2)$ pont képe a $\mathbf{q} := F(\mathbf{p}) = (0, 0, 2)$ pont lesz. Invertálható-e differenciálható módon az F függvény a $\mathbf{p}$ pont egy környezetében? Ha igen, határozza meg a $G := F^{-1}$ legjobb lineáris közelítésének egyenletét a $\mathbf{q}$ pontban!

9.) (5 pont) Határozza meg a $\psi(x, y) := e^{x-1}\operatorname{ch}(y + 1) - \log x$ függvény értelmezési tartományát és értékkészletét! Határozza meg a függvény összes (helyi) szélsőértékeit!

10.) (5 pont) Teljes differenciál-e az $(\frac{1}{x} + y^2 \cos(xy^2))\ dx + 2xy \cos(xy^2)\ dy + \frac{1}{z}\ dz$ kifejezés? Ha nem, igazolja, hogy miért nem, ha igen, határozza meg a potenciálfüggvényt!

11.) (5 pont) Mennyi az O origótól vett átlagtávolsága azoknak a síkbeli pontoknak, amelyek nincsenek 1-nél közelebb, de 2-nél távolabb sem O-tól?

12.) (7 pont) Egy talpas pohár kelyhe a $z = x^2$ parabola elforgatásával keletkező forgási paraboloid alakját mutatja. A pohárban 4 cm magasságig 1 sűrűségű víz, afelett pedig 9 cm magasságig $\alpha = 0,8$ sűrűségű folyadék van. Milyen magasan található a pohárban lévő folyadékmennyiség súlypontja?

Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem Gépészmérnöki Kar

Energetika és Mechatronika BSc szakok

Matematika A2H – Vizsga feladatok megoldásai – L

0.) (3 pont: 3 jó válasz 3 pont, 2 jó 1, kevesebb 0 pont)

a.) IGAZ. (U.i. egy Leibniz típusú sor konvergens – de akkor a részletösszegek S_{2n+1} részsorozata is konvergál a sor teljes összegéhez: márpedig a monotonitási feltevések szerint $u_{2n} + u_{2n+1}$ állandó előjelű, így ha a részletösszegek konvergálnak, akkor abszolút konvergens a soruk.)

b.) HAMIS. (U.i. indefinit azt jelenti, hogy vannak pozitív és negatív sajátértékei is – ebből nem következik, hogy 0 sajátérték is volna, ami pedig a szingularitással ekvivalens.)

c.) HAMIS. (Már egy dimenzióban is hamis. Pl. a $z = |x|$ függvény z tengely körüli körbeforgatásával – azaz a $z(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ kúp alakú függvénnyel – kaphatunk "valódi többváltozós" példát is.)

- -

1.) (6 pont) **Cauchy–Hadamard tétel.** Ha $\exists L := \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$, akkor a

$$(*) \quad \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

hatványsor konvergenciasugara $R = \dfrac{1}{L}$ (beleértve, hogy ha $L = 0$, akkor $R = +\infty$, és ha $L = +\infty$, akkor $R = 0$).

Bizonyítás: Legyen $R := 1/L$.

Ha $|z-z_0| > R$, akkor $|a_n(z-z_0)^n| = (\sqrt[n]{|a_n|} \cdot |z-z_0|)^n \geq 1$ $(n \geq n_0)$, mert $\sqrt[n]{|a_n|} \cdot |z-z_0| \to L \cdot |z - z_0| > L \cdot R = 1$, és így $n > n_0$-ra $\sqrt[n]{|a_n|} \cdot |z - z_0| \geq 1 \Rightarrow$ az n-edik hatványa is ≥ 1 lesz. Tehát $|z - z_0| > R$-re $(*)$ divergál.

Másfelől, ha $r < R$ tetszőleges, akkor $|z - z_0| \leq r$ esetén $(*)$-ot majorizálja a $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |a_n| r^n$ numerikus sor, és erre a speciális gyökkritérium alkalmazható, mivel $\sqrt[n]{|a_n| r^n} \to L \cdot r < 1$.

2.) (3 pont) Akkor nevezzük U-t altérnek, ha $U \subset V$ és U maga is vektorteret alkot a V-beli műveletekre. Mivel a műveleti azonosságok az egész V-ben érvényesek, ehhez csak az kell, hogy U-beli vektorokkal végzett műveletek – egy skalárral való beszorzás, illetve két vektor összeadása – ne vezessen ki az U halmazból (műveleti zártság teljesülön).

Ha $u, w \in U \cap W$, akkor $u + w \in U$ és $u + w \in W$, tehát $u + w \in U \cap W$; hasonlóan a skalárszorosra, tehát $U \cap W$ is zárt lesz a műveletekre.

3.) (3 pont) A függvény pontosan akkor konvex D-n, ha a Hesse mátrixa (azaz a második deriváltja) az egész D-n pozitív szemidefinit. (A pozitív definitség nem szükséges, csak elégséges!) Hasonlóan, a függvény pontosan akkor konkáv, ha Hesse-mátrixa negatív szemidefinit D-n.

Nem volt az előadáson részletesen megtárgyalva, de az egyváltozós ismereteink alapján kihozható, hogy a konvexitás nem szigorú pontosan abban az esetben, ha van olyan $[\mathbf{p},\mathbf{q}] \subset D$ szakasz D-ben, amelynek mentén a Hesse mátrix pozitív szemidefinit, és konkrétan a $\mathbf{v} = \mathbf{q}-\mathbf{p}$ irányban éppen 0, azaz $H\mathbf{v} = 0$ a $[\mathbf{p},\mathbf{q}]$ szakaszon. (Ez azt jelenti, hogy a szemidefinitség alapján létező 0 sajátértékhez tartozó (egyik) sajátvektor éppen a $\mathbf{v} = \mathbf{q}-\mathbf{p}$ vektor az összes pontban a $[\mathbf{p},\mathbf{q}]$-n. (Bónusz + 2 pont!)

- -

4.) (4 pont) A sor abszolút konvergens, mivel $\sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{(1+i)^n}{3^n}\right| = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\sqrt{2}}{3}\right)^n = \frac{1}{1-\frac{\sqrt{2}}{3}} = \frac{3}{3-\sqrt{2}}$ konvergens geometriai sor. Az abszolút sor hibája is geometriai sor lesz: $|R_N| = |S - S_N| \leq \sum_{n=N+1}^{\infty} \left(\frac{\sqrt{2}}{3}\right)^n = \left(\frac{\sqrt{2}}{3}\right)^{N+1} \frac{3}{3-\sqrt{2}} < \left(\frac{1,5}{3}\right)^{N+1} \frac{3}{3-1,5} = 2^{-N}$, mivel $\sqrt{2} \approx 1,41 < 1,5$.

Szerencsére $2^{10} > 1000$, így ha $N = 10$, akkor már $2^{-10} < 0,001 = \varepsilon$.

5.) (5 pont) Az $N(0) = 0,5$ értelmében $N(x) = 0,5 + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-t^2/2} dt$. Mivel az exponenciális függvény hatványsora egyenletesen konvergens, a hatványsorba $-t^2/2$-t helyettesítve a sor integrálása elvégezhető tagonként, amiből

$$N(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}(t^2/2)^n \, dt = \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\int_0^x \frac{1}{2^n \; n!} t^{2n} \, dt \right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2^n \; (2n+1) \; n!}.$$

A felírt sor $x = 1$-re gyorsan konvergál, és a hibája

$$R_N = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{2^n \; (2n+1) \; n!} < \frac{1}{2} \frac{1}{(2N+3) \; (N+1)!} \sum_{n=N+1}^{\infty} 2^{-n} = \frac{1}{(2N+3) \; (N+1)! \; 2^{N+1}}.$$

Ezért ha $\varepsilon = 0,005$ hibán belül akarunk közelíteni, akkor elegendő azt biztosítani, hogy $(2N+3) \; (N+1)! \; 2^{N+1} > 1/\varepsilon = 200$ legyen, tehát elegendő már az $N = 2$ érték is, u.i. $7 \cdot 6 \cdot 2^3 = 42 \cdot 8 > 40 \cdot 8 > 200$.

6.) (3 pont) A mátrix rangja az a maximális k érték, amelyre még található $k \times k$-as nem-szinguláris részmátrix. Mivel a sorok száma 3, $k \leq 3$ – vizsgáljuk ezért meg a 3×3-as aldeterminánsokat (részmátrixok determinánsait)! Ha ezek között található nem-nulla determináns, akkor a mátrix rangja 3 (és ha nem található, akkor a rang legfeljebb 2 lehet).

Az első, a második és mondjuk a harmadik oszlopból képzett aldetermináns most $\begin{vmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 1 & -2 & 4 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix}$, amit a második oszlop szerint kifejtve $(-2) \cdot \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = (-2)(6-2) = -8 \neq 0$ érték adódik, tehát $r(Q) = 3$.

7.) (4 pont) Felhasználva, hogy alsó háromszög mátrix sajátértékei a főátlóban lévő elemek egyszerűen adódik, hogy az A mátrix sajátértékei $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$ és $\lambda_3 = \lambda_4 = -2$.

A 2 sajátértékhez tartozó sajátvektorokat az $(A - 2I)\mathbf{x} = 0$ homogén lineáris egyenletrendszerből kapjuk, melynek együttható mátrixa $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & -4 \end{bmatrix}$. Gauss-Jordan eliminációval oldjuk meg az egyenletrendszert: $\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & -4 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & -4 \end{bmatrix} \Leftrightarrow$ $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, amiből $x_1 = x_3 = 0$ és $x_2 = -2x_4$ adódik, így a sajátvektorok $t \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ alakúak.

A -2 sajátértékhez tartozó sajátvektorok az $(A + 2I)\mathbf{y} = 0$ homogén lineáris egyenletrendszerből számolhatóak. Ennek együtthatómátrixa $\begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow$ $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, amiből $y_1 = y_2 = y_3 = 0$ és y_4 tetszőleges: a sajátvektorok $\mathbf{y} = s \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ alakúak.

Az A mátrixnak csak két lineárisan független sajátvektora van, így nem diagonalizálható.

8.) (7 pont) Jelöljék a képtérben a koordinátákat (u, v, w), azaz legyen $u(x, y, z) := \cos(x + z), v(x, y, z) := xy + zx^2, w(x, y, z) := y^2 + e^x$ és $F(x, y, z) = (u, v, w)$: ekkor a $G(u, v, w) = (x, y, z)$ inverz függvényt keressük a $\mathbf{q} := (0, 0, 2)$ pont környezetében.

Az $F \in C^1$ függvény mindenképpen invertálható differenciálható módon, ha a legjobb lineáris közelítése invertálható, azaz ha a derivált-mátrixa nem-szinguláris. A derivált most

$$DF(\mathbf{p}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x}(\mathbf{p}) & \frac{\partial u}{\partial y}(\mathbf{p}) & \frac{\partial u}{\partial z}(\mathbf{p}) \\ \frac{\partial v}{\partial x}(\mathbf{p}) & \frac{\partial v}{\partial y}(\mathbf{p}) & \frac{\partial v}{\partial z}(\mathbf{p}) \\ \frac{\partial w}{\partial x}(\mathbf{p}) & \frac{\partial w}{\partial y}(\mathbf{p}) & \frac{\partial w}{\partial z}(\mathbf{p}) \end{bmatrix} = \left. \begin{bmatrix} -\sin(x+z) & 0 & -\sin(x+z) \\ y + 2xz & x & x^2 \\ e^x & 2y & 0 \end{bmatrix} \right|_{\mathbf{p}} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Ennek a derivált-mátrixnak a determinánsa -2, tehát nem-nulla, így a derivált-mátrix nemszinguláris, invertálható. Az előadáson tanultak értelmében ekkor az inverz lesz a G függvény deriváltmátrixa a $\mathbf{q}$ pontban: $DG(\mathbf{q}) = DF(\mathbf{p})^{-1}$.

8.) m.o. folytatása: Számítsuk tehát ki Gauss-Jordan eliminációval az inverz mátrixot:

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 & | & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & | & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & | & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} S_1 \leftrightarrow S_2 \\ \Leftrightarrow \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & | & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & | & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} S_2 + S_1, S_3 - S_1 \\ \Leftrightarrow \end{matrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & | & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & | & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} S_2 \leftrightarrow S_3 \\ \Leftrightarrow \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & | & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & | & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} (1/2)S_2, (-1)S_3 \\ \Leftrightarrow \end{matrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & | & 0 & -1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & | & -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \text{azaz} \quad DF(\mathbf{p})^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1/2 & 1/2 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

és az inverz lokálisan legjobb lineáris közelítése a $\Delta\mathbf{u} := (u, v, w)^T - \mathbf{q}$ jelöléssel

$$G(u, v, w) \approx L(u, v, w) := G(\mathbf{q}) + DG(\mathbf{q}) \cdot \Delta\mathbf{u} = \mathbf{p} + \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1/2 & 1/2 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u \\ v \\ w-2 \end{bmatrix}.$$

Tehát a l.j.l.k. egyenlete

$$L(u, v, w) = (0, 1, \pi/2) + (v, -v/2 + w/2 - 1, -u - v) = (v, -v/2 + w/2, \pi/2 - u - v).$$

9.) (5 pont) Nyilvánvalóan $\mathcal{D}_\psi = \{(x, y) \ : \ x > 0\}$ nyílt félsík, és itt ψ akárhányszor diferenciálható is. A függvény pl. rögzített $x = 1$ értékek mellett is $y \to \infty$ esetén végtelenhez tart, tehát globálisan nincsen véges maximuma, az értékkészlet kiterjed $+\infty$-ig és a függvény supremuma $\sup_{\mathcal{D}_\psi} \psi = +\infty$.

Meg lehet gondolni, hogy $|(x, y)| \to \infty$ vagy $(x, y) \to (0, y_0) \in \partial\mathcal{D}_\psi$ esetén $\psi(x, y) \to +\infty$, ezért ψ-nek kell legyen (globális) minimuma, m, amire tehát $m = \psi(\mathbf{a})$ és így $\mathcal{R}_\psi = [m, \infty)$.

Mivel $\mathcal{D}_\psi$ határa – az $x = 0$ egyenes, azaz az y koordináta-tengely – nem tartozik az értelmezési tartományhoz (a függvény nyílt halmazon van értelmezve), helyi szélsőértékek is csak a tartomány belsejében lehetnek, ahol ψ C^∞ osztályú, így szélsőérték-helyen kritikus pontjának is kell lennie, azaz $\nabla\psi = \mathbf{0}$.

A szélsőértékhelyek megkereséséhez tehát megkeressük ψ kritikus pontjait. $\nabla\psi = (e^{x-1}\mathrm{ch}\,(y+1) - \frac{1}{x}, e^{x-1}\mathrm{sh}\,(y+1)) = (0, 0)$ miatt a második koordinátából $\mathrm{sh}\,(y+1) = 0$, azaz $y = -1$ és ezt visszahelyettesítve az első koordinátába, $e^{x-1}\mathrm{ch}\,0 - \frac{1}{x} = 0$, tehát $e^{x-1} = 1/x$. Az $x > 0$ félegyenesen az e^{x-1} függvény szigorúan monoton növő, az $1/x$ pedig szigorúan csökkenő, tehát egyetlen metszéspontjuk lesz (másképpen indokolva: az $e^{x-1} - 1/x$ függvény szigorúan növekvő, így egyetlen gyöke lesz): könnyű észrevenni, hogy ez az $x = 1$ értékre lép fel. Tehát egyetlen kritikus pont van, az $\mathbf{a} := (1, -1)$ pont.

A szélsőértékhely létezésének eldöntéséhez a második deriváltat is megvizsgáljuk. A Hesse-mátrix $H = D^{(2)}\psi = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} & \frac{\partial^2\psi}{\partial xy} \\ \frac{\partial^2\psi}{\partial xy} & \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{x-1}\mathrm{ch}\,(y+1) + \frac{1}{x^2} & e^{x-1}\mathrm{sh}\,(y+1) \\ e^{x-1}\mathrm{sh}\,(y+1) & e^{x-1}\mathrm{ch}\,(y+1) \end{bmatrix}$, ahová behelyettesítve az $\mathbf{a}$ pontot, $H(\mathbf{a}) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ adódik. Ez nyilvánvalóan egy pozitív definit mátrix: $H(\mathbf{a}) \gg 0$. Ezért itt lokális minimuma van a ψ függvénynek.

9.) m.o. folytatása: Azt, hogy ez globális minimum is egyben, azt többféleképpen is igazolhatjuk. A fenti meggondolás (arról, hogy a határokon vagy végtelenben a fv. $+\infty$-hez tart) is ezt adja, vagy hivatkozhatunk ψ konvexitására is: ez utóbbi azért áll fenn, mert $\forall(x,y) \in \mathcal{D}_\psi$-re $H \gg 0$: u.i. a főminorokra $h_{1,1} > 0$ és $\det H = (e^{x-1})^2\{\mathrm{ch}^2(y+1) + x^2e^{1-x}\mathrm{ch}(y+1) - \mathrm{sh}^2(y+1)\} = e^{2x-2}\{1 + x^2e^{1-x}\mathrm{ch}(y+1)\} > 0$. Végül, direkt összehasonlítással is látszik, hogy – mivel a ch függvény legkisebb értéke 1 – $\psi(x,y) \geq e^{x-1} - \log x = \gamma(x) \geq \min_{(0,\infty)}(e^{x-1} - \log x) = 1$, mert ennek deriváltja csak $x = 1$-ben tűnik el, és amúgy konvex.

Tehát $\mathcal{R}_\psi = [1, +\infty)$.

10.) (5 pont) Jelölje a felírt differenciált $udx + vdy + wdz$. Az itt szereplő u, v, w függvények folytonosan differenciálhatóak, tehát pontosan akkor van $p(x,y,z)$ potenciálfüggvényük – amire tehát $\nabla p = (u, v, w)$, $dp = udx + vdy + wdz$ áll fönn – ha a keresztbe vett parciális deriváltjaik (azaz p két különböző változó szerinti második parciális deriváltjai) megegyeznek. Ezt a (Young tétel szerinti) feltételt kell ellenőrizzük tehát.

A $w(x,y,z) = 1/z$ harmadik koordinátafüggvény minden más vátozótól független, azaz $\partial w/\partial x = \partial w/\partial y = 0$, és teljesül is, hogy $\partial u/\partial z = 0$ és $\partial v/\partial z = 0$, mert u, v meg nem függ z-től. Végül a harmadik egyenlőség, amit ellenőriznünk kell, $\partial u/\partial y = \partial v/\partial x$. Ezeket kiszámítva, $\partial u/\partial y = 2y\cos(xy^2) - 2xy^3\sin(xy^2)$ és $\partial v/\partial x = 2y\cos(xy^2) - 2xy^3\sin(xy^2)$, ezek is egyenlőek, tehát teljesül a Young-feltétel, és létezik potenciálfüggvény.

A potenciál meghatározásához $\partial p/\partial y = 2xy\cos(xy^2)$ miatt – mivel a cos alatti fv. deriváltja szorzótényezőként szerepel, azaz a kifejezés az y változóban éppen $\cos(\phi(y))\ \phi'(y)$ alakú – azt kapjuk, hogy $p(x,y,z) = \sin(xy^2) + c(x,z)$, ahol c nem függhet y-tól csak x-től és z-től. A harmadik koordinátafüggvényből hasonlóan $p(x,y,z) = \log(z) + d(x,y)$, és e kettő egyenlősége miatt $p(x,y,z) - \sin(xy^2) - \log z$ nem függhet sem y-tól, sem z-től, azaz $p(x,y,z) = \sin(xy^2) + \log z + a(x)$. Végül az első koordinátából $p(x,y,z) = \log x + \sin(xy^2) + A(y,z)$, és e kettő megegyezése alapján $a(x) = \log x - \log z - A(y,z)$, $a(x) - \log x = C$, így $a(x) = \log x + C$ és $p(x,y,z) = \log x + \sin(xy^2) + \log z + C$.

Deriválva valóban ellenőrizhetjük, hogy $dp = udx + vdy + wdz$.

11.) (5 pont) Egy (x,y) pont O-tól vett távolsága $f(x,y) := \sqrt{x^2+y^2}$, ezt kell átlagolnunk azon a G gyűrű-szerű tartományon, amelyet az O közepű 2-sugarú körből az egységkört elvéve kapunk: $G = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ 1 \leq \sqrt{x^2+y^2} \leq 2\}$. Az átlag az $f(x,y)$ függvény integráljának a G tartomány területével vett hányadosa: magának a tartománynak a területét is lehet integrálással számolni, de régóta ismerjük is, hiszen a kör területe πr^2, így $\text{Terület}(G) = 3\pi$.

Direkt integrálással is ki lehet számolni a felmerülő $I := \iint_G f(x,y)\ dxdy$ integrált, de sokkal jobb áttérni polárkoordinátákra: $I = \iint_E \Phi(T(r,\varphi))J_T(r,\varphi)\ drd\varphi$, ahol $T(r,\varphi) = (r\cos\varphi, r\sin\varphi)$ a polárkoordinátás áttérés leképezés, $E = T^{-1}(G)$ a G tartomány megfelelője a polárkoordinátákban, és $J_T(r\varphi) := |\det DT(r,\varphi)|$ az áttérés Jacobi-determinánsa. Ezeket konkrétan beírva $\Phi(T(r,\varphi)) = r$ és $J_T(r,\varphi) = r$, valamint $E = \{(r,\varphi)\ : \ 1 \leq r \leq 2, 0 \leq \varphi \leq 2pi\} = [1,2] \times [0, 2\pi]$ "polár-koordinátás tégla" tartomány.

Fubini tételét alkalmazva tehát $I = \iint_E r^2\ drd\varphi = \int_0^{2\pi}\int_1^2 r^2\ dr\ d\varphi = 2\pi[r^3/3]_1^2 = 14\pi/3$. Így a keresett átlag értéke $A = \dfrac{14\pi/3}{3\pi} = \dfrac{14}{9}$.

12.) (7 pont) Jelölje a pohár folyadékkal töltött belsejét P: ekkor a pohár fala a $z = x^2 + y^2$, $(0 \leq z \leq 9 \Leftrightarrow |(x,y)| \leq 3)$ egyenletekkel írható le, így könnyen látható, hogy $P = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ (0 \leq)|(x,y)| = \sqrt{x^2+y^2} \leq 3, \ x^2+y^2 \leq z \leq 9\}$.

A forgásszimmetria miatt a súlypont (tömegközéppont) a z tengelyen helyezkedik el, mégpedig a $\overline{z} = \frac{M_{xy}}{M}$ magasságban, ahol M a teljes P-ben elhelyezkedő folyadékmennyiség tömege, M_{xy} pedig az xy síkra gyakorolt statikai nyomatéka. Tehát $\overline{z}$ meghatározásához ki kell számítsuk az M össztömeget és az M_{xy} statikai nyomatékot.

Vegyük észre, hogy, bár nehezíti a dolgunkat, hogy változó sűrűségű anyaggal van dolgunk, azért a sűrűségfüggvény igen egyszerű alakú, hiszen csak a magasságtól függ, és konkrétan így írható fel: $\rho(x,y,z) = \rho_0(z) = \begin{cases} 1 & \text{ha } 0 \leq z \leq 4 \\ \alpha = 0,8 & \text{ha } 4 \leq z \leq 9 \end{cases}$.

A feladatot direkt integrálással is meg lehet oldani, de talán elegánsabb és így könnyebb az (r,φ,h) hengerkoordinátákra áttérve dolgozni. Valóban, ha $H(r,\varphi,h) = (x,y,z) = (r\cos\varphi, r\sin\varphi, h)$ az áttérési transzformáció, akkor $Q := H^{-1}(P) = \{(r,\varphi,h) \ : \ 0 \leq r \leq 3, 0 \leq \varphi \leq 2\pi, r^2 \leq h \leq 9\} = \{(r,\varphi,h) \ : \ 0 \leq h \leq 9, 0 \leq \varphi \leq 2\pi, 0 \leq r \leq \sqrt{h}\}$ egyszerű alakú, ráadásul a sűrűségfüggvény is ugyanolyan egyszerű marad, hiszen $\rho(H(r,\varphi,h)) = \rho_0(h)$.

A kiszámítandó mennyiségek tehát hengerkoordinátákra áttérve (és eközben felhasználva, hogy az áttérés Jacobi-determinánsa a jól ismert $J_H(r,\varphi,h) = r$ érték), majd Fubini tételének alkalmazásával szukcesszív integrálásra átalakítva:

$$M = \iiint_P \rho(x,y,z)\ dxdydz = \iiint_Q \rho_0(h)r\ drd\varphi dh = \int_0^9 \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{h}} \rho_0(h)r\ dr\ d\varphi\ dh$$

és

$$M_{xy} = \iiint_P z\rho(x,y,z)dxdydz = \iiint_Q h\rho_0(h)r\ drd\varphi dh = \int_0^9 \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{h}} h\rho_0(h)r\ dr\ d\varphi\ dh.$$

A belső dr és $d\varphi$ szerinti integrálok könnyen kiszámíthatóak, mert sem h, sem $\rho_0(h)$ nem függenek ezektől a változóktól (csak az r Jacobi-determináns értékét kell integrálni, ami φ-ben szintén konstans, de r-ben is igen egyszerű), így tehát

$$M = 2\pi \int_0^9 \rho_0(h)[r^2/2]_0^{\sqrt{h}}\ dh = \pi \int_0^9 \rho_0(h)hdh = \pi \left(\int_0^4 hdh + \int_4^9 0,8hdh \right) = 34\pi$$

és hasonlóan számolva

$$M_{xy} = 2\pi \int_0^9 h\rho_0(h)[r^2/2]_0^{\sqrt{h}}\ dh = \pi \left(\int_0^4 h^2dh + \int_4^9 0,8h^2dh \right) = \pi \left(\frac{64}{3} + \frac{4}{5}\frac{665}{3} \right) = \pi\frac{596}{3},$$

amiből

$$\overline{z} = \frac{M_{xy}}{M} = \frac{\pi\frac{596}{3}}{34\pi} = \frac{298}{51} (\approx 5.843).$$