Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem Gépészmérnöki Kar
Energetika és Mechatronika BSc szakok

Matematika A2H - Első Zh.   Második gyakorló feladatsor

Kiadva: 2016. április 1.

---

1. Numerikus sorok

1.) Konvergensek-e az alábbi sorok?

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[5]{n^8+5n^3}}{\sqrt[3]{n^9+n^2}}$ b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \binom{2n}{n}\frac{1}{3^n}$ c.) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sin\frac{1}{n}}$

2.) Konvergensek-e az alábbi sorok?

a.) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(1+\frac{1}{n})^{n\log n}}$ b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n}{\log(n!)}$ c.(!)) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \binom{2n}{n}\frac{(-1)^n}{2^n}$

3.) Milyen $p>0$ paraméter-értékek esetén lesz konvergens a $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sin\left(\frac{1}{n}\right)}{\log^p n}$ sor?

4*.) Igazoljuk, hogy a $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1+i)^n}{\sqrt{n}\ (\sqrt{2})^n}$ végtelen sor konvergens, és keressünk az $\varepsilon := 0,001$ értékhez alkalmas $N := N(\varepsilon)$ küszöb-indexet, amelyre teljesül, hogy $n \geq N$ esetén az n-edik részletösszegek a sor összegét ε hibán belül megközelítik!

2. Függvénysorok, hatványsorok

5.) Állapítsa meg, hogy a $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{n}\ \frac{1}{x^2+n}$ függvénysor egyenletesen konvergens-e $\mathbb{R}$-en?

6.) Tegyük fel, hogy az $F(z)$ analitikus függvény deriváltjai egy a pontban egyenletesen korlátosak (azaz eleget tesznek az $|F^{(k)}(a)| \leq C$ feltételnek valamilyen C konstanssal). Bizonyítsuk be, hogy ekkor olyan K konstans is létezik, hogy $|F(z)| \leq Ke^{|z|}$ $(\forall z \in \mathbb{C})$.

7.) Tegyük fel, hogy az $f \in C^2(\mathbb{R})$ függvény kielégíti az $f"(x) + af'(x) + b(f(x) = 0$ állandó együtthatós, másodrendű, homogén differenciál-egyenletet. Igazoljuk, hogy ekkor f analítikus függvény, amelynek Maclaurin-sora az egész komplex számsíkon konvergens!

3. Közelítő értékek kiszámolása Taylor-polinomokkal

8.) Számítsuk ki a $\operatorname{tg} x$ függvény 0 pont körül legjobban közelítő ötödfokú polinomját! A polinommal számolva közelítsük $\operatorname{tg} 0,2 = 0,202710036$ értékét, és állapítsuk meg, mekkora a hiba!

9.) Számítsuk ki az $I := \int_0^{\pi^2/9} x^2 \cos\sqrt{x}\ dx$ határozott integrál 3 tizedesjegyre pontos értékét!

10.) Számítsa ki $\operatorname{ch} 0,4$ értékét Maclaurin-sor segítségével 4 tizedes pontossággal!

4. Fourier sor

11.) Milyen kapcsolatot tükröz a g függvény a_n, b_n és a γ függvény α_n, β_n Fourier-együtthatói között az, ha $g(-x) = -\gamma(x)$? Igazoljuk is állításunkat! Mit mond a talált összefüggés páratlan függvényekre?

12.) Értelmezzük a H függvényt úgy, hogy $H(x) := |x|$ ha $-\pi \le x \le \pi$, és H 2π-vel periodikusan van kiterjesztve $\mathbb{R}$-re.

a) Fejtsük Fourier-sorba a H függvényt, és igazoljuk, hogy a Fourier-sora egyenletesen konvergens $\mathbb{R}$-en!

b) Felhasználva, hogy konvergens Fourier-sor csak magához a sorba fejtett függvényhez konvergálhat, határozzuk meg $H(\pi)$ értékéből a páratlan számok reciprokainak négyzetösszegét, azaz a $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2}$ értéket!

13.) Egy $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvényt *aperiodikusnak* neveznek, ha $f(x+\pi) \equiv -f(x)$. Lássuk be, hogy egy aperiodikus és Riemann-integrálható f függvény Fourier-sorában a páros indexekhez tartozó együtthatók 0-k (azaz csak csupa páratlan multiplicitású cos és sin lép fel).

5. Lineáris algebra

14.) Számítsa ki $\mathbb{R}^6$-ban az $\mathbf{x} := \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 2 \\ -1 \\ -3 \\ 2 \end{bmatrix}$ és $\mathbf{y} := \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \\ +4 \\ -5 \\ 2 \end{bmatrix}$ vektorok szögét!

15.) Milyen szöget zárnak be egymással a három dimenziós térben egy kocka egy csúcsból induló lapátlói? Mekkora a két, azonos csúcsból induló lapátló három végpontja (az egy közös és két különböző lapátló-végpont) által alkotott háromszög területe? És hányszorosa a három lapátló által kifeszített parallelepipedon térfogata a kockáénak?

16.) Számítsuk ki az $\mathbf{a} := \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix}$ és a $\mathbf{b} := \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix}$ vektorok $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ vektoriális szorzatát!

Milyen $z \in \mathbb{R}$ paraméter-érték mellett lesz a két vektor és a $\mathbf{z} := \begin{bmatrix} 3 \\ -5 \\ z \end{bmatrix}$ vektor által kifeszített parallelepipedon térfogata 1?

17.) Milyen messze van a $P := (4,3,1)$, $Q := (7,1,3)$ és $R := (6,1,2)$ pontok síkjától a $Z := (-2,-2,0)$ pont?

18.) Oldjuk meg az alábbi lineáris egyenletrendszert!

$$\begin{aligned} 3x \qquad\; + z + 2w &= 8 \\ x \qquad + 2z - w &= 1 \\ x - 2y - z + 2w &= 8 \\ x + y - 2z + 3w &= 3 \end{aligned}$$

Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem Gépészmérnöki Kar
Energetika és Mechatronika BSc szakok

Matematika A2H - I. Zh. — Második gyakorló feladatsor

Eredmények, megoldások, útmutatások egyes feladatokhoz Kiadva: 2016. április 1.

1.) a.) Az összehasonlító kritériumot alkalmazhatjuk a $b_n := n^{8/5-3} = n^{-7/5}$ tagú sorral: mivel $\lim_{n\to\infty} a_n/b_n = 1$, $a_n, b_n \geq 0$, ezek ekvikonvergensek. Márpedig a p-harminikus sorok minden $p > 1$-re, így $p = 7/5$re is konvergensek. Tehát a sor konvergál.

b.) Divergens, mert az egymást követő tagok hányadosainak értéke 4/3 határértéket ad.

c.) Divergens: még a tagok abszolút értékei sem tartanak 0-hoz (sőt: végtelenhez tartnak, mert a nevező 0-hoz tart).

2.) a.) Mivel $(1+1/n)^n \nearrow e$, azért $(1+1/n)^n < e$, így a nevező kisebb, mint $e^{\log n} = n$, tehát a harmonikus sor tagjai kisebbek és a minoráns kritérium értelmében a sor divergens.

b.) A sort szétválasztjuk a valós és képzetes részeire: ezek vagy mindketten konvergálnak, vagy a sor divergens lesz. A valós részek is és a képzetes részek is csak bizonyos tagokból fognak állni (a páratlan indexű tagok valós része, a páros indexűek képzetes része 0). Külön-külön a valós részek is és a képzetes részek is Leibniz sort alkotnak, ezért konvergensek, tehát az egész sor is konvergens. (De nem lesz abszolút konvergens, mivel $n! < n^n$, tehát $\log(n!) < n \log n$, és $\sum_n \frac{1}{n \log n}$ az integrál-összehasonlító kritérium értelmében divergál (mert $\int_2^\infty \frac{dt}{t \log t} = \infty$).

c) A sor tagjainak abszolút értékei végtelenhez tartanak, amit legegygszerűbb a hányadosok vizsgálatával megnézni: $|a_{n+1}/a_n| \to 2$. Így hiába váltakozik az előjel, ez a sor nem lehet konvergens.

3.) $p > 1$-re. Ugyanis az integrál-kritérium értelmében $\sum_n \frac{1}{n \log^p n} < \infty$ pontosan $p > 1$-re, és ez utóbbi sor b_n tagjaival a mi sorunk a_n tagjait összehasonlítva $\lim_{n\to\infty} a_n/b_n = \lim_{n\to\infty} \frac{\sin(1/n)}{1/n} = 1$. Ez véges, nem nulla érték, így a sorok vagy mindketten divergensek, vagy mindketten konvergálnak: tehát a sorunk $p > 1$-re fog konvergálni.

4.) A 8-cal osztható indexű részletösszegekre $S_{8m} = \sum_{j=1}^{8} \sum_{k=0}^{m-1} \frac{u^j}{\sqrt{8k+j}} = \sum_{j=1}^{4} u^j \sum_{k=0}^{m-1} \frac{1}{\sqrt{8k+j}} \frac{-1}{\sqrt{8k+4+j}}$, ahol $u := \frac{1+i}{\sqrt{2}} = e^{i\pi/4}$ az első nyolcadik egységgyök. Ezek a részletösszegek konvergálnak, mert minden rögzített j-re egy Leibniz sor részletösszegeit alkotják: itt a $\sum_k \frac{(-1)^\ell}{\sqrt{4\ell+j}}$ Leibniz-sor $2m$-edik részletösszegeit látjuk összeadogatva u^j együtthatókkal.

A négy Leibniz-sor hibabecslése meg az $S_n - S_{8m}$ távolságok miatt a hiba maximum $8/\sqrt{n-4}$ lehet, ha m-et az n-hez legközelebbi egésznek vesszük. Ezért $R_n < \varepsilon$ ha $n - 4 > 64/\varepsilon^2$. Tehát minden $N_0 > 64/\varepsilon^2 + 4$ alkalmas, ami persze $N_0 > 64.000.004$, elég nagy, de véges érték.

5.) Igen, egyenletesen, sőt normálisan is konvergens. A számtani-mértani közép közti egyenlőtlenség miatt u.i. $2|x|\sqrt{n} \leq x^2 + n$, tehát a sor tagjainak abszolút értékei felülről becsülhetőek $|x/n| \frac{1}{2|x|\sqrt{n}}$-nel, azaz $n^{-3/2}$ p-harmonikus sorral, $p = 3/2$-re, amelyre a p-harmonikus sor (an integrálkritérium értelmében) konvergens.

6.) Megoldás: Legyen F hatványsorba fejtése az a pont körül $F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z-a)^k$.

Ekkor a feltevés szerint $|F(z)| \leq \sum_{k=0}^{\infty} |a_k(z-a)^k| = \sum_{k=0}^{\infty} |\frac{|f^{(k)}(a)|}{k!}|z-a|^k \leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{C}{k!}|z-a|^k$. Vegyük észre, hogy ez a végtelen sor éppen $= Ce^{|z-a|} \leq Ce^{|z|+|a|} = Ke^{|z|}$, ahol $K := Ce^{|a|}$.

7.) Megoldás: A feltétel szerint $f"(x) = -af'(x) - bf(x)$. Itt tehát a jobb oldali függvény még folytonosan differenciálható, ezért a bal oldal is – azaz $f \in C^3(\mathbb{R})$, és $f^{(3)} = -af" - bf'$. És így tovább, a jobb oldal mindig folytonosan differenciálható, tehát a bal oldal is: az egyenletet k-szor deriválva $f^{(k+2))}(x) = -af^{(k+1)}(x) - bf^{(k)}(x)$, és lépésről lépésre (azaz teljes indukcióval) látjuk, hogy f akárhányszor is differenciálható, $f \in C^{\infty}(\mathbb{R})$.

Speciálisan a k-adik lépésben $f^{(k+2))}(0) = -af^{(k+1)}(0) - bf^{(k)}(0)$, amiből $|f^{(k+2)}(0)| \leq |a||f^{(k+1)}(0)| + |b||f^{(k)}(0)| \leq (|a|+|b|)\max_{j=0,\ldots,k+1} |f^{(j)}(0)|$. Ezért indukcióval kapjuk, hogy $|f^{(n)}(0)| \leq (|a|+|b|)^{n-2}K$, ahol $K := \max(|f(0)|, |f'(0)|)$.

Ebből a Taylor-formula Lagrange-féle hibatagja alapján adódik, hogy minden $|x| \leq r$ értékre $|f(x) - T_n(x)| \leq \dfrac{K(|a|+|b|)^{n-1}}{(n+1)!} r^{n+1}$ és ez $\to 0$, ha $n \to \infty$, mert $n!$ minden A alappal vett A^n n-edik hatványnál gyorsabban tart a végtelenbe. Így tehát a Maclaurin-sor előállítja f-et bármilyen r sugarú környezetben, azaz f analítikus. Természetesen ha a konvergencia-sugár $R = \infty$, akkor ugyanez a Maclaurin-sor az egész $\mathbb{C}$-ben is konvergens, és ott is analítikus függvényt állít elő.

Jegyezzük meg, hogy a komplex változóra kiterjesztett $f(z)$ függvény ugyanúgy megoldása a kezdetben felírt differenciál-egyenletnek, mint ahogyan valósban. Ugyanis az egyenletet $F(x) := f"(x) + af'(x) + bf(x) = 0$ alakban írva, most az $F(z)$ analítikus függvényről azt tudjuk, hogy $F|_{\mathbb{R}} \equiv 0$ – és erről már többször láttuk, hogy maga után vonja, hogy $F(z) \equiv 0$ $(\forall z \in \mathbb{C})$ (pl. mert F Taylor-együtthatói azonosan nullák lesznek).

8.) Megoldás: A l.j.k. n-edfokú polinom a függvény Maclaurin-sorának megfelelő fokú részlet-összege, $T_n(x)$. Mivel a $\operatorname{tg} x$ függvény páratlan, így T_5-ben csak az x, x^3 és az x^5 hatványok lépnek fel: ha a Maclaurin sor $\operatorname{tg} x = \sum_{2m+1}^{\infty} a_{2m+1}x^{2m+1}$, akkor $T_5(x) = a_1x + a_3x^3 + a_5x^5$.

A $\operatorname{tg} x$ függvényben a konstans tag persze 0, a legelső nem-nulla együttható nyilván $\operatorname{tg}'(0) = \frac{1}{\cos^2 0} = 1$, tehát $a_1 = 1$. Elvileg ugyan ismerjük a Taylor-féle együttható formulákat – $a_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!}$ – de a $\operatorname{tg} x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$ hányadosfüggvényre azért elég bonyolult ezek további kiszámolása az ötödik deriválásig. Ezért inkább az együttható-egyeztetés módszerét alkalmazzuk, és a $\sin x = \cos x \cdot \operatorname{tg} x$ Cauchy-szorzással számoljuk ki a keresett együtthatókat. A Cauchy-szorzásnál u.i. elegendő lesz a legfeljebb ötödfokú tagokra figyelni, mert csak azokat kell a keresett eredménybe konkrétan beszámítani. A Cauchy-szorzást kiírva tehát $\left(x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 + \ldots\right) = \left(1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + \ldots\right) \cdot \left(x + a_3x^3 + a_5x^5 + \ldots\right)$.

Ebből az együtthatókat egyeztetve $-\frac{1}{6} = -\frac{1}{2} + a_3$ és $\frac{1}{120} = \frac{1}{24} - \frac{1}{2}a_3 + a_5$, amit rendre megoldva előbb $a_3 = \frac{1}{3}$, majd ezt behelyettesítve végül $a_5 = \frac{2}{15}$.

A keresett l.j.k. ötödfokú polnom tehát $T_5(x) = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5$. Ennek értéke a keresett helyen $T_5(0,2) = 0,2 + 0,008/3 + 2^7/3 \cdot 10^{-6} = 0,2 + \frac{1}{3} \cdot 0,008128 = 0,2 + 337 \cdot 10^{-6} = 0,2027093\ldots$.

A hiba tehát $\operatorname{tg} 0,2 - T_5(0,2) \approx 0,202710036 - 0,2027093 = 0,0000007$, meggyőzően kicsi.

9.) Megoldás: Lehet persze helyettesíteni $t = \sqrt{x}$-et és eljutni egy $\int t^5 \cos t \; dt$ alakú integrálra, de ennek további kiszámítása ötszörös parciális integrálást feltételez, és ezért nem túlságosan vonzó. Ehelyett megpróbáljuk $\cos x$ hatványsorát közvetlenül alkalmazni, és a hatványsor integrálásával elvégezni a feladatot.

A cos ismert hatványsora páros hatványokat tartalmaz csak, ezért a hatványsorban x helyében a $\sqrt{x}$ helyettesítés után kezelhető, egész hatványok maradnak a képletben: $\int x^2 \cos\sqrt{x} \; dx = \int x^2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^k \; dx = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} \int x^{k+2} \; dx = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} \left[\frac{x^{k+3}}{k+3}\right]$, tehát a határozott integrálra térve $I = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!(k+3)} \left(\frac{\pi}{3}\right)^{2k+6}$. Ez egy alternáló sor, látszik, hogy az abszolútértékek monoton csökkennek, így érvényes a Leibniz-féle hibabecslés is: $|I - T_n| < a_{n+1}$. Itt vehetjük az $n = 2$ értéket is már, mivel $a_3 = \frac{1}{6!\cdot 6}\left(\frac{\pi}{3}\right)^{12} < 5 \cdot 10^{-4}$ is teljesül. Hogy ezt igazoljuk, alkalmazzuk azt, hogy $\pi < 3,15$, tehát $\pi/3 < 1,05 = 21/20$, és írjuk fel, hogy $a_3 < \frac{1}{6!\cdot 6}\left(\frac{21}{20}\right)^{12} = \frac{21^{12}20^{-12}}{3^3 2^4 10} = \frac{3^9\ 7^{12}}{2^{16}10^{13}} = \frac{81\cdot 243\cdot 49^6\cdot 2^6}{2^{22}10^{13}} < \frac{20.000\cdot 100^6}{4\cdot 1024^2\cdot 10^{13}} < \frac{2\cdot 10^{16}}{4\cdot 10^{19}} = 5\cdot 10^{-4}$. Tehát $I \approx \sum_{k=0}^{2} \frac{(-1)^k}{(2k)!(k+3)}\left(\frac{\pi}{3}\right)^{2k+6} = \frac{1}{3}\left(\frac{\pi}{3}\right)^6 - \frac{1}{8}\left(\frac{\pi}{3}\right)^8 + \frac{1}{120}\left(\frac{\pi}{3}\right)^{10} \approx 0,272$ /számológéppel :)/.

10.) Megoldás: $\operatorname{ch} x = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(2m)!} x^{2m}$, és az n. Taylor-polinom közelítésének hibáját a Lagrange-féle maradéktagból becsülve $|R_{2n+1}(x)| = |\operatorname{ch} x - T_{2n+1}(x)| < \frac{\operatorname{ch}\xi}{(2n+2)!} x^{2n+2}$.

Durva becslésssel is látható, hogy $\operatorname{ch}\xi \le \operatorname{ch} 0,4 < \frac{1}{2}(e^{0,4}+1) < \frac{1}{2}(4^{0,5}+1) = 3/2$.

Ezért $x = 0,4$-re az előírt hibához megfelel $n = 2$ is már: u.i. $|R_{2n+1}(0,4)| = |R_5(0,4)| < \frac{3/2}{6!} 0,4^6 = \frac{3\cdot 4^6}{2\cdot 6!} 10^{-6} = \frac{2^8}{3} 10^{-7} < 10^{-5}$ is teljesül.

Tehát $\operatorname{ch} 0,4 \approx T_5(0,49) = 1 + \frac{1}{2} 0,4^2 + \frac{1}{4!} 0,4^4 = 1,08 + 0,0032/3 \approx 1,08107 \approx 1,0811$. (Géppel számított érték: 1,081072372.)

11.) Megoldás: A $t := -x$ helyettesítéssel és az integrálási végpontok visszacserélését is tekintetbe véve, $\alpha_n = \int_{-\pi}^{\pi} -g(-x)\cos kx \; dx = -\int_{-\pi}^{\pi} g(t)\cos(k(-t)) \; dt = -\int_{-\pi}^{\pi} g(t)\cos kt \; dt = -a_n$, azaz $a_n = -\alpha_n$ minden cosinuszos együtthatóra. A sin együtthatók hasonló okból épp fordítva kapcsolódnak: $b_n = \beta_n$.

Páratlan egy függvény pontosan akkor, ha $g = \gamma$ mellett fennáll ez az összefüggés. Ez azt jelenti, hogy $a_n = -\alpha_n = -a_n$ és $b_n = \beta_n$, tehát $2a_n = 0$, és g Fourier-sora tiszta sin sor.

12.) Megoldás: a) A függvény páros, ezért sora tiszta cos sor, (a sin-os együtthatók 0-k). A konstans együttható $a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |x| \; dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} x \; dx = \frac{1}{\pi}[x^2/2]_0^{\pi} = \frac{\pi}{2}$.

Általában $n \ge 1$-re $a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |x|\cos nx \; dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\cos nx \; dx = \frac{2}{\pi}\left\{[x\frac{\sin nx}{n}]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \frac{\sin nx}{n} \; dx\right\} = \frac{2}{\pi}\left\{0 + [\frac{\cos nx}{n^2}]_0^{\pi}\right\} = \frac{2}{\pi n^2}[(-1)^n - 1] = -\frac{4}{\pi n^2}$, ha $n = 2k+1$ páratlan, és $= 0$, ha $n = 2k$ páros.

Tehát H Fourier-sora $\dfrac{\pi}{2} - \dfrac{4}{\pi}\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\cos((2k+1)x)}{(2k+1)^2}$. A majoráns-kritérium értelmében ez normálisan, ezért egyenletesen és abszolút konvergens, mert $\sum_n \frac{1}{n^2} < \infty$. Viszont tudjuk, hogy ha a Fourier-sor konvergens, akkor a fv. folytonossági pontjaiban a függvényértékekhez tart: tehát H-t elő is állítja a Fourier-sorfejtése.

b.) Ezért $\pi = H(\pi) = \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{4}{\pi}\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\cos((2k+1)\pi)}{(2k+1)^2}$, tehát az eredmény $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$.

13.) Megoldás: Először is, persze $f(x+2\pi) = -f(x+\pi) = f(x)$, tehát f azért 2π-vel periodikus, és, mivel integrálható is, így a Fourier-sora kiszámítható. Ha most egy páros indexről van szó, akkor pl. $a_{2n} = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(2nx)dx$, és a $[-\pi, 0]$ szakaszt eltolva (azaz $t := x+\pi$ helyettesítést alkalmazva) ezért $\pi a_{2n} = \int_{-\pi}^{0} f(x)\cos(2nx)dx + \int_0^{\pi} f(x)\cos(2nx)dx = \int_{-\pi}^{0} -f(x+\pi))\cos(2nx)dx + \int_0^{\pi} f(x)\cos(2nx)dx = -\int_0^{\pi} f(t)\cos(2nt - 2n\pi)\ dt + \int_0^{\pi} f(x)\cos(2nx)dx = -\int_0^{\pi} f(t)\cos(2nt)\ dt + \int_0^{\pi} f(x)\cos(2nx)dx = 0$. Hasonlóan számolhatunk a $\sin(2nx)$ alakú integrálokkal is.

14.) Megoldás: A vektoraink skalárszorzata $6+4+6-4+15+4 = 31$, az egyes vektorok hossza saját magukkal vett skalárszorzatukból $\sqrt{31}$ és $\sqrt{62}$, tehát a szögre $\cos\alpha = \frac{31}{\sqrt{31}\cdot\sqrt{62}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$, és ezért $\alpha = \pi/4$.

15.) Megoldás: A kocka egyik csúcsában felvett origóval, éleinek irányában felvett koordináta-tengelyekkel, és a oldalhosszúsággal a kocka csúcsai azok az (x, y, z) pontok, amelyekre x, y, z értrékei 0 vagy a. A lapátlók hossza $\sqrt{2}a$, két lapátló által kifeszített háromszög egyenlő oldalú (mert a két, egy csúcsból induló lapátló másik végpontjai között is egy $\sqrt{2}a$ hosszúságú lapátló húzódik), de akár skaláris szorzatból is látszik, hogy a lapátlók szögének koszinusza $1/2$. Tehát a szögük $\pi/3$. A háromszög területe fele a kifeszített parallelogramma területének, amit leggyorsabban a két kifeszítő lapátló vektor vektoriális szorzatából kaphatunk meg:

$$T(\triangle) = \frac{1}{2}T(\text{Parallelogramma}) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a & 0 & a \\ 0 & a & a \end{vmatrix} = -a^2\mathbf{i} - a^2\ \mathbf{j} + a^2\mathbf{k}, \quad T(\triangle) = \frac{\sqrt{3}}{2}a^2;$$

persze a szabályos háromszögre ismert elemi geometriai ismereteinkből is láthatjuk ezt az értéket. A nevezett P parallelepipedon térfogata a három kifeszítő vektor vegyes szorzata, amihez a fenti vektoriális szorzatot kell még skalárisan megszorzzuk a $a\mathbf{i} + a\mathbf{j} + 0\mathbf{k}$ harmadik lapátlóval: többféle úton is számolhatunk, a lényeg, hogy az eredmény

$$V(P) = (a\mathbf{i} + a\mathbf{j} + 0\mathbf{k})(a\mathbf{i} + 0\mathbf{j} + a\mathbf{k})(0\mathbf{i} + a\mathbf{j} + a\mathbf{k}) = \begin{vmatrix} a & a & 0 \\ a & 0 & a \\ 0 & a & a \end{vmatrix} = -2a^3,$$

tehát $V(P)$ a kocka térfogatának kétszerese (előjelesen itt -2-szerese, mert a lapátlókat véletlenül éppen balsodrás szerinti sorrendben adtuk meg).

16.) Megoldás: a) $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 3 & -2 & 2 \\ 2 & -2 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & 2 \\ -2 & 3 \end{vmatrix}\mathbf{i} - \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}\mathbf{j} + \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -2 \end{vmatrix}\mathbf{k} = -2\mathbf{i} - 5\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$.

b) Ezt skalárisan szorozva a $\mathbf{z}$ vektorral, $1 = V(P) = -6 + 25 - 2z$, azaz $z = 9$ adódik.

17.) Megoldás: Akeresett sík egy normélvektora pl.

$$\mathbf{n} := \overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR} = (\overrightarrow{Q} - \overrightarrow{P}) \times (\overrightarrow{R} - \overrightarrow{P}) = (3, -2, 2) \times (2, -2, 1) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 3 & -2 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 2\mathbf{i} + 1\mathbf{j} - 2\mathbf{k}.$$

Ez tehát merőleges a mondjuk a P síkbeli pontból az általános $X := (x, y, z)$ síkbeli pontba mutató vektorra, azaz $\overrightarrow{PX}\cdot\mathbf{n} = 0$, tehát $2(x-4)+(y-3)-2(z-1) = 0$, vagyis $2x+y-2z = 13$. Behelyettesítve Z-t a baloldali egyenletbe, -6 adódik: tehát $\overrightarrow{PZ}\cdot\mathbf{n} = \overrightarrow{Z}\cdot\mathbf{n} - \overrightarrow{P}\cdot\mathbf{n} = 6-13 = -7$. A távolság tehát negatív, a vektorok megadott sorrendje balsodrású: értéke pedig $|\mathbf{n}|$ értékével normálva $h = -7/|\mathbf{n}| = -7/\sqrt{\mathbf{n}\cdot\mathbf{n}} = -7/\sqrt{9} = -7/3$.

18.) Megoldás: Vegyük észre, hogy ez az egyenletrendszer ugyanaz, mint az előző feladatsorban a vektorok lineáris kombinációjára vonatkozóan felírt probléma egyenletrendszere, annyi eltéréssel, hogy a jobb oldalon más b_i konstansok - més előállítandó $\mathbf{b}$ vektor – van megadva. Az egyenletrendszer bővített mátrixa is majdnem ugyanaz, csak az utolsó oszlop más:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 3 & 0 & 1 & 2 & 8 \\ 1 & 0 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & -1 & 2 & 8 \\ 1 & 1 & -2 & 3 & 3 \end{array}\right].$$

Az $S_1 \leftrightarrow S_2$ csere után $S_2 - 3S_1$, $S_3 - S_1, S_4 - S_1$ lépésekkel kinullázzuk az első oszlop együtthatóit (a megmaradó legelső kivételével persze) egyúttal alkalmazzuk a $\frac{-1}{5}S_3$ beszorzást is:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 2 & 8 \\ 1 & -2 & -1 & 2 & 8 \\ 1 & 1 & -2 & 3 & 3 \end{array}\right] \Leftrightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -5 & 5 & 5 \\ 1 & -2 & -3 & 3 & 7 \\ 1 & 1 & -4 & 4 & 2 \end{array}\right] \Leftrightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & -3 & 3 & 7 \\ 0 & 1 & -4 & 4 & 2 \end{array}\right]$$

majd az $S_2 \leftrightarrow S_4$ sorcsere után az új vezér-elemet a 2. sor 2. oszlopában kijelölve, azzal nullázunk ki alatta mindent az $S_3 + 2S_2$ lépéssel: azután az $S_3 \leftrightarrow S_4$ cserét és az $S_4 + 11S_3$ műveletet alkalmazzuk:

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -4 & 4 & 2 \\ 0 & -2 & -3 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right] \Leftrightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -4 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & -11 & 11 & 11 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right] \Leftrightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -4 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Az utolsó S_4 egyenlet az azonosan 0 egyenlet, tehát ezt el lehet hagyni; amúgy a mátrixunk máris lépcsős, sőt normált (a vezérelemek helyén csupa 1) alakban van, tehát a Gauss-eliminációt elvégeztük. Innen azt kapjuk, hogy az eredeti rendszerrel ekvivalens a következő:

$$\begin{aligned} x \quad + 2z - w &= 1 \\ y - 4z + 4w &= 2 \\ z - w &= -1 \end{aligned} \qquad \text{azaz} \qquad \begin{aligned} x \quad + 2z &= 1 + w \\ y - 4z &= 2 - 4w \\ z &= -1 + w \end{aligned}$$

egyenletrendszer. Itt a w változó értékét az egyenletrendszer nem köti meg, szabadon választható, tehát ha csak *egyetlen megoldásra* vagyunk kíváncsiak, szabadon behelyettesíthetünk egy tetszőlegesen megválasztott értéket, amit csak akarunk; ha pedig *minden megoldást* nyomon szeretnénk követni, akkor úgy kell tekintsük ezt az érték-megadási lehetőséget, mint egy szabad paramétert: $w = r$, $r \in \mathbb{R}$ tetszőleges.

Így számolva tovább, alulról felfejthető az egyenlet teljes megoldás-rendszere: $z = -1 + r$, $y = 4z + 2 - 4w = 4(-1+r) + 2 - 4r = -2$, $x = -2z + 1 + w = -2(-1+r) + 1 + r = 3 - r$, ahol $r \in \mathbb{R}$ tetszőleges. (**HF.**: Mit jelent a kapott megoldás az oszlopmodellben?)

Gyorsabb azonban, ha a Gauss-Jordan eliminációt, azaz a *redukált* lépcsős formát is kiszámoljuk inkább: ehhez sor-műveleteket (a 2. oszlopban eleve 0-t találván a vezérelem felett), csak a 3. oszlopban kell végezzünk. Tehát $S_2 + 4S_3$ és $S_1 - 2S_3$ révén

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right]$$

Innen tehát azonnal leolvasható, hogy $x = 3 - r$, $y = -2$, $z = -1 + r$, mint fentebb.