Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem Gépészmérnöki Kar
Energetika és Mechatronika BSc szakok

Matematika A2H - Első Zh. A csoport / feladatsor

Dátum: 2016. április 6. Munkaidő: 45 perc

Hallgató Neptun kódja és neve: Gyakorlatvezető: .

1.) (3 pont) Konvergens-e a $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+5}{\sqrt[3]{n^7+n^2}}$ numerikus sor? Igazolja a válaszát!

2.) (2 pont) a) Mit jelent az, hogy a $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ függvénysor *normálisan konvergens* egy H halmazon?

b) Mondja ki Weierstrass tételét normálisan konvergens függvénysorokra!

3.) (4 pont) a) Számítsa ki $\sqrt{0,98}$ értékének egy jó közelítését a $g(x) := \sqrt{1+x}$ függvény 0 körüli legjobb 3-adfokú polinom közelítésével!

b) Határozza meg ebből a $\sqrt{2}$ egy jó közelítését! Mennyi a hiba, ha a (majdnem) pontos érték $\sqrt{2} = 1,414213562$? (Útmutatás: $\sqrt{2} = \frac{10}{7}\sqrt{0,98}$.)

4.) (5 pont) Legyen $0 < a < \pi$ adott paraméter. Tekintsük azt az $\alpha := \alpha_a(x)$ függvényt, amelyet úgy definiálunk, hogy $\alpha(x) := 1$ ha $|x| < a$, $\alpha(\pm a) = 1/2$, és $\alpha(x) = 0$ ha $a < |x| \le \pi$, valamint α 2π-vel periodikus.

a) Fejtsük Fourier-sorba az α függvényt!

b) Állapítsuk meg, hogy a Fourier-sora konvergens-e, és hová tart $\mathbb{R}$-en!

c) A 0 pontbeli konvergenciából olvassuk le a megfelelő végtelen sor értékét. Mit kapunk, ha pl. $a = \pi/2$?

5.) (2 pont) Számítsa ki $\mathbb{R}^7$-ben a $\mathbf{p} := \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -3 \\ 0 \\ -5 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}$ és $\mathbf{q} := \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \\ -3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ vektorok szögét!

6.) (4 pont) Keressük meg az összes olyan lineáris kombinációt, amellyel $\mathbb{R}^4$-ben a $\mathbf{p} := \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{q} := \begin{bmatrix} -2 \\ -6 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}$, $\mathbf{r} := \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}$ és az $\mathbf{s} := \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ -3 \\ 2 \end{bmatrix}$ vektorokból előáll a $\mathbf{b} := \begin{bmatrix} -1 \\ 5 \\ -3 \\ 3 \end{bmatrix}$ vektor.

Az alábbi értékelési táblázatot a gyakorlatvezető tölti ki!

1.feladat	2. feladat	3.feladat	4.feladat	5.feladat	6.feladat	Összesen

Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem Gépészmérnöki Kar
Energetika és Mechatronika BSc szakok

Matematika A2H - Első Zh. B csoport / feladatsor

Dátum: 2016. április 6. Munkaidő: 45 perc

Hallgató Neptun kódja és neve: Gyakorlatvezető: .

1.) (2 pont) Konvergens-e a $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \sin\frac{1}{n}}{\sqrt{\log n}}$ numerikus sor? Igazolja a válaszát!

2.) (3 pont) a.) Mit jelent az, hogy a $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} a_k (z-a)^k$ hatványsor konvergenciasugara R?

b.) Fogalmazza meg a Cauchy–Hadamard-tételt hatványsorok konvergenciasugarára vonatkozólag!

3.) (4 pont) Határozza meg $e^{-0,3}$ értékét négy tizedesjegyre pontosan!

4.) (5 pont) Értelmezzük a G függvényt úgy, hogy $G(x) := x$ ha $-\pi < x < \pi$, $G(k\pi) = 0$ $(k \in \mathbb{Z})$, és G 2π-vel periodikusan van kiterjesztve $\mathbb{R}$-re.

a) Fejtsük Fourier-sorba a G függvényt!

b) Állapítsuk meg, hogy a Fourier-sora konvergens-e, és hová tart $\mathbb{R}$-en!

c) Határozzuk meg $G(\pi/2)$ értékéből a $\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{2m+1}$ alternáló sor értékét!

5.) (2 pont) Számítsa ki $\mathbb{R}^6$-ban az $\mathbf{x} := \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \\ -2 \\ -4 \\ 1 \end{bmatrix}$ és $\mathbf{y} := \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \\ 6 \\ -1 \end{bmatrix}$ vektorok szögét!

6.) (4 pont) Keressük meg az összes olyan lineáris kombinációt, amellyel $\mathbb{R}^4$-ben a $\mathbf{b} := \begin{bmatrix} 4 \\ -3 \\ 7 \\ 5 \end{bmatrix}$ vektort az $\mathbf{u} := \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$, $\mathbf{v} := \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 4 \\ 4 \end{bmatrix}$, $\mathbf{w} := \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$ és a $\mathbf{z} := \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}$ vektorok lineáris kombinációjaként állíthatjuk elő!

Az alábbi értékelési táblázatot a gyakorlatvezető tölti ki!

1.feladat	2. feladat	3.feladat	4.feladat	5.feladat	6.feladat	Összesen

Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem Gépészmérnöki Kar
Energetika és Mechatronika BSc szakok

Matematika A2H - Első Zh. C csoport / feladatsor

Dátum: 2016. április 6. Munkaidő: 45 perc

Hallgató Neptun kódja és neve: Gyakorlatvezető: .

1.) (2 pont) Konvergens-e a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{n!^3}$ numerikus sor? Igazolja a válaszát!

2.) (5 pont) Azt mondjuk, hogy egy akárhányszor differenciálható függvény *ciklikus deriváltú* függvény, ha létezik olyan $k \in \mathbb{N}$ egész, hogy $f^{(k)}(x) \equiv f(x)$. (Gondoljunk pl. a $\cos x$ fv.-re, amelyre $k = 4$, vagy az e^x függvényre, amire $k = 1$.)

Igazoljuk, hogy ha f ciklikus deriváltú függvény, akkor f Maclaurin sora minden korlátos, zárt $I := [-a, a]$ intervallumon egyenletesen konvergál!

(Megjegyzés: Azt nem kell most bebizonyítani, hogy a hatványsor ténylegesen magához az f *függvényhez konvergál*, csak magát a konvergencia *tényét.*)

3.) (4 pont) Számítsa ki $\ln(1,3)$ értékét az $\ln(1-x)$ függvény Maclaurin sorának segítségével 2 tizedes pontossággal!

4.) (3 pont) Tegyük fel, hogy egy $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény nemcsak 2π-vel, de π-vel is periodikus. Lássuk be, hogy ha u Riemann-integrálható is, akkor az u függvény Fourier-sorában a páratlan indexű együtthatók eltűnnek.

5.) (2 pont) Számítsa ki $\mathbb{R}^6$-ban az $\mathbf{x} := \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ és $\mathbf{y} := \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \\ -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ vektorok szögét!

6.) (4 pont) Keressük meg az összes olyan lineáris kombinációt, amellyel $\mathbb{R}^4$-ben a $\mathbf{b} := \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}$ vektort az $\mathbf{u} := \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{v} := \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{w} := \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 5 \\ 2 \end{bmatrix}$ és a $\mathbf{z} := \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ vektorok lineáris kombinációjaként állíthatjuk elő.

Az alábbi értékelési táblázatot a gyakorlatvezető tölti ki!

1.feladat	2. feladat	3.feladat	4.feladat	5.feladat	6.feladat	Összesen

Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem Gépészmérnöki Kar

Energetika és Mechatronika BSc szakok

Matematika A2H - Első Zh. D csoport / feladatsor

Dátum: 2016. április 6. Munkaidő: 45 perc

Hallgató Neptun kódja és neve: Gyakorlatvezető: .

1.) (2 pont) Milyen $p > 0$ paraméterértékek esetén lesz konvergens a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sqrt{n}\,\mathrm{tg}\left(\frac{1}{n^p}\right)$ numerikus sor? Indokolja meg a válaszát!

2.) (4 pont) Igazoljuk, hogy tetszőleges *komplex* értékekre is fennáll a valósból jól ismert $2\sin z\cos z = \sin(2z)$ azonosság! (Az azonosság érvényességét *valós* értékekre fel lehet használni.)

3.) (4 pont) Számítsuk ki az $I := \int_0^1 x^2 \cos\sqrt{x}\; dx$ határozott integrál 3 tizedesjegyre pontos értékét!

4.) (4 pont) a.) Milyen kapcsolatot tükröz az f függvény a_n, b_n és a ϕ függvény α_n, β_n Fourier-együtthatói között az, ha $f(-x) = \phi(x)$?

b.) Mit mond a talált összefüggés páros függvényekre?

5.) (2 pont) Számítsa ki $\mathbb{R}^5$-ben az $\mathbf{a} := \begin{bmatrix} 1 \\ 6 \\ -3 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$ és $\mathbf{b} := \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$ vektorok szögét!

6.) (4 pont) Keressük meg az összes olyan lineáris kombinációt, amellyel $\mathbb{R}^4$-ben a $\mathbf{b} := \begin{bmatrix} 0 \\ -5 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$ vektort az $\mathbf{u} := \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{v} := \begin{bmatrix} -1 \\ -3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$, $\mathbf{w} := \begin{bmatrix} -1 \\ 7 \\ -1 \\ -4 \end{bmatrix}$ és a $\mathbf{z} := \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix}$ vektorok lineáris kombinációjaként állíthatjuk elő.

Az alábbi értékelési táblázatot a gyakorlatvezető tölti ki!

1.feladat	2. feladat	3.feladat	4.feladat	5.feladat	6.feladat	Összesen

Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem Gépészmérnöki Kar

Energetika és Mechatronika BSc szakok

Matematika A2H - I. Zh. — Megoldások — A csoport

1.) (3 pont) Nem. A $\sum_n n^{-p}$ p-harmonikus sor u.i. $p \leq 1$-re divergens (pl. az integrálkritérium szerint, avagy minoránskritériummal és a harmonikus sor divergenciája miatt), és az $a_n := \dfrac{n^2+5}{\sqrt[3]{n^7+n^2}} = \dfrac{n^2(1+5n^{-2})}{n^{7/3}\sqrt[3]{1+n^{-5}}} = n^{-1/3}\dfrac{1+5n^{-2}}{\sqrt[3]{1+n^{-5}}}$, $b_n := n^{-1/3}$ tagokra $a_n/b_n = (1+5n^{-2})/\sqrt[3]{1+n^{-5}} \to 1$; ezért *az összehasonlító kritérium alkalmazásával* $\sum_n a_n < \infty \Leftrightarrow \sum_n b_n < \infty$, $\sum_n a_n = \infty \Leftrightarrow \sum_n b_n = \infty$, és itt most $\sum_n b_n = \sum_n n^{-1/3} = \infty$ áll fenn.

2.) (2 pont) a.) $\sum_n f_n$ normálisan konvergens H-n, ha létezik olyan (abszolút) *konvergens* (nem-negatív tagú) numerikus sor, $\sum_n a_n$, hogy $\forall x \in H$ $|f_n(x)| \leq a_n$. (Mivel a_n egy abszolútértéket majorál, ebben benne van, hogy $a_n \geq 0$ - ezért a normális konvergencia definíciójában el lehet hagyni ezt a kikötést.)

b.) Weierstrass tétele: Ha $\sum_n f_n$ normálisan konvergens a H halmazon, akkor ugyanott abszolút és egyenletesen is konvergens.

3.) (4 pont) a) $\sqrt{0,98} = \sqrt{1-0,02}$. Az ismert binomiális sort felírva az $x = 0,02$ helyen adódik $\sqrt{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty}\binom{1/2}{n}x^n$. Ennek harmadik részletösszege a legjobb 3-adfokú közelítés, amelyet persze megkaphatunk a Taylor-polinom együtthatóit deriválásokkal közvetlenül kiszámolva is. Behelyettesítve az $x = -0,02$ értéket, kapjuk, hogy $\sqrt{0,98} \approx T_3(-0,02) = 1-0,01+\binom{1/2}{2}0,02^2 - \binom{1/2}{3}0,02^3$, azaz $\sqrt{0,98} \approx 0,99 - 0,00005 - 0,0000005 = 0,9899495$.

b) $\sqrt{2} = \frac{10}{7}\sqrt{(\frac{7}{10})^2 2} = \frac{10}{7}\sqrt{0,98} \approx \frac{10}{7}\cdot 0,9899495 = 9,899495 : 7 = 1,414213571\ldots$, a hiba $\approx (1,414213562 - 1,414213571 =) - 0,000000009$.

4.) (5 pont) a) Az α fv. páros, így sin-os tagjai nem lesznek, $a_0 = \frac{a}{\pi}$ és $a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-a}^{a}\cos nx\, dx = \frac{1}{\pi}[\frac{\sin nx}{n}]_{-a}^{a} = \frac{2\sin(na)}{\pi n}$. Tehát α Fourier-sora $\dfrac{a}{\pi} + \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\sin(na)}{\pi n}\cos nx$.

b) Mivel a fv. szakaszonként folytonosan differenciálható, Fourier-sora tanult tétel értelmében konvergens, mégpedig a bal- és jobboldali határértékek számtani közepéhez, így esetünkben magához az α függvényhez.

c) $1 = \alpha(0) = \frac{a}{\pi} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\sin(na)}{\pi n}\cos 0$ azaz $\frac{\pi - a}{2} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(na)}{n}$; ha $a = \pi/2$, akkor a páros $n = 2m$ indexekre $\sin(2m\frac{\pi}{2}) = \sin m\pi = 0$, maradnak a páratlan tagok, és $\frac{\pi}{4} = \sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{2m+1}$.

5.) (2 pont) A vektorok szögére $\cos\angle(\mathbf{p},\mathbf{q}) = \dfrac{\mathbf{p}\cdot\mathbf{q}}{|\mathbf{p}|\,|\mathbf{q}|} = \dfrac{\mathbf{p}\cdot\mathbf{q}}{\sqrt{\mathbf{p}\cdot\mathbf{p}}\,\sqrt{\mathbf{q}\cdot\mathbf{q}}}$. Innen számolva

$$\cos\angle(\mathbf{p},\mathbf{q}) = \frac{1+6+0+0+(-5)(-3)+0+8}{\sqrt{1+9+9+0+25+0+16}\,\sqrt{1+4+0+1+9+1+4}} = \frac{30}{\sqrt{60}\,\sqrt{20}} = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

tehát $\angle(\mathbf{p},\mathbf{q}) = \pi/6$.

6.) (4 pont) Az $x_1\mathbf{p} + x_2\mathbf{q} + x_3\mathbf{r} + x_4\mathbf{s} = \mathbf{b}$ egyenlet egy lineáris egyenletrendszerre vezet, aminek kibővített mátrixa

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 3 & -2 & -1 \\ 3 & -6 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 3 & -3 & -3 \\ 1 & -2 & -1 & 2 & 3 \end{array}\right]$$

A bal felső sarokban 1-es van, így azt választjuk első vezérelemnek. Az $S_2 - 3S_1$, $S_4 - S_1$ sor-műveletekkel kinullázzuk az első oszlop együtthatóit (a megmaradó legelső kivételével persze), majd észrevéve az egyszerűsítési lehetőséget, $\frac{-1}{8}S_2$ beszorzást alkalmazunk, végül a 3. és 4. sorokat teljesen kinullázzuk az $S_3 - 3S_2$ és $S_4 + 4S_2$ sorműveletekkel:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 3 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & -8 & 8 & 8 \\ 0 & 0 & 3 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & -4 & 4 & 4 \end{array}\right] \Leftrightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 3 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & -4 & 4 & 4 \end{array}\right] \Leftrightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 3 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

A csupa nulla 3. és 4. sorokat elhagyva, már lépcsős elrendezésben (sőt: normált lépcsős elrendezésben) van a rendszer, ahonnan visszafejtéssel is meg lehet azt oldani.

De ha még tovább számolunk, akkor $S_1 - 3S_2$ után kapjuk, hogy az egyenletrendszer ekvivalens az $\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right]$ egyenletrendszerrel, ami már a *redukált* lépcsős forma.

Innen leolvasható, hogy x_2 és x_4 nincsen megkötve, szabadon megválaszthatóak, míg $x_1 = 2 + 2x_2 - x_4$ és $x_3 = -1 + x_4$. Legyenek mondjuk $x_2 = \alpha$, $x_4 = \beta$ ($\alpha, \beta \in \mathbb{R}$), akkor $x_1 = 1 + 2\alpha - \beta$ és $x_3 = -1 + \beta$, a teljes megoldásvektor tehát $\mathbf{x} = [1 + 2\alpha - \beta, \alpha, -1 + \beta, \beta]^T$.

Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem Gépészmérnöki Kar

Energetika és Mechatronika BSc szakok

Matematika A2H - I. Zh. — Megoldások — B csoport

1.) (2 pont) A sor tagjainak abszolút értékei monoton csökkenőleg tartanak 0-hoz, mert $1/n$ és vele $\sin(1/n) \searrow 0$ monoton csökkenőleg, és a nevezőben is $\sqrt{\log n} \nearrow \infty$. Ugyanakkor a sor tagjainak előjele váltakozik, így ez egy alternáló (Leibniz típusú) sor, ezért konvergens. (Egyébként NEM abszolút konvergens.)

2.) (3 pont) a) A konvergenciasugár értéke $R \in [0, \infty]$, ha minden z-re, amelyre $|z-a| > R$, a sor divergens, és minden z-re, amelyre $|z-a| < R$, a sor konvergens. (Egyébként lokálisan egyenletesen és abszolút is, azaz minden $r < R$ mellett abszolút egyenletesen az egész $|z-a| \leq r$-ben.)

b) Cauchy-Hadamard tétel: Ha létezik $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} \to L$, akkor a konvergenciasugár $R = 1/L$ (hatványsor konvergenciasugara $R = 1/\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$, ha ez a határérték létezik).

3.) (4 pont) $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$, ami a negatív $x = -0,3$ behelyettesítése mellett egy Leibniz típusú sor lesz, így a hibatagra $|e^{-0,3} - T_n(-0,3)| < \frac{0,3^{n+1}}{(n+1)!} = \frac{3^{n+1}}{(n+1)!}10^{-n-1}$.

Becsülhetjük a hibát a Taylor-formula Lagrange-féle maradéktagjával is: $|R_n| = \frac{e^\xi}{(n+1)!}|x|^{n+1}$. Vegyük észre, hogy $-0,3 < \xi < 0$ miatt $\xi \leq 0$, így $e^\xi \leq 1$. Ezért $|R_n| \leq \frac{0,3^{n+1}}{(n+1)!}$, mint fentebb.

Ahhoz, hogy ez $\frac{1}{2}10^{-4}$ alatt legyen, elegendő, ha $n = 4$-et tekintünk: ekkor u.i. már $\frac{3^5}{120}10^{-5} = \frac{81}{4}10^{-6} < 5 \cdot 10^{-5}$.

Tehát $e^{-0,3} \approx 1 - 0,3 + 0,09/2 - 0,027/6 + 0,0081/24 = 0,745 - 0,009/2 + 0,0027/8 = 0,7405 + 0,000337 \cdots \approx 0,7408$. (A gép 0,740818221 értéket adott.)

4.) (5 pont) a) Mivel G páratlan függvény, Fourier-sora tiszta sin sor. Az együtthatókat kiszámítva $b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x \sin kx \; dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x \sin kx \; dx = \frac{2}{\pi}\left\{[x\frac{-\cos kx}{k}]_0^\pi + \int_0^\pi \frac{\cos kx}{k} \; dx\right\} = \frac{2}{\pi}\left\{\pi\frac{(-1)^{k+1}}{k} + [\frac{\sin kx}{k^2}]_0^\pi\right\} = 2\frac{(-1)^{k+1}}{k}$. Tehát G Fourier-sora $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} 2\frac{(-1)^{k+1}}{k}\sin(kx)$.

b) Előadáson tanult tétel értelmében a szakaszonként folytonosan differenciálható G függvény Fourier-sora $(2n+1)\pi$-ben (a szakadási helyeken) $\frac{1}{2}(G((2n+1)\pi + 0) + G((2n+1)\pi - 0) = 0$-hoz, másutt (ahol G folytonos), eleve a függvényhez konvergál (még ha nem is abszolút vagy egyenletesen konvergens).

c) $G(\pi/2) = \pi/2 = \sum_{k=1}^{\infty} 2\frac{(-1)^{k+1}}{k}\sin(k\pi/2) = 2\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{2m+1}\sin\left((2m+1)\frac{\pi}{2}\right) = 2\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{2m+1}$. (A páros $k = 2m$-hez tartozó tagok $\sin(m\pi) = 0$ miatt kiesnek.) Ezért $\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{2m+1} = \pi/4$.

5.) (2 pont) A vektorok szögére $\cos\angle(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \dfrac{\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}}{|\mathbf{x}|\;|\mathbf{y}|} = \dfrac{\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}}{\sqrt{\mathbf{x}\cdot\mathbf{x}}\;\sqrt{\mathbf{y}\cdot\mathbf{y}}}$. Innen számolva $\cos\angle(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = \dfrac{-6+0+8+0-24-1}{\sqrt{9+0+16+4+16+1}\;\sqrt{4+1+4+0+36+1}} = \dfrac{-23}{\sqrt{46}\;\sqrt{46}} = \dfrac{-23}{46} = \dfrac{-1}{2}$, tehát $\angle(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 2\pi/3$, illetve, ha a kisebbik ($[0, \pi]$-beli) szögüket nézzük, akkor $\angle(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \pi/3$.

6.) (4 pont) Az $x_1\mathbf{u} + x_2\mathbf{v} + x_3\mathbf{w} + x_4\mathbf{z} = \mathbf{b}$ egyenlet egy lineáris egyenletrendszerre vezet, aminek kibővített mátrixa

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 & | & 4 \\ -1 & -2 & -1 & -2 & | & -3 \\ 2 & 4 & 3 & 3 & | & 7 \\ 2 & 4 & 1 & 5 & | & 5 \end{bmatrix}$$

A bal felső sarokban 1-es van, így azt választjuk első vezérelemnek. Az S_2+S_1, S_3-2S_1, S_4-2S_1 sorműveletekkel kinullázzuk az első oszlop együtthatóit (persze a vezérelem kivételével), majd — mivel az első sor alatt a 2. oszlopban nincsen további nem-nulla elem – a 2. sor 3. elemét választva vezérelemnek, az S_3+S_2 és S_4+3S_2 sorműveletekkel folytatjuk a kinullázást:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 & | & 4 \\ -1 & -2 & -1 & -2 & | & -3 \\ 2 & 4 & 3 & 3 & | & 7 \\ 2 & 4 & 1 & 5 & | & 5 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 & | & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & | & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & | & -1 \\ 0 & 0 & -3 & 3 & | & -3 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 & | & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & | & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix}$$

A csupa nulla 3. és 4. sorokat elhagyva, már lépcsős elrendezésben (sőt: normált lépcsős elrendezésben) van a rendszer, ahonnan visszafejtéssel is meg lehet azt oldani.

De ha még tovább számolunk, akkor $S_1 - 2S_2$ után kapjuk, hogy az egyenletrendszer ekvivalens az $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 & | & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & | & 1 \end{bmatrix}$ egyenletrendszerrel, ami már a *redukált* lépcsős forma.

Innen leolvasható, hogy x_2 és x_4 nincsen megkötve, szabadon megválaszthatóak, míg $x_1 = 2 - 2x_2 - 3x_4$ és $x_3 = 1 + x_4$. Legyenek mondjuk $x_2 = \xi$, $x_4 = \eta$ $(\xi, \eta \in \mathbb{R})$, akkor $x_1 = 2 - 2\xi - 3\eta$ és $x_3 = 1 + \eta$, a teljes megoldásvektor tehát $\mathbf{x} = [2 - 2\xi - 3\eta, \xi, 1 + \eta, \eta]^T$.

Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem Gépészmérnöki Kar

Energetika és Mechatronika BSc szakok

Matematika A2H - I. Zh. — Megoldások — C csoport

1.) (2 pont) Az egymást követő tagok hányadosára $a_{n+1}/a_n = \frac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)^3} \to 0$, így *a hányados-kritérium értelmében* a sor (abszolút) konvergens.

2.) (5 pont) Ha f ciklikus deriváltú függvény, akkor persze a feltétel szerint $f \in C^\infty(\mathbb{R})$, akárhányszor differenciálható, és tetszőleges $n = mk + j$ $(j = 0, 1, \ldots, k-1)$ esetén $f^{(n)}(x) = f^{(j)}(x)$, ahol j az n k-val való osztási maradéka. Tehát mindenesetre $f^{(n)}(x) \in \{f^{(j)}(x) \ : \ j = 0, 1, \ldots, k-1\}$ egy véges halmazból vett valamelyik értékkel egyenlő, és így $|f^{(n)}(x)| \le \max\left(|f(x)|, |f'(x)|, \ldots, |f^{(k-1)}(x)|\right)$ minden $n \in \mathbb{N}$-re és $x \in \mathbb{R}$-re. Speciálisan, $|f^{(n)}(0)| \le C := \max\left(|f(0)|, |f'(0)|, \ldots, |f^{(k-1)}(0)|\right)$, minden $n \in \mathbb{N}$-re.

Ezért a Maclaurin sor a_n együtthatói is egyenletesen megbecsülhetőek, így I-n a $\sum_n \frac{C}{n!}a^n = Ce^a < \infty$ konvergens numerikus sor *majorálja* a függvény $\sum_n \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$ Maclaurin sorát, tehát az *normálisan* – és így *Weierstarss tétele értelmében* abszolút és egyenletesen is – konvergens.

Megjegyzés: Azt nem kellett igazolni, de az is igaz, hogy a Maclaurin sor az f függvényhez konvergál. (Aki esetleg ezt is igazolta, + 2-3 pontot érdemel!) Ennek bizonyítása az alábbi.

A $g(x) := \max\left(|f(x)|, |f'(x)|, \ldots, |f^{(k-1)}(x)|\right)$ függvény k darab — tehát véges sok ! – *folytonos* függvény maximuma, ezért *maga is folytonos* x-ben, és így a korlátos, zárt $I := [-a, a]$ intervallumon *korlátos is* (A1 !) valamilyen K konstanssal. Tehát a ciklikus deriváltú f függvényre $|f^{(n)}(x)| \le K$ $(\forall n \in \mathbb{N})$ az I-n (egyenletesen, azaz $\forall x \in I$-re !).

(Azt sem nehéz látni, mi lesz a legjobb korlát: ha $C_0 = \max_I |f(x)|$, $C_1 := \max_I |f'(x)|$ stb. $C_{k-1} := \max_I |f^{(k-1)}(x)|$, akkor $K = \max(C_0, C_1, \ldots, C_{k-1})$.)

Az, hogy a Maclaurin sor részletösszegeire $T_n \rightrightarrows f$, az az $R_n(x) = f(x) - T_n(x)$ maradéktag Lagrange-féle alakjából következik, mert valamilyen ξ-vel 0 és x között, tehát mindenesetre $\xi \in I$-vel, $R_n(x) = f^{(n+1)}(\xi)x^{n+1}/(n+1)!$ azaz $|R_n(x)| \le Ka^{n+1}/(n+1)!$, ami 0-hoz tart, mivel ez egy konvergens sor (t.i. a $K \cdot e^a$ Maclaurin-sora) $n+1$-edik eleme.

3.) (4 pont) $\ln(1-x) = -\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n}x^n$ a kérdéses Maclaurin-sor. $x = -0,3$ behelyettesítésével egy Leibniz típusú sort kapunk, amelynek hibájára érvényes az $|S - S_n| \le a_{n+1}$ hibabecslési formula. Így azt kell megkeressük, hogy milyen n-re teljesül már a $\dfrac{0,3^{n+1}}{n+1} < 0,005$ hibakorlát? Ez $n = 3$-ra teljesül is, mivel $0,3^4/4 < 0,005 \Leftrightarrow 81 \cdot 10^{-4} < 0,02 \Leftrightarrow 81 < 200$, ami igaz. Tehát 2 tizedesjegyre pontos értéket ad az $\ln(1,3) \approx 0,3 - \frac{1}{2}0,3^2 + 0,3^3/3 = 0,3 - 0,045 + 0,009 = 0,264 \approx 0,26$ közelítő érték.

4.) (3 pont) Pl. $b_{2n+1} = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} u(x)\sin((2n+1)x)dx$, és a $[-\pi, 0]$ szakaszt $[0, \pi]$-be eltolva (azaz a $t := x + \pi$ helyettesítéssel) ezért $\pi b_{2n+1} = \int_{-\pi}^0 u(x+\pi)\sin((2n+1)x)dx + \int_0^\pi u(x)\sin((2n+1)x)dx = \int_0^\pi u(t)\sin((2n+1)(t-\pi))\ dt + \int_0^\pi u(x)\sin((2n+1)x)dx = -\int_0^\pi u(t)\sin((2n+1)t)dt + \int_0^\pi u(x)\sin((2n+1)x)dx = 0$.

Hasonlóan számolhatunk a $\cos((2n+1)x)$ alakú integrálokkal is.

5.) (2 pont) A vektorok skalárszorzata $\mathbf{x}\cdot\mathbf{y} = 1+0+4+0+4+1 = 10$, hossza $|\mathbf{x}| = \sqrt{\mathbf{x}\cdot\mathbf{x}} = \sqrt{10}$ és $|\mathbf{y}| = \sqrt{\mathbf{y}\cdot\mathbf{y}} = \sqrt{1+9+4+1+4+1} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$. Ezért a vektorok szögére $\cos\angle(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \dfrac{\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}}{|\mathbf{x}|\,|\mathbf{y}|} = \dfrac{10}{\sqrt{10}\,2\sqrt{5}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$, és így $\angle(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \pi/4$.

6.) (4 pont) A keresett lineáris kombináció együtthatóira, mint ismeretlenekre felírva az $x_1\mathbf{u} + x_2\mathbf{v} + x_3\mathbf{w} + x_4\mathbf{z} = \mathbf{b}$ lineáris egyenletrendszert, majd ennek a bővített együtthatómátrixát, a következőt kapjuk:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 3 & 1 & 3 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & -2 \\ 3 & 1 & 5 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & 2 & 1 & 1 \end{array}\right].$$

A legjobb, ha a vezérelem éppen 1, ezért legelőször is elvégezzük az $S_1 \leftrightarrow S_4$ sorcserét, majd az így kapott mátrixban már az első oszlop első elmét választjuk vezérelemnek, és ezzel kinullázzuk az első oszlopban szereplő további együtthatókat az $S_2 + S_1$, $S_3 - 3S_1$, $S_4 - 2S_1$ sorműveletekkel:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & -2 \\ 3 & 1 & 5 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 1 & 3 \end{array}\right] \Leftrightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right].$$

Folytatva, itt a második sorra $(-1)S_2$ után kapunk a második sor második oszlopában újabb $+1$ vezérelemet, és ezzel $S_3 - S_2$ illetve $S_4 - S_2$ révén nullázhatjuk ki az alatta levő együtthatókat: mivel azonosan nulla sorokat elhagyhatunk, végül töröljük a keletkező $S_3 \equiv 0$ és $S_4 \equiv 0$ sorokat:

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right] \Leftrightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Leftrightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right]$$

Ez már *redukált lépcsős formában* levő mátrix, amelyből leolvasható a megoldás: x_3 és x_4 nincsen megkötve, szabadon megválaszthatóak, míg $x_1 = 1 - 2x_3 - x_4$ és $x_2 = 1 + x_3 + x_4$. Legyenek mondjuk $x_3 = s$, $x_4 = t$ $(s, t \in \mathbb{R})$: akkor $x_1 = 1 - 2s - t$ és $x_2 = 1 + s + t$.

Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem Gépészmérnöki Kar

Energetika és Mechatronika BSc szakok

Matematika A2H - I. Zh. — Megoldások — D csoport

1.) (2 pont) $p > 3/2$ értékekre. U.i. ha $a_n := \sqrt{n}\mathrm{tg}\ (1/n^p)$ és $b_n = \sqrt{n}(1/n^p) = n^{1/2-p}$, akkor $a_n/b_n \to 1$, és így ekvikonvergensek (az összehasonlító kritérium értelmében); márpedig $\sum_{n=1}^{\infty} n^{1/2-p} < \infty$ pontosan akkor, ha $1/2 - p < -1$, tehát ha $p > 3/2$.

2.) (4 pont) Legyen $f(z) := \sin(2z) - 2\sin z\cos z$. Ez egy, az egész komplex síkon analitikus függvény, amelynek a Maclaurin-sora konvergens az egész síkon (konvergencia-sugara ∞), mert ilyen függvények Cauchy-szorzata és összege is ilyen. Továbbá, $f|_{\mathbb{R}} \equiv 0$, a valós értékekre ismert azonosság értelmében. Tehát $f(0) = 0$, $f'(0) = 0, \ldots, f^{(k)}(0) = 0, \ldots$ és így f Taylor-Maclaurin sora azonosan nulla. Tehát $f \equiv 0$ az egész $\mathbb{C}$-n, azaz teljesül az állított azonosság.

3.) (4 pont) Hatványsor integrálásával végezzük el a feladatot. A cos függvény páros, ismert hatványsora csak páros hatványokat tartalmaz, ezért a hatványsorban x helyébe a $\sqrt{x}$-et helyettesítve is egész hatványok maradnak a képletben:
$\int x^2 \cos\sqrt{x}\ dx = \int x^2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^k\ dx = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} \int x^{k+2}\ dx = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} \left[\frac{x^{k+3}}{k+3}\right]$, tehát a határozott integrálra térve $I = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!(k+3)}[1^{k+3} - 0^{k+3}] = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!(k+3)}$.

Ez egy alternáló sor, látszik, hogy az abszolútértékek monoton csökkennek, így érvényes a Leibniz-féle hibabecslés is: $|I - T_n| < a_{n+1}$. Itt vehetjük az $n = 2$ értéket is már, mivel $a_3 = \frac{1}{6!\cdot 6} = \frac{1}{6\cdot 720} = \frac{1}{4320} < \frac{1}{2}10^{-3}$.

Tehát $I \approx \sum_{k=0}^{2} \frac{(-1)^k}{(2k)!(k+3)} = \frac{1}{3} - \frac{1}{8} + \frac{1}{120} = \frac{13}{60} \approx 0,21666\cdots \approx 0,217$ a három tizedesre számított közelítő érték.

4.) (4 pont) a.) A $t := -x$ helyettesítéssel és az integrálási végpontok visszacserélését is tekintetbe véve, $\int_{-\pi}^{\pi} f(-x)\cos kx\ dx = \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos(k(-t))\ dt = \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos kt\ dt$, azaz $a_n = \alpha_n$ minden cosinuszos együtthatóra.
A sin együtthatók hasonló okból épp ellenkező előjelűre változnak: $b_n = -\beta_n$.

b.) Páros egy függvény pontosan akkor, ha $f = \phi$ mellett fennáll ez az összefüggés. Ez azt jelenti, hogy $a_n = \alpha_n = a_n$ (ami azon felül, hogy $f = \phi$, semmi újat nem mond) és $b_n = -\beta_n = -b_n$, tehát $2b_n = 0$, ami viszont azt jelenti, hogy f Fourier-sora tiszta cos sor.

5.) (2 pont) A vektorok skalárszorzata $\mathbb{R}^5$-ben $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = -1 + 12 + 0 + 0 + 4 = 15$, a vektorok hossza $|\mathbf{a}| = \sqrt{\mathbf{a}\cdot\mathbf{a}} = \sqrt{1 + 36 + 9 + 0 + 4} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$ és $|\mathbf{b}| = \sqrt{\mathbf{b}\cdot\mathbf{b}} = \sqrt{1 + 4 + 0 + 9 + 4} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$. A két vektor szögére $\cos\angle(\mathbf{a},\mathbf{b}) = \dfrac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{|\mathbf{a}|\ |\mathbf{b}|} = \frac{15}{5\sqrt{2}\ 3\sqrt{2}} = \dfrac{1}{2}$, tehát a vektorok szöge $\angle(\mathbf{a},\mathbf{b}) = \pi/3$.

6.) (4 pont) Az $x_1\mathbf{u} + x_2\mathbf{v} + x_3\mathbf{w} + x_4\mathbf{z} = \mathbf{b}$ egyenlet egy lineáris egyenletrendszerre vezet, aminek kibővített mátrixa

$$\left[\begin{array}{cccc|c} -2 & -1 & -1 & 5 & 0 \\ -1 & -3 & 7 & 0 & -5 \\ 1 & 1 & -1 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & -4 & -1 & 3 \end{array}\right]$$

A bal felső sarokban nem 1-es van, így inkább a harmadik sor első elemét választjuk első vezérelemnek, és ezért legelőször is elvégezzük az $S_1 \leftrightarrow S_3$ sorcserét, majd az új első sorral nullázzuk ki az első oszlopban található többi együtthatót az $S_2 + S_1$, $S_3 + 2S_1$, $S_4 - S_1$ sorműveletekkel:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & -2 & 1 \\ -1 & -3 & 7 & 0 & -5 \\ -2 & -1 & -1 & 5 & 0 \\ 1 & 2 & -4 & -1 & 3 \end{array}\right] \Leftrightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & 6 & -2 & -4 \\ 0 & 1 & -3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -3 & 1 & 2 \end{array}\right]$$

Innen láthatjuk, hogy az alsó három egyenlet ugyanaz: akár $\frac{-1}{2}S_2$ után, és az új S_2-vel, akár pl. közvetlenül a mondjuk negyedik sorral $S_2 + 2S_4$ és $S_3 - S_4$-gyel, de két sort ki lehet nullázni (és ezért aztán el lehet hagyni). Így adódik is a lépcsős forma:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & 6 & -2 & -4 \\ 0 & 1 & -3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -3 & 1 & 2 \end{array}\right] \Leftrightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & 1 & 2 \end{array}\right] \Leftrightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & -3 & 1 & 2 \end{array}\right],$$

amit az utolsó lépésben az $S_1 - S_2$ sorművelettel hoztunk *redukált* lépcsős formára.

Innen leolvasható, hogy x_3 és x_4 nincsen megkötve, szabadon megválaszthatóak, míg $x_1 = -1 - 2x_3 + 3x_4$ és $x_2 = 2 + 3x_3 - x_4$.

Legyenek mondjuk $x_3 = \sigma$, $x_4 = \tau$ $(\sigma, \tau \in \mathbb{R})$, akkor $x_1 = -1 - 2\sigma + 3\tau$ és $x_2 = 2 + 3\sigma - \tau$, a teljes megoldás-vektor tehát $\mathbf{x} = [-1 - 2\sigma + 3\tau, 2 + 3\sigma - \tau, \sigma, \tau]^T$.