Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem Gépészmérnöki Kar

Energetika és Mechatronika BSc szakok

Matematika A2H - II. Zh. Próba feladatsor

2016. április 26.

1.) Igaz-hamis kérdések: Melyik állítás igaz, melyik nem? (Itt indokoloni nem kell.)

a.) Ha $A \in \mathbb{R}^{3\times 5}$ és $B \in \mathbb{R}^{5\times 3}$ tetszőleges mátrixok, akkor az AB mátrix mindig szinguláris.

b.) Ha egy 4×4-es mátrix minden elemét beszorozzuk 4-gyel, akkor determinánsa a 16-szorosa lesz a beszorzás előttinek.

c.) A valós polinomok $\mathcal{P}$ vektorterében x^2 a $p(x) := x^2 - 4x + 3$, $q(x) := x + 2$ és az $r(x) := 2x^2 + 1$ polinomok lineáris kombinációjaként áll elő.

d.) Tegyük fel, hogy A nemszinguláris, egész elemű mátrix, amelynek az inverzére is teljesül, hogy A^{-1} elemei egész számok. Ekkor a determinánsokra fennáll $|A^T| = |A^{-1}|$!

2.) Tekintsük a $\mathcal{P}_4 = \{\sum_{j=0}^{4} c_j x^j \ : \ c_j \in \mathbb{R}\}$ (legfeljebb negyedfokú polinomok) vektorterét, és ebben a $T : \mathcal{P}_4 \to \mathcal{P}_4$ $p(x) \mapsto p(x) + p(-x)$ leképezést! Határozza meg a leképezés $\operatorname{Ker} T$ magterének dimenzióját!

3.) Legyen $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$! Adjon meg egy olyan Q ortogonális és D diagonális mátrixot, amelyre $B = Q^T D Q$! Határozza meg a B^{50} mátrixot!

4.) Legyenek $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}$ és $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$.

a) Számítsa ki az A^{-1} inverz mátrixot! **b)** Oldja meg az $AX = B$ mátrix-egyenletet!

5.) Hol van szakadása a $\tau(x, y) = (x+y) \arctan\left(\frac{1}{x^3+y^3}\right)$ függvénynek? Megszüntethető-e a szakadás?

6.) Tekintsük a $\psi(x, y) := e^x - (x + y)^2$ függvényt! Határozza meg a függvény összes érintősíkját illetve támaszegyenesét az $(0, 1, 0)$ ponton keresztül!

Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem Gépészmérnöki Kar

Energetika és Mechatronika BSc szakok

Matematika A2H - II. Zh. Próba feladatsor - Megoldások

---

1. a.) HAMIS. (Pl. $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ és $B = A^T$ esetén $AB = I_3$ nem szinguláris.)

1. b.) HAMIS. (*Soronként* 4-*szeres*, 4×4-es esetén összességében $4^4 = 256$-szoros lesz.)

1. c.) IGAZ. (A $\mathcal{P}_2$ altér $1, x, x^2$ bázisában $x^2 = (0,0,1)$, míg $p = (3,-4,1), q = (2,1,0)$, $r = (1,0,2)$ és ezek lineárisan függetlenek, tehát $\dim \mathcal{P}_2 = 3$ miatt akkor bázis is, így generátorrenszert is alkotnak és lineáris kombinációjukként előáll $x^2 = (0,0,1)$ is. Másképpen: az előállítás $x^2 = ap(x) + bq(x) + cr(x)$ (a,b,c) együtthatóira együttható-egyeztetéssel egy olyan lineáris egyenletrendszer adódik, amelynek együttható-mátrixa $A = \begin{bmatrix} 3 & -4 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ nem szinguláris, hiszen $|A| = \begin{vmatrix} 3 & -4 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} \neq \begin{vmatrix} 3 & -4 & -5 \\ 2 & 1 & -4 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{3+1} 1 \begin{vmatrix} -4 & -5 \\ 1 & -4 \end{vmatrix} = 19 \neq 0$, ezért minden előírt vektorra — így a $\mathbf{b} := (0,0,1)$ jobboldalra is — létezik (egyértelmű) megoldás.

1. d.) IGAZ. (U.i. $|A^T| = |A|$ és $|A^{-1}| \cdot |A| = 1$, de ha A, A^{-1} is egész elemű, akkor mindkét determináns egyúttal egész értékű is, tehát a két egész szám vagy mindkettő 1, vagy mindkettő -1, azaz mindenképpen egyenlőek.)

2.) $Tp(x) = \sum_{j=0}^{4} \left(c_j x^j + c_j (-x)^j \right) = 2c_0 + 2c_2 x^2 + 2c_4 x^4$, a páratlan fokú tagok kiesnek. Tehát a magtér elemei a páratlan hatványok lineáris kombinációi: $\mathrm{Ker}\ T = [x, x^3]$, és $\dim \mathrm{Ker}\ T = 2$. (Vagy: a képtérben a páros kitevőjű hatványok lineáris kombinációi vannak, ezt az $1, x^2, x^4$ bázis feszíti ki, tehát $\dim \mathrm{Im}\ T = 3$, és a dimenzió-tétel szerint akkor $\dim \mathrm{Ker}\ T = 5 - 3 = 2$.)

3.) A B mátrix karakterisztikus polinomja: $\begin{vmatrix} \lambda - 1 & 0 & 1 \\ 0 & \lambda - 2 & 0 \\ 1 & 0 & \lambda - 1 \end{vmatrix} = (\lambda - 2) \begin{vmatrix} \lambda - 1 & 1 \\ 1 & \lambda - 1 \end{vmatrix} =$ $\lambda(\lambda - 2)^2 = 0$, és ebből a sajátértékek: $\lambda_1 = 0$ és $\lambda_2 = \lambda_3 = 2$.

A célunk a továbbiákban egy, a B mátrixból sajátvektoraiból álló ortonormált bázis megkeresése. (Mivel a B mátrix szimmetrikus, ezért tudjuk, hogy van ilyen.)

A $\lambda_1 = 0$ sajátértékhez tartozó sajátvektorok a $B\mathbf{v} = 0$ homogén lineáris egyenletrendszer megoldásai. Az együtthatómátrix redukált lépcsős alakja $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, amiből a lényegében egyetlen egységnyi normájú sajátvektor $\mathbf{v} = (1/\sqrt{2}, 0, 1/\sqrt{2})$.

A B mátrix második oszlopa a $\mathbf{w} := \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ vektor képe, amiből $A \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ adódik és így $\mathbf{w}$ egy, a $\lambda_1 = 2$ sajátértékhez tartozó sajátvektor, ami mellesleg megkapható a $(B - 2I)\mathbf{w} = 0$ homogén lineáris egyenletrendszer megoldásaként is.

Mivel tudjuk, hogy szimmetrikus mátrix különböző sajátértékeihez tartozó sajátvektorok ortogonálisak, így a harmadik normált sajátvektor legegyszerűbben vektoriális szorzással számolható: $\mathbf{u} = \mathbf{v} \times \mathbf{w} = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/\sqrt{2} \\ 0 \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$.

Ekkor Q az ortonormált sajátvektorokból álló ortogonális mátrix, D pedig a sajátértékekből álló diagonális mátrix (sorrendre tekintettel!).

$$Q = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & -1/\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}, \qquad D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

A B^{50} mátrix a $B = QDQ^T$ sajátfelbontás alapján számolható:

$$B^{50} = QD^{50}Q^T =$$

$$\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & -1/\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2^{50} & 0 \\ 0 & 0 & 2^{50} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ -1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} =$$

$$2^{50} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}^T + 2^{50} \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} \\ 0 \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} \\ 0 \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 2^{49} & 0 & -2^{49} \\ 0 & 2^{50} & 0 \\ -2^{49} & 0 & 2^{49} \end{pmatrix}.$$

4.) Gauss-Jordan eliminációval $A^{-1} = \begin{bmatrix} 7 & -1 & -1 & -3 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ -5 & 1 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, így $X = A^{-1}B = \begin{bmatrix} 0 & 5 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$.

5.) A $\tau(x, y) = (x+y) \arctan \left(\frac{1}{x^3+y^3} \right)$ függvény mindenütt értelmezett és folytonos, ahol a nevező nem nulla: tehát $\mathcal{D}_\tau = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x, y) \,:\, x^3+y^3 = 0\} = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x, y) \,:\, y = -x\}$. A szakadási pontok tehát az $y = -x$ egyenletű ℓ egyenes pontjai. Legyen most $(a, -a) \in \ell$ tetszőleges szakadási pont, és tegyük fel, hogy $(x, y) \to (a, -a)$ (de $(x, y) \notin \ell$, azaz $(x, y) \in \mathcal{D}_\tau$).

Ekkor $(x+y) \to 0$, miközben $\arctan \left(\frac{1}{x^3+y^3} \right)$ értelmezve van, és *korlátos* is, mert az arctan függvény minden valós pontban $-\pi/2$ és $\pi/2$ között van. Tehát

$$\lim_{(x,y)\to(a,-a),\ (x,y)\in\mathcal{D}_\tau} (x + y) \arctan \left(\frac{1}{x^3 + y^3} \right) = 0,$$

mert "$0 \cdot$ korlátos" típusú. Ha tehát az ℓ egyenesen azonosan 0-nak értelmezzük a függvényt, akkor a kiterjesztés folytonos — azaz a τ függvény szakadása megszüntethető.

6.) A függvény parciális deriváltjai folytonosak $\mathbb{R}^2$-ben, tehát (tanult tétel szerint) a függvény mindenütt folytonosan differenciálható is. Így van érintősíkja, és az a parciális deriváltak segítségével írható fel: a $(0, 1, 0)$ pontban *az érintősík egyenlete* $z = 0 + \frac{\partial \psi}{\partial x}(0, 1)x + \frac{\partial \psi}{\partial y}(0, 1)(y - 1) = -x - 2(y - 1)$ azaz $z(x, y) = 2 - x - 2y$ (vagy más alakban $x + 2y + z = 2$).

Mivel van érintősík, a függvénynek legfeljebb is csak egyetlen támaszsíkja lehet, ami ebben az esetben maga az érintősík: csak azt kell ellenőrizzük, hogy a függvény gárfja mindig az érintősík fölött (ekkor az érintősík alsó támaszsík lesz), vagy mindig az érintősík alatt helyezkedik-e el (ekkor az érintősík felső támaszsík), avagy hol felette, hol alatta van (és akkor nem is létezik támaszsík).

Ha megszorítjuk a ψ függvényt arra az ℓ egyenesre, amelyik a $(0,1)$ pontból az (a,b) irányban indul ki, akkor az ℓ egyenes $(at, 1+bt)$ alakú pontjaiban $f(t) := \psi|_\ell(t) = e^{at} - (1+(a+b)t)^2$, az érintősík ℓ-re vonatkozó megszorítása pedig $L(t) = \big(-x-2(y-1)\big)|_\ell(t) = -(a+2b)t$. Speciálisan, ha $a = 1,\ b = -1$, akkor $\psi_\ell(t) = e^t - 1 > t = L(t)$ (mert az e^t érintője alsó támaszegyenes, hiszen e^t konvex), és ha $a = 0,\ b = 1$, akkor $\psi_\ell(t) = 1-(1+t)^2 < -2t = L(t)$ (triviálisan). Mivel tehát a ψ függvény egyes irányokban az érintősík felett, más irányokban az alatt vesz fel értékeket, a $(0,1,0)$ ponton keresztül *nem létezik támaszsík.*

Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem Gépészmérnöki Kar
Energetika és Mechatronika BSc szakok

Matematika A2H – II. Zh. Gyakorló feladatok – 2016. május 4.

1.) Igaz-hamis kérdések: Melyik állítás igaz, melyik nem?

a.) Ha $A \in \mathbb{R}^{3\times 5}$ és $B \in \mathbb{R}^{5\times 3}$ tetszőleges mátrixok, akkor az AB mátrix mindig szinguláris.

b.) Ha egy 4×4-es mátrix minden elemét beszorozzuk 4-gyel, akkor determinánsa a 16-szorosa lesz a beszorzás előttinek.

c.) A valós polinomok $\mathcal{P}$ vektorterében x^2 a $p(x) := x^2 - 4x + 3$, $q(x) := x + 2$ és az $r(x) := 2x^2 + 1$ polinomok lineáris kombinációjaként áll elő.

d.) Tegyük fel, hogy A nemszinguláris, egész elemű mátrix, amelynek az inverzére is teljesül, hogy A^{-1} elemei egész számok. Ekkor a determinánsokra fennáll $|A^T| = |A^{-1}|$!

2.) Legyenek $P := \begin{bmatrix} 1 & 0 & -7 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$ és $Q := \begin{bmatrix} 1 & 0 & -7 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$, és legyen $R := PQ$. Mi a legkisebb abszolútértékű sajátértéke az R mátrixnak?

3.) Tegyük fel, hogy a $\dim V = n$ vektortérben adott az $A = \{\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_k\}$ és a $B = \{\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_m\}$ vektorrendszer. Mit mondhatunk a két rendszer $\#A = k$ és $\#B = m$ elemszámáról, ha tudjuk, hogy

a) $\forall j = 1, \ldots, m$-re $b_j \in [A]$ és B lineárisan független?

b) $[B] = [A]$ és B lineárisan független?

c) B generátor-rendszer és A lineárisan független rendszer?

d) $B \cup A$ lineárisan független vektorrendszert alkot?

e) A is, B is lineárisan függetlenek és $[B] \cap [A] = \emptyset$?

f) A is, B is lineárisan függetlenek, és van olyan $L : V \to V$ lineáris transzformáció, amelyre $LA = \{\mathbf{0}\}$ és $L\mathbf{b}_j = \mathbf{b}_j$ $\forall j = 1, \ldots, m$-re?

4.) Legyenek $A = \begin{bmatrix} 7 & 1 & -5 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ -3 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$ és $B = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -2 \end{bmatrix}$.

a) Számítsa ki az A^{-1} inverz mátrixot! **b)** Oldja meg az $AX = B$ mátrix-egyenletet!

Mego.: $A^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, $X = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -2 \\ 8 & -1 & 1 \\ -1 & -2 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$.

5.) Legyen $M := \begin{bmatrix} 1 & 0 & -7 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$ egy L lineáris transzformáció mátrixa a standard bázisban. Határozzuk meg az $\mathrm{Im}L = R(M)$ képtér $R(M)^\perp$ ortogonális kiegészítő alterének dimenzióját!

6.) Maximum hány darab lineárisan független vektor található a $\mathbf{b}_j := \begin{bmatrix} j \\ \cos(\pi j) \\ 2^j \end{bmatrix}$ vektorok között $j = 0, \ldots, 9$-re?

7.) Tekintsük a valós számegyenesen analitikus függvények $\mathcal{A}$ vektorterét! Határozzuk meg a $\cos x, \cos(x + \pi/4), \sin x, \sin(x + \pi/4)$ függvények által kifeszített U altér dimenzióját!

8.) Tekintsük a $\mathcal{P}_4 = \{\sum_{j=0}^{4} a_j x^j \ : \ c_j \in \mathbb{R}\}$ (legfeljebb negyedfokú polinomok) vektorterét, és ebben az $L : \mathcal{P}_4 \to \mathcal{P}_4$, $p(x) \mapsto p(x) - p(-x)$ leképezést. Határozza meg a leképezés sajátértékeit és ahhoz tartozó sajátvektorait!

9.) Legyenek $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}$ és $B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 2 & -3 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$

a) Számítsa ki az A^{-1} inverz mátrixot! **b)** Oldja meg az $AX = B$ mátrix-egyenletet!

Mego.: $A^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 7 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -5 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, $X = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -4 & -2 & -1 \\ 3 & -3 & 4 & 2 \end{bmatrix}$.

10.) Jelölje $\mathcal{P}_2$ a legfeljebb másodfokú polinomok vektorterét és tekintsük az

$$L\colon \mathcal{P}_2 \to \mathcal{P}_2, \quad p(x) \mapsto p(x) - \frac{1}{3} x p'(x)$$

leképezést!

a) Mutassa meg, hogy a L leképezés lineáris!

b) Írja fel a leképezés mátrixát az $\{1, x, x^2\}$ bázisban!

c) Írja fel a leképezés mátrixát az $\{1, 1 + x, 1 + x + x^2\}$ bázisban!

11.) Tekintsük azt a lineáris leképezést, amelynek mátrixa a standard bázisban az $A = \begin{bmatrix} 9 & 0 & -2 \\ 0 & 3 & 0 \\ -2 & 0 & 6 \end{bmatrix}$ mátrix!

a) Mutassa meg, hogy a $\mathbf{v} = (1, 0, 2)^T$ vektor sajátvektora az A mátrixnak! Mennyi a hozzá tartozó sajátérték?

b) Határozza meg az A mátrix többi sajátértékét és a sajátértékekhez tartozó sajátvektorokat!

c) Írja fel A spektrálfelbontását!

Megoldás.

a)

$$Av = \begin{pmatrix} 9 & 0 & -2 \\ 0 & 3 & 0 \\ -2 & 0 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 \\ 0 \\ -10 \end{pmatrix} = 10 \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = 10v$$

Így v sajátvektor 10 sajátértékkel (és persze minden konstansszorosa is az).

b) Az A mátrix második oszlopa az $\mathbf{e}_2 = (0,1,0)$ vektor képe, így ez a vektor (és tetszőleges skalárszorosa) sajátvektor 3 sajátértékkel.

Mivel szimmetrikus mátrix különböző sajátértékeihez tartozó sajátvektorok ortogonálisak, ezért a

$$w = v \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

vektor és tetszőleges konstansszorosa is sajátvektor, a hozzá tartozó sajátérték pedig

$$Aw = \begin{pmatrix} 9 & 0 & -2 \\ 0 & 3 & 0 \\ -2 & 0 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 10 \end{pmatrix} = 5 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = 5w$$

alapján 5.

12.) Hol van szakadása a $\sigma(x,y) = \frac{\arcsin(x^2+y^2)^{3/2}}{(x^2+y^2)^{3/2}}$ függvénynek? Megszüntethető-e a szakadás?

13.) Hol van szakadása a $\theta(x,y) = \frac{\log x - \log y}{\operatorname{sh} x - \operatorname{sh} y}$ függvénynek? Megszüntethető-e a szakadás?

14.) Hol van szakadása az $\omega(x,y) = y\frac{\tan\sqrt{x^2+y^2}}{x^2+y^2}$ függvénynek? Megszüntethető-e a szakadás?

15.) Tekintsük a $\gamma(x,y) := \sqrt{|x|+|y|}$ függvényt! Határozza meg a függvény összes érintősíkját illetve támaszegyenesét az origón keresztül!

16.) Tekintsük a $\mu(x,y) := \operatorname{ch}(x+y) + 2\sqrt{1-x}$ függvényt! Határozza meg a függvény összes érintősíkját illetve támaszegyenesét az $(0,0,3)$ ponton keresztül!

17.) Tekintsük a $\nu(x,y) := e^{x-y} + \frac{4}{(x+y)^2}$ függvényt! Határozza meg a függvény összes érintősíkját illetve támaszegyenesét az $(1,1,2)$ ponton keresztül!

18.) 9.) Tekintsük a $\theta(x,y) := \operatorname{sh}(x+y) + \operatorname{ch}(x-y)$ függvényt! Határozza meg a függvény összes érintősíkját illetve támaszegyenesét az $(1,0,e)$ ponton keresztül!