Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem Gépészmérnöki Kar
Energetika és Mechatronika BSc szakok

Matematika A2H - II. Zh. X csoport / feladatsor

Dátum: 2016. május 4. Munkaidő: 45 perc

Hallgató Neptun kódja és neve: Gyakorlatvezető: .

1.) (2 pont: 3 jó válasz 2 pont, 2 jó 1, kevesebb 0 pont) Melyik állítás igaz, melyik nem?

a.) Ha $A \in \mathbb{R}^{4\times 3}$ és $B \in \mathbb{R}^{3\times 4}$ tetszőleges mátrixok, akkor az AB mátrix mindig szinguláris.

b.) Egy $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ lineáris transzformáció akkor és csak akkor invertálható, ha a magtere a nullvektor.

c.) Ha egy 3×3-as mátrix minden elemét beszorozzuk 7-tel, akkor a determinánsának értéke a hétszeresére változik.

2.) (3 pont) Legyenek $P_0(x) = 1$, $P_1(x) = x$, és $P_2(x) = 1 + x, \ldots, P_{n+1}(x) = P_n(x) + P_{n-1}(x)$ az ú.n. Fibonacci-polinomok. Hány dimenziós az $\mathcal{F} := [P_0, P_1, \ldots, P_n, \ldots]$ Fibonacci-polinomok által generált altér a polinom-függvények vektorterében?

3.) (6 pont) Legyen $A = \begin{bmatrix} 3 & 6 & -6 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$. Határozza meg az A^{10} mátrix sajátértékeit, és a sajátértékekhez tartozó sajátvektorait! (Megjegyzés: Nem kötelező kiszámítani, de +2 bónusz-pontért kiszámíthatja magát az A^{10} mátrixhatványt is. Ez azonban nem szükséges!)

4.) (6 pont) Legyenek $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 3 & -1 \end{bmatrix}$ és $B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.

a.) Invertálja az A mátrixot! **b.)** Oldja meg az $AX = B$ mátrix-egyenletet!

5.) (3 pont) Hol van szakadása az $F(x, y) := (x^2 + y) \cos\left(\dfrac{1}{x^2 + y^4}\right)$ függvénynek? Megszüntethető-e a szakadás?

Az alábbi értékelési táblázatot a gyakorlatvezető tölti ki!

1.feladat	2. feladat	3.feladat	4.feladat	5.feladat	Összesen

Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem Gépészmérnöki Kar

Energetika és Mechatronika BSc szakok

Matematika A2H - II. Zh. — Megoldások — X csoport

1.) (2 pont) **a.)** IGAZ. (AB ugyanis 4×4-es, de a rangja $r(AB) \le \max(r(A), r(B)) \le 3$.)

1.) **b.)** IGAZ. (A dimenzió-tétel értelmében $\dim \operatorname{Ker} L + \dim \operatorname{Im} L = \dim \mathbb{R}^n = n$, tehát ha a magtér dimenziója 0, akkor a képtéré n, azaz L szürjektív is, és persze injektív is a leképezés, hiszen bármilyen $L\mathbf{x} = \mathbf{b}$ megoldása egyértelmű.)

1. **c.)** HAMIS. (Valójában soronként 7-szeresére, összességében $7^3 = 343$-szorosára változik.)

2.) (3 pont) Láthatóan az első két elem lineárisan független, ugyanakkor a többiek mindig az előzőek lineáris kombinációi, tehát több lineárisan független nem lesz köztük, és a dimenzió marad 2. Ez annál is inkább magától értetődő, mert a polinomok mind lineárisak ($a + bx$ alakú maximum elsőfokúak), ezért a teljes $\mathcal{P}_1$ tér dimenziója (ami 2) mindenképpen felső korlátot állít annak, hogy hány lineárisan független választható ki belőlük.

3.) (6 pont) A karakterisztikus polinomja $P_A(\lambda) := |A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 6 & -6 \\ 0 & -\lambda & 3 \\ 0 & 0 & 3-\lambda \end{vmatrix} =$ $\lambda(3-\lambda)^2$, tehát a sajátértékek $\lambda_1 = 0$ és $\lambda_2 = 3$. A $\lambda_2 = 3$-hoz könnyebb sajátvektorokat találni, hiszen a mátrixegyenlet nagyon egyszerű lesz: $(A - \lambda I)\mathbf{u} = \mathbf{0}$ azt jelenti, hogy azt a homogén egyenletet kell megoldjuk amelyben az együtthatómátrix $A - 3I = \begin{bmatrix} 0 & 6 & -6 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow$ $\begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$, tehát a megoldások $x_1 = a$, $x_2 = x_3 = b$ alakúak lesznek. Ezek közül válasszuk mondjuk az $\mathbf{u} := (1,0,0)$ és a $\mathbf{v} := (0,1,1)$ vektort bázisnak: akkor az $U(3)$ sajátaltér az $U(3) = \{a\mathbf{u} + b\mathbf{v} \ : \ a, b \in \mathbb{R}\} = [\mathbf{u}, \mathbf{v}]$ altér lesz.

A harmadik sajátvektort a kevésbé határozatlan $(A - 0 \cdot I)\mathbf{x} = A\mathbf{x} = 0$ homogén egyenletrendszer adja. Ennek együtthatómátrixa A, és azonnal látszik, hogy

$A = \begin{bmatrix} 3 & 6 & -6 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, tehát a megoldások $\mathbf{w} = c \cdot (-2, 1, 0)$ alakúak lesznek.

Ezek szerint pl. a $B := [\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ bázis-áttérést alkalmazva, a $D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} = 3 \cdot P$ diagonál-mátrixszal felírható $D = B^{-1}AB$ azaz $A = BDB^{-1}$, ahol P a $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ projektor-mátrix.

Ezért persze $A^{10} = 3^{10}BPB^{-1}$, és persze A^{10} sajátvektorai is ugyanazok (tehát $\mathbf{w}$ konstansszorosai 0 sajátértékkel, és az $U(3) = [\mathbf{u}, \mathbf{v}]$ elemei, csak már 3^{10} sajátértékkel).

Bónusz 2 pont: $\underline{\text{A feladat nem kérte, de kiszámíthatjuk}}$ az A^{10} mátrix-hatványt magát is. Ehhez először is számítsuk ki $PB^{-1} = X$-et, aminek sztenderd módja a B mátrix invertálása a $[B|I_3]$ kibővített együttható-mátrixszal. Ez is jó, de kicsit még egyszerűbb a következő.

Mivel ez a mátrixegyenlet ekvivalens a $P = XB \Leftrightarrow B^T X^T = P^T = P$ egyenlettel, amely utóbbi nagyon kényelmes alakú, inkább ezt oldjuk meg: $\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \Leftrightarrow$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right].$$

Ebből $X^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$, majd $BX = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ és $A^{10} = 3^{10} \begin{bmatrix} 0 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

4.) (6 pont) Felírva a szimultán rendszer kibővített együttható mátrixát az inverzre,

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} -1 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \overset{\substack{S_4+2S_1,(-1)\cdot S_1 \\ S_2\leftrightarrow S_3}}{\Longleftrightarrow} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -2 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & -1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\overset{\substack{S_3-S_2,S_4-4S_2 \\ S_1+2S_2}}{\Longleftrightarrow} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 & 0 & -4 & 1 \end{array}\right] \overset{S_3 \leftrightarrow S_4}{\Longleftrightarrow} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 & 0 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right]$$

$$\overset{S_3 + S_4, S_1 - S_3}{\Longleftrightarrow} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -3 & -1 & 7 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & -5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right].$$

Ebből $A^{-1} = \begin{bmatrix} -3 & -1 & 7 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -5 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$, és így $X = A^{-1}B = \begin{bmatrix} -4 & 9 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & -6 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}$.

5.) (3 pont) Nyilván $\mathcal{D}_F = \mathbb{R}^2 \setminus \{\mathbf{0}\}$, mert az origón kívül a nevező nem nulla. Ugyanemiatt $\mathcal{D}_F$-ben a függvény folytonos is lesz. Az egyetlen szakadás az origóban található.

Ez megszüntethető pontosan akkor, ha F-nek létezik (véges) határértéke, amidőn $(x, y) \to (0, 0)$. Vegyük észre, hogy $\cos\left(\frac{1}{x^2 + y^4}\right)$ korlátos, ugyanakkor $x^2 + y \to 0$, ha $(x, y) \to (0, 0)$. Ezért a szorzat nullához fog tartani, és a szakadás az $F(0, 0) := 0$ értelmezéssel megszüntethető.

Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem Gépészmérnöki Kar

Energetika és Mechatronika BSc szakok

Matematika A2H - II. Zh. Y csoport / feladatsor

Dátum: 2016. május 4. Munkaidő: 45 perc

Hallgató Neptun kódja és neve: Gyakorlatvezető: .

1.) (2 pont: 3 jó válasz 2 pont, 2 jó 1, kevesebb 0 pont) Melyik állítás igaz, melyik nem?

a.) A legfeljebb harmadfokú valós együtthatós polinomok $\mathcal{P}_3$ vektorterén a differenciálás, mint lineáris leképezés invertálható.

b.) Ha $\forall k$-ra és $D \in \mathbb{R}^{n\times k}$-ra $r(AD) = r(D)$, akkor A oszlopai lineárisan összefüggők!

c.) Ha az $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mátrix $R(A)$ oszloptere csak a $\mathbf{0}$ vektorra merőleges, akkor A szinguláris mátrix.

2.) (3 pont) Állapítsa meg, hogy az $A := \begin{bmatrix} 1 & 0 & -7 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$ és $B := \begin{bmatrix} 1 & 0 & -7 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$ mátrixok AB szorzata szinguláris-e, és ha nem-szinguláris, akkor számítsa ki az inverzét!

3.) (6 pont) Legyen $C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. Adjon meg egy olyan Q ortogonális és D diagonális mátrixot, melyre $C = QDQ^T$! Határozza meg a C^{100} mátrixot!

4.) (5 pont) Legyenek $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & -3 & 2 \end{bmatrix}$ és $B = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 3 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix}$.

a.) Invertálja az A mátrixot! **b.)** Oldja meg az $AX = B$ mátrix-egyenletet!

5.) (4 pont) Hol van szakadása a $G(x, y) := \dfrac{x^2 - y^2}{\sqrt{x} - \sqrt{y}}$ függvénynek? Megszüntethető-e a szakadás?

Az alábbi értékelési táblázatot a gyakorlatvezető tölti ki!

1.feladat	2. feladat	3.feladat	4.feladat	5.feladat	Összesen

Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem Gépészmérnöki Kar

Energetika és Mechatronika BSc szakok

Matematika A2H - II. Zh. — Megoldások — Y csoport

1.) (2 pont) **a.)** HAMIS. ($p'(x) = 0$ minden konstans polinomra, így a differenciálás nem injektív.)

1.) **b.)** HAMIS. (Ha u.i. A oszlopai lineárisan összefüggőek lennének, akkor pl. $k := n$ és $D := I_n$ esetén $AD = AI = A$ szinguláris, míg D nem-szinguláris, ezért $r(AD) < n = r(D)$: tehát pont fordítva, mint a feltételben kikötöttük.)

1.) **c.)** HAMIS. (U.i. ekkor $R(A) = (R(A)^{\perp})^{\perp} = \{\mathbf{0}\}^{\perp} = \mathbb{R}^n$, tehát $r(A) = n$.)

2.) (3 pont) Mivel $A \in \mathbb{R}^{4\times 3}$ és $B \in \mathbb{R}^{3\times 4}$, nyilván $AB \in \mathbb{R}^{4\times 4}$. de a rangra $r(AB) \leq \max(r(A), r(B)) \leq 3$, mert mindkét mátrixnak legfeljebb 3 a rangja (hiszen nem lehet több lineárisan független oszlopuk ill. soruk). Ezért $r(AB) < 4$, az AB mátrix szinguláris. Így az inverze nem létezik, nincs mit kiszámítani.

3.) (6 pont) Legyen $C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. Adjon meg egy olyan Q ortogonális és D diagonális mátrixot, melyre $C = QDQ^T$! Határozza meg a C^{100} mátrixot!

C szimmetrikus, így ortogonális mátrixszal diagonalizálható. A sajátértékek meghatározásához felírjuk a karakterisztikus egyenletet: $P_C(\lambda) = |C - \lambda I| = \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 1 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)\begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = -(\lambda-1)^2(1+\lambda)$. Tehát a sajátértékek $\lambda_1 = 1$ (kétszeres) és $\lambda = -1$ (egyszeres).

A sajátegyenletek tehát $(C - I)\mathbf{u} = 0$ és $(C + I)\mathbf{w} = 0$. Előbbire az együtthatómátrix $\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$, tehát a megoldások a $t(1,0,1) + s(0,1,0)$ alakú vektorok, vagy, normálva és ellenőrizve, hogy pont merőleges alapmegoldások jöttek ki, az $\mathbf{u} := (1/\sqrt{2}, 0, 1/\sqrt{2})$ és a $\mathbf{v} := (0,1,0)$ vektorok lineáris kombinációi. Ezek ortonormált vektorok: még a harmadik, $\lambda = -1$-hez tartozó $\mathbf{w}$ sajátvektort kell megkeressük. Ehhez vagy megoldjuk a $(C+I)\mathbf{w} = 0$ sajátegyenletet, aminek együtthatómátrixa most $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, azaz megoldásai a $t(1,0,-1)$ illetve normálva $\mathbf{w} = (1/\sqrt{2}, 0, -1/\sqrt{2})$ sajátvektor konstansszorosai; vagy számolhatunk vektoriális szorzással is: $\mathbf{u}\times\mathbf{v} = \pm\mathbf{w}$ kell adódjon. A jobbsodrás (+1 determináns) érdekében mondjuk direkte $-\mathbf{w}$-t választva sajátvektornak a bázisunk $Q = [\mathbf{u}, \mathbf{v}, -\mathbf{w}]$ alakban írható. Így

$$Q = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & -1/\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}, \qquad D = Q^T C Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

A C^{100} mátrix a $C = QDQ^T$ sajátfelbontás alapján számolható: $C^{100} = QD^{100}Q^T = QIQ^T = I$.

4.) (5 pont) A kibővített együtthatómátrixból Gauss-Jordan eliminációval számoljuk ki A^{-1}-et:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -3 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \overset{S_1 \leftrightarrow S_3}{\iff} \left[\begin{array}{ccc|ccc} -1 & -3 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right] \overset{S_3+3S_1,(-1)S_1}{\iff}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & -2 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -7 & 6 & 1 & 0 & 3 \end{array}\right] \overset{S_3+7S_2, S_1-3S_2}{\iff} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 7 & 3 \end{array}\right]$$

$$\overset{S_1+S_3,(-1)\cdot S_3}{\iff} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -7 & -3 \end{array}\right] \overset{S_2+S_3}{\iff} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -6 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -7 & -3 \end{array}\right].$$

Ebből $A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ -1 & -6 & -3 \\ -1 & -7 & -3 \end{bmatrix}$, így $X = A^{-1}B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}$.

5.) (4 pont) $\mathcal{D}_G = (0,\infty) \times (0,\infty) \setminus \ell$, ahol $\ell = \{(x,y) \ : \ y = x, \ x > 0\}$.

Az ℓ (fél)-egyenes pontjaiban van szakadás, de itt van a függvénynek határértéke: u.i. $y \neq x$ mellett $G(x,y) = \dfrac{(x+y)(x-y)}{\sqrt{x}-\sqrt{y}} = \dfrac{(x+y)(\sqrt{x}+\sqrt{y})(\sqrt{x}-\sqrt{y})}{\sqrt{x}-\sqrt{y}} = (x+y)(\sqrt{x}+\sqrt{y})$ és így ha $(a,a) \in \ell$, akkor $(x,y) \to (a,a)$ $((x,y) \in D_G)$ esetén $G(x,y) \to (a+a)(\sqrt{a}+\sqrt{a}) = 4a^{3/2}$. Ezzel a határértékkel kiterjesztve a G függvény definícióját, a kiterjesztett függvény folytonos lesz, mert $y \neq x$ esetén láttuk a hatáértéket, $y = x$ esetén pedig ha $(x,x) \to (a,a)$, akkor a $4x^{3/2}$ fügvvény folytonossága miatt fog teljesülni $\lim_{(x,x)\to(a,a)} G(x,x) = G(a,a)$.

Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem Gépészmérnöki Kar
Energetika és Mechatronika BSc szakok

Matematika A2H - II. Zh. **W csoport / feladatsor**

Dátum: 2016. május 4. Munkaidő: 45 perc

Hallgató Neptun kódja és neve: Gyakorlatvezető: .

1.) (2 pont: 3 jó válasz 2 pont, 2 jó 1, kevesebb 0 pont) Melyik állítás igaz, melyik nem?

a.) Az $n \times n$-es szimmetrikus mátrixok S_n halmaza $\binom{n+1}{2}$ dimenziós alteret alkot az összes $n \times n$-es valós mátrixok $\mathbb{R}^{n\times n}$ vektorterében.
b.) Ha $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ és $AB\mathbf{x} = \mathbf{b}$ minden $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$-re megoldható, akkor $BA\mathbf{x} = \mathbf{b}$ is minden $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$-re megoldható.
c.) Ha az $N \in \mathbb{R}^{n\times n}$ négyzetes mátrixnak van n db. különböző sajátértéke, akkor diagonalizálható.

2.) (3 pont) Tekintsük a $\mathcal{P}_4 = \{\sum_{j=0}^{4} c_j x^j \ : \ c_j \in \mathbb{R}\}$ (legfeljebb negyedfokú polinomok) vektorterét, és ebben a $D : \mathcal{P}_4 \to \mathcal{P}_4$, $p(x) \mapsto xp'(x)$ leképezést! Mennyi lesz az $\mathrm{Im}D = D(\mathcal{P}_4) = \mathcal{R}_D$ képtér dimenziója?

3.) (6 pont) Legyen $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. Adjon meg egy olyan Q ortogonális és egy D diagonális mátrixot, amelyekre $A = QDQ^T$! Határozza meg az A^{100} mátrixot!

4.) (5 pont) Legyenek $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 4 \end{bmatrix}$ és $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & -3 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.
a.) Invertálja az A mátrixot! **b.)** Oldja meg az $AX = B$ mátrix-egyenletet!

5.) (4 pont) Hol van szakadása a $T(x, y) = \dfrac{x^2 - y^2 + x^3 + y^3}{x^2 + y^2}$ függvénynek? Megszüntethető-e a szakadás?

Az alábbi értékelési táblázatot a gyakorlatvezető tölti ki!

1.feladat	2. feladat	3.feladat	4.feladat	5.feladat	Összesen

Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem Gépészmérnöki Kar

Energetika és Mechatronika BSc szakok

Matematika A2H - II. Zh. — Megoldások — W csoport

1.) (2 pont) **a.)** IGAZ. (Egy bázis az azon $A^{(i,j)}$ mátrixokból állhat, melyeknek az ij-edik és ji-edik eleme is 1; persze ha $i = j$, akkor ez egyetlen főátlóbeli nem-nulla elemet jelent, ha azonban $i \neq j$, akkor egy két 1-est tartalmazó szimmetrikus mátrixot. A báziselemek száma ebből láthatóan $1 + 2 + \cdots + n = \binom{n+1}{2}$.)

1.) **b.)** IGAZ. (Ha $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ és $AB\mathbf{x} = \mathbf{b}$ minden $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$-re megoldható, akkor BA nem-szinguláris mátrix, és akkor A is, B is nem-szinguláris, ezért AB is nem-szinguláris mátrix, és így $BA\mathbf{x} = \mathbf{b}$ is minden $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$-re megoldható.)

1.) **c.)** IGAZ. (Előadáson tanultuk, hogy minden sajátértékhez létezik sajátvektor, másrészt, hogy *különböző* sajátértékekhez tartozó sajátvektorok rendszere lineárisan független: tehát ha van n db. ilyen, akkor az bázis, és ha van sajátvektorokból álló bázis, akkor erre a bázisra áttérve a mátrix diagonális.)

2.) (3 pont) Talán a legegyszerűbb a dimenziótétellel kiszámolni: $\dim \mathrm{Im}\ D = 5 - \dim \mathrm{KerD} = 5 - 1 = 4$, mert $xp'(x) \equiv 0 \Leftrightarrow p'(x) \equiv 0 \Leftrightarrow p \equiv c$ const., azaz Ker $D = \mathcal{P}_0$ 1 dimenziós.

Persze ki lehet számolni közvetlenül is: ha $q(x) \in \mathrm{Im}\ D$, akkor $q(x) = x \cdot p'(x)$, ahol $p'(x)$ tetszőleges legfeljebb harmadfokú polinom lehet (mert legfeljebb negyedfokú polinom deriváltja legfeljebb harmadfokú, és minden legfeljebb harmadfokú polinomhoz van legfeljebb negyedfokú polinom, ami a primitív függvénye) , azaz $\mathrm{Im}\ D = x\mathcal{P}_3$, és $\dim \mathrm{Im}\ D = \dim x\mathcal{P}_3 = \dim \mathcal{P}_3 = 4$.

3.) (6 pont) A karakterisztikus egyenlet:

$$\det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & 0 & 1 \\ 0 & \lambda + 1 & 0 \\ 1 & 0 & \lambda - 1 \end{vmatrix} = (\lambda + 1)\lambda(\lambda - 2) = 0$$

Ebből a $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = 0$ és $\lambda_3 = 2$ sajátértékek adódnak. A $\lambda_1 = -1$ sajátértékhez tartozó normált sajátvektor az A mátrix második oszlopából $e_2 = (0, 1, 0)$. A $\lambda_2 = 0$ sajátértékhez tartozó sajátvektorok az $Av = 0$ homogén lineáris egyenletrendszerből számíthatók. Az egyenletrendszer együtthatómátrixának redukált lépcsős alakja Gauss-Jordan elimináció után:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Így egy egységnyi normájú sajátvektor például a $v = (1/\sqrt{2}, 0, 1/\sqrt{2})$ vektor.

Mivel szimmetrikus mátrix sajátvektorai ortogonálisak, ezért a harmadik sajátvektor meghatározható például vektoriális szorzással:

$$w = e_2 \times v = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

Így a Q ortogonális és D diagonális mátrixok:

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}, \qquad D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Az A^{100} mátrix az A mátrix spektrálfelbontása alapján:

$$A^{100} = (-1)^{100} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}^T + 2^{100} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ -1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 2^{99} & 0 & -2^{99} \\ 0 & 1 & 0 \\ -2^{99} & 0 & 2^{99} \end{pmatrix}$$

4.) (5 pont) Gauss-Jordan eliminációval keressük meg az inverz mátrixot:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \overset{S_2+S_1, S_3-S_1}{\Longleftrightarrow} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right] \overset{S_2 \leftrightarrow S_3}{\Longleftrightarrow}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right] \overset{S_3-2S_2}{\Longleftrightarrow} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 1 & -2 \end{array}\right] \overset{S_1-3S_3, S_2-S_3}{\Longleftrightarrow}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -8 & -3 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & -4 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 1 & -2 \end{array}\right], \quad \text{így} \quad A^{-1} = \begin{bmatrix} -8 & -3 & 6 \\ -4 & -1 & 3 \\ 3 & 1 & -2 \end{bmatrix}, \quad X = A^{-1}B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

5.) (4 pont) A függvény mindenütt értelmezve van és folytonos is, ahol a nevező nem nulla, azaz $D_T = \mathbb{R}^2 \setminus \mathbf{0}$, és az origóban van szakadása.

Itt megszüntethető a szakadás pontosan akkor, ha van a függvénynek limesze a pontban. De limesz nem létezik, hiszen pl. az $y \equiv 0$ (tehát az x tengely mentén) tartva az origóhoz, a függvényre $T(x,0) = 1 + x \to 1$, míg az y tengely mentén tartva az origóhoz $T(0,y) = -1 + y \to -1$.

Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem Gépészmérnöki Kar

Energetika és Mechatronika BSc szakok

Matematika A2H - II. Zh. **U csoport / feladatsor**

Dátum: 2016. május 4. Munkaidő: 45 perc

Hallgató Neptun kódja és neve: Gyakorlatvezető: .

1.) (2 pont: 3 jó válasz 2 pont, 2 jó 1, kevesebb 0 pont) Melyik állítás igaz, melyik nem?

a.) A (pontosan) harmadfokú valós együtthatós polinomok négydimenziós vektorteret alkotnak a valós számtest felett a pontonkénti összeadásra és a skalárral való szorzásra nézve.

b.) Ha az $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mátrix olyan, hogy valamilyen $B \in \mathbb{R}^{n\times k}$ mátrixra az $AX = B$ mátrix-egyenletnek végtelen sok $X \in \mathbb{R}^{n\times k}$ megoldása van, akkor $\det(A) = 0$.

c.) Ha $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ két nem-szinguláris mátrix, akkor $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$.

2.) (3 pont) Tekintsük a $\mathcal{P}_4 = \{\sum_{j=0}^{4} c_j x^j \ : \ c_j \in \mathbb{R}\}$ (legfeljebb negyedfokú polinomok) vektorterét, és ebben az $S : \mathcal{P}_4 \to \mathcal{P}_4$ $p(x) \mapsto p(x+1)$ leképezést! Legyen M az S transzformáció mátrixa az $1, x, x^2, x^3, x^4$ bázisban! Határozzuk meg, hogy M szinguláris, vagy nem-szinguláris mátrix-e?

3.) (6 pont) Legyen $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$! Adjon meg egy olyan Q ortogonális és D diagonális mátrixot, amelyre $B = QDQ^T$! Határozza meg a B^{50} mátrixot!

4.) (5 pont) Legyenek $A = \begin{bmatrix} -2 & 5 & 0 \\ 0 & 3 & -1 \\ 1 & -2 & 0 \end{bmatrix}$ és $B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & -3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

a.) Invertálja az A mátrixot! **b.)** Oldja meg az $AX = B$ mátrix-egyenletet!

5.) (4 pont) Hol van szakadása a $Q(x,y) = \dfrac{2x^2y^4}{x^2+y^4}$ függvénynek? Megszüntethető-e a szakadás?

Az alábbi értékelési táblázatot a gyakorlatvezető tölti ki!

1.feladat	2. feladat	3.feladat	4.feladat	5.feladat	Összesen

Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem Gépészmérnöki Kar
Energetika és Mechatronika BSc szakok

Matematika A2H - II. Zh. — Megoldások — U csoport

1.) (2 pont) **a.)** HAMIS. (Ui. *pontosan* harmadfokú polinomok különbsége lehet kisebb fokú, ami nem tartozik bele a megadott halmazba: pl. az azonosan nulla sem.)

1.) **b.)** IGAZ. (Ha ui. végtelen sok mátrix-megoldás van, akkor valamelyik oszlopvektorra is végtelen sok vektor-megoldás kell legyen: $A\mathbf{x}^{(j)} = \mathbf{b}^{(j)}$ végtelen sok megoldása pedig azt jelenti, hogy A szinguláris mátrix.)

1.) **c.)** HAMIS. (Pl. $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow (A+B)^2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}^2 = -I$, míg $A^2 + 2AB + B^2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} -2 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$. Általában, $(A+B)^2 = A^2 + AB + BA + B^2$, és ez csak akkor lesz $= A^2 + 2AB + B^2$, ha $AB = BA$, amire az A, B nem-szingularitásától még semmi ok nincsen.)

2.) (3 pont) Az $S : \mathcal{P}_4 \to \mathcal{P}_4$ leképezés lineáris ($S(p+q) = Sp + Sq, S(cp) = cSp$) és képtere az összes polinom $\mathcal{P}_4$-ből (mert a leképezés láthatóan invertálható is: tetszőleges $q(x)$ polinomra $(S^{-1}q)(x) = q(x-1)$, hiszen $q((x+1)-1) = q(x)$), tehát a rangja $\dim \operatorname{Im} S = 5$. Ezért a nulltere $\{\mathbf{0}\}$ (csak az azonosan 0 polinom), és a mátrixa bármilyen bázisban nem-szinguláris.

Egyébként az adott bázisban a mátrix $M = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

3.) (6 pont) A B mátrix karakterisztikus polinomja:

$$\det(\lambda I - A) = \det \begin{pmatrix} \lambda - 1 & 0 & 1 \\ 0 & \lambda - 2 & 0 \\ 1 & 0 & \lambda - 1 \end{pmatrix} = (\lambda - 2) \det \begin{pmatrix} \lambda - 1 & 1 \\ 1 & \lambda - 1 \end{pmatrix}$$

Így a karakterisztikus egyenlet $\lambda(\lambda - 2)^2 = 0$, és a sajátértékek $\lambda_1 = 0$ és $\lambda_2 = \lambda_3 = 2$.

A célunk a továbbiakban egy, a B mátrix sajátvektoraiból álló ortonormált bázis megkeresése. (Mivel a B mátrix szimmetrikus, ezért tudjuk, hogy van ilyen.)

A $\lambda_1 = 0$ sajátértékhez tartozó sajátvektorok a $Bv = 0$ homogén lineáris egyenletrendszer megoldásai. Az együtthatómátrix redukált lépcsős alakja

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

amiből az egyetlen egységnyi normájú sajátvektor $v = (1/\sqrt{2}, 0, 1/\sqrt{2})$.

A B mátrix második oszlopa a $(0,1,0)$ vektor képe, amiből $B\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$ adódik és így $w = (0,1,0)$ egy, a $\lambda_1 = 2$ sajátértékhez tartozó sajátvektor, ami mellesleg megkapható a $(B-2I)w = 0$ homogén lineáris egyenletrendszer megoldásaként is.

Mivel tudjuk, hogy szimmetrikus mátrix különböző sajátértékeihez tartozó sajátvektorok ortogonálisak, így a harmadik normált sajátvektor legegyszerűbben vektoriális szorzással számolható: $v \times w = \begin{pmatrix}1/\sqrt{2}\\0\\1/\sqrt{2}\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1/\sqrt{2}\\0\\1/\sqrt{2}\end{pmatrix}$.

Ekkor Q az ortonormált sajátvektorokból álló ortogonális mátrix, D pedig a sajátértékekből álló diagonális mátrix (sorrendre tekintettel!):

$$Q = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & -1/\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}, \qquad D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

A B^{50} mátrix a $B = QDQ^T$ sajátfelbontás alapján számolható:

$$B^{50} = QD^{50}Q^T =$$

$$\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & -1/\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2^{50} & 0 \\ 0 & 0 & 2^{50} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ -1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} =$$

$$2^{50}\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}^T + 2^{50}\begin{pmatrix}-1/\sqrt{2}\\0\\1/\sqrt{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1/\sqrt{2}\\0\\1/\sqrt{2}\end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 2^{49} & 0 & -2^{49} \\ 0 & 2^{50} & 0 \\ -2^{49} & 0 & 2^{49} \end{pmatrix}.$$

4.) (5 pont) Az inverz mátrixot Gauss-Jordan eliminációval számítjuk ki:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} -2 & 5 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \overset{S_1 \leftrightarrow S_3}{\Longleftrightarrow} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 5 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right] \overset{S_3 + 2S_1}{\Longleftrightarrow} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 2 \end{array}\right]$$

$$\overset{S_2 \leftrightarrow S_3}{\Longleftrightarrow} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & -1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \overset{\substack{S_1+2S_2 \\ S_3-3S_2}}{\Longleftrightarrow} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & -3 & 1 & -6 \end{array}\right] \overset{(-1)\cdot S_3}{\Longleftrightarrow} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -1 & 6 \end{array}\right].$$

Ebből $A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 1 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & 6 \end{bmatrix}$, $X = A^{-1}B = \begin{bmatrix} 7 & -2 & 9 \\ 3 & -1 & 4 \\ 9 & 0 & 11 \end{bmatrix}$.

5.) (4 pont) A függvény mindenütt értelmezett és folytonos is, ahol a nevező nem 0, azaz $\mathcal{D}_Q = \mathbb{R}^2 \setminus \{\mathbf{0}\}$. Ebben a pontban a szakadás akkor megszüntethető, ha $P = (x,y) \to \mathbf{0}$ esetén van határértéke a függvénynek (és ekkor ezzel az értékkel kell a függvény értelmezését kiterjeszteni az origóban, hogy az folytonos legyen).

Vegyük észre, hogy $\dfrac{x^2}{x^2+y^4}$ korlátos függvény az egész $\mathbb{R}^2$-ben, (konkrétan az abszolút értéke ≤ 1), míg $(x,y) \to (0,0)$ esetén $y^4 \to 0$, tehát ez egy "korlátos $\cdot 0$" típusú határérték, aminek az értéke 0. Ezért a szakadás megszüntethető ($Q(0,0) := 0$ definícióval).