Matematika A1a – Analízis gyakorlat

2024/2025/1

CV1 kurzus, szerda 10:15–12:00 (CHA10)

Tartalomjegyzék

1. Komplex számok

1.1. Műveletek algebrai alakban

1.1. Feladat. Írjuk a következő komplex számokat $a + bi$ alakba.

a) $(1 + 4i)(4 - 2i)$

b) i^7

c) i^{2009}

d) $\frac{1}{i}$

e) $\frac{3 - 2i}{-2 + i}$

f) $\frac{3 - 2i}{3i}$

g) $\frac{2 - i}{i - 1}$

h) $(2 + i)^{37}(2 - i)^{38}$

1.2. Feladat. Oldjuk meg a következő egyenleteket.

a) $z^4 - z^2 - 6 = 0$

b) $z^2 + 5 + \frac{6}{z^2} = 0$

c) $z^2 - 2iz - 5 = 0$

d) $z^2 + (2 + 3i)z - 1 + 3i = 0$

e) $z^2 + (1 - 2i) - 2i = 0$

f) $|z| + z = 2 + i$

g) $(|z| - 1)i + 3 = z$

h) $iz^2 + \operatorname{Re} z + \operatorname{Im} z = 0$

1.2. Trigonometrikus alak

1.3. Feladat. Írjuk a következő komplex számokat trigonometrikus alakba.

a) $1 + i$

b) $3 - 3i$

c) $-1 - \sqrt{3}$

d) -2

e) $-i$

f) $4\sqrt{3} - 4i$

1.4. Feladat. Írjuk a következő komplex számokat algebrai alakba.

a) $4\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$

b) $4\left(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}\right)$

c) $\sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4}\right)$

d) $2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)$

e) $3\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)$

1.5. Feladat. Írjuk a következő komplex számokat algebrai vagy trigonometrikus alakba.

a) $(1-i)^{997}$

b) $(1-i\sqrt{3})^{14} - 3$

c) $\sqrt[4]{1}$

d) $\sqrt[3]{-8i}$

e) i^{2025}

f) $\frac{1}{\sqrt{i}}$

g) $(-1-i)^{2024} + 500i$

h) $\frac{\sqrt{i}}{1-i}$

1.6. Feladat. Oldjuk meg a következő egyenleteket, és adjuk meg a megoldást algebrai alakban.

a) $z^4 + 1 = 0$

b) $z^5 - z^2 = 0$

c) $z^2 - iz + 3 + 2i = 0$

d) $3z^2 - iz^2 + 3iz + 6 - i = 0$

1.7. Feladat. Számoljuk ki az $\binom{n}{0} - \binom{n}{2} + \binom{n}{4} - \binom{n}{6} \pm \ldots$ összeget.

2. Vektorok

2.1. Lineáris függetlenség

2.1. Feladat. Lineárisan függetlenek-e az $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ vektorok?

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} -4 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{c} = \begin{bmatrix} -4 \\ 6 \\ 4 \end{bmatrix}$$

2.2. Feladat. Legyenek $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ lineárisan független vektorok. Lineárisan függetlenek-e az alábbi vektorok?

a) $\mathbf{r} = \mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}$, $\mathbf{s} = -2\mathbf{a} - 2\mathbf{b} - 2\mathbf{c}$, $\mathbf{t} = 2\mathbf{a} - 5\mathbf{b} + \mathbf{c}$

b) $\mathbf{r} = \mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}$, $\mathbf{s} = \mathbf{b} + \mathbf{c}$, $\mathbf{t} = \mathbf{a} + \mathbf{c}$

c) $\mathbf{r} = \mathbf{3a} - \mathbf{b} - \mathbf{c}$, $\mathbf{s} = 2\mathbf{a} + \mathbf{b} + 2\mathbf{c}$, $\mathbf{t} = \mathbf{a} - 2\mathbf{b} - 3\mathbf{c}$

d) $\mathbf{v} = 2\mathbf{a} + 3\mathbf{b}$, $\mathbf{w} = 4\mathbf{a} + \alpha\mathbf{b}$, ahol $\alpha \in \mathbb{R}$ paraméter

e) $\mathbf{v} = 2\mathbf{a} + \alpha\mathbf{b} + \mathbf{c}$, $\mathbf{w} = 4\mathbf{a} + 2\alpha\mathbf{b} + 2\mathbf{c}$, ahol $\alpha \in \mathbb{R}$ paraméter

f) $\mathbf{v} = \alpha\mathbf{a} + 2\alpha\mathbf{b} + \mathbf{c}$, $\mathbf{w} = \beta\mathbf{a} + 4\alpha\mathbf{b} + 2\mathbf{c}$, ahol $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ paraméterek

2.3. Feladat. Bontsuk fel a $\mathbf{v}$ vektort az $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ és $\mathbf{c}$ vektorokkal párhuzamos összetevőkre.

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 9 \\ -9 \\ 10 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{a} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{c} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 7 \end{bmatrix}$$

2.2. Skaláris szorzat

2.4. Feladat. Az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ vektorok szöge $\frac{\pi}{3}$, abszolút értékük $|\mathbf{a}| = 3$ és $|\mathbf{b}| = 4$. Számítsuk ki az alábbi skaláris szorzatok értékét.

a) $\mathbf{ab}$

b) $\mathbf{a}^2$

c) $\mathbf{b}^2$

d) $(\mathbf{a} + \mathbf{b})^2$

e) $(\mathbf{a} - \mathbf{b})^2$

f) $(3\mathbf{a} - 2\mathbf{b})(\mathbf{a} + 2\mathbf{b})$

g) $(3\mathbf{a} + 2\mathbf{b})^2$

2.5. Feladat. Mennyi legyen $t \in \mathbb{R}$ értéke, hogy az

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} 3 \\ -6 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 12 \\ 4 \\ t \end{bmatrix}$$

vektorok merőlegesek legyenek egymásra?

2.6. Feladat. A z-tengely melyik pontjából látszik az $A(1,0,0)$, $B(0,1,0)$ pontpár $30°$-os szög alatt?

2.7. Feladat. Az $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ egységvektorok összege 0, és bármely kettő ugyanakkora szöget zár be egymással. Mekkora ez a szög?

2.8. Feladat. Bontsuk fel az $\mathbf{a}$ vektort a $\mathbf{b}$ vektorral párhuzamos, és rá merőleges összetevőkre.

a) $\mathbf{a} = \begin{bmatrix} 3 \\ -6 \\ 9 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$

b) $\mathbf{a} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix}$

2.3. Vektoriális szorzat

2.9. Feladat. Hozzuk egyszerűbb alakra.

a) $(\mathbf{a}+\mathbf{b}) \times (\mathbf{a}-\mathbf{b})$

b) $(3\mathbf{a}-\mathbf{b}) \times (\mathbf{b}+3\mathbf{a})$

c) $(\mathbf{a}-2\mathbf{b}+\mathbf{c}) \times (3\mathbf{a}+10\mathbf{b}-7\mathbf{c})$

2.10. Feladat. Számítsuk ki a kifejezések értékét.

a) $(\mathbf{i} \times \mathbf{j})^2$

b) $(2\mathbf{i} \times 3\mathbf{j})^2$

c) $[(3\mathbf{i}-\mathbf{j}) \times (\mathbf{i} \times 2\mathbf{j})]^2$

2.11. Feladat. Számítsuk ki az $A=(1,0,-2)$, $B=(4,3,8)$ és $C=(0,-4,6)$ csúcsú háromszög területét.

2.12. Feladat. Egy kocka egyik csúcsa az origó, két vele szomszédos csúcs pedig $(1,4,8)$ és $(8,-4,1)$. Számítsuk ki a harmadik origóval szomszédos csúcs koordinátáit.

2.4. Vegyes szorzat

2.13. Feladat. Döntsük el, hogy az $A=(1,2,-1)$, $B=(0,1,5)$, $C=(-1,2,1)$ és $D=(4,1,3)$ pontok egy síkba esnek-e.

2.14. Feladat. Mennyi az $A=(2,-1,1)$, $B=(5,5,4)$, $C=(3,2,-1)$ és $D=(1,2,3)$ csúcsú tetraéder térfogata?

3. Térbeli koordinátageometria

3.1. Feladat. Adjuk meg alábbi feltételnek eleget tevő sík egyenletét.

a) Illeszkedik a $P = (0, -1, 2)$, $Q = (2, -1, 1)$ és $R = (4, 3, -2)$ pontokra.

b) Illeszkedik az $A = (1, 5, 2)$ pontra és párhuzamos a $7x - y + 3z + 2 = 0$ egyenletű síkkal.

c) Illeszkedik az $A = (-2, 3, 1)$ és $B = (4, 2, -1)$ pontokra, és merőleges a $3x-y+z-3 = 0$ egyenletű síkra.

d) Illeszkedik a $P = (-2, 1, 0)$ pontra és az $x - 2 = \frac{y}{3}$, $z = 2$ egyenletrendszerű egyenesre.

e) Illeszkedik az $x = t + 3$, $y = 2t - 1$, $z = -t$ és az $x = 2t$, $y = 4t + 1$, $z = -2t + 4$ egyenletrendszerű egyenesekre.

f) Illeszkedik az $x = 2t + 2$, $y = t - 5$, $z = 3$ és az $x = -t + 1$, $y = 2t - 3$, $z = t + 4$ egyenletrendszerű egyenesekre.

g) Tartalmazza az $\frac{x-5}{3} = y - 1 = z$ egyenletrendszerű egyenest és merőleges a $2x - y + z = 0$ egyenletű síkra.

h) Tartalmazza a $x + 4y - 2z = 3$ és az $y - 3z = 5$ egyenletű síkok metszésvonalát, és merőleges az $x - y - z = 0$ síkra.

3.2. Feladat. Adjuk meg alábbi feltételnek eleget tevő egyenes paraméteres egyenletrendszerét.

a) Illeszkedik az $A = (-2, 5, 1)$ pontra és párhuzamos az $\mathbf{a} = (-1, 2, 3)$ vektorral.

b) Illeszkedik az $A = (1, -2, 2)$ pontra és merőleges az $x + y + z = 7$ egyenletű síkra.

c) Illeszkedik a $3x + y - z + 1 = 0$ és $x + y + z = 0$ egyenletű síkokra.

d) Merőlegesen metszi az $x = 1-3t$, $y = -4+4t$, $z = 1+t$ és az $x-4 = -y-2 = -z+2$ egyenletrendszerű egyeneseket.

e) Illeszkedik az $A = (2, 5, -1)$ pontra és párhuzamos az $3x + y - z + 1 = 0$ és az $x + y + z = 0$ egyenletű síkokkal.

3.3. Feladat. Határozzuk meg az alábbi alakzatoknak az $x - y + z = 9$ egyenletű síkra vonatkozó tükörtképét.

a) az $A = (4, -3, 5)$ pont,

b) az $x = 1 - 2t$, $y = 3 + 2t$, $z = -4 - 9t$ egyenletrendszerű egyenes,

c) az $x = 1 + t$, $y = 3 + t$, $z = -4$ egyenletrendszerű egyenes,

d) az $x + 2y + 2z = 3$ egyenletű sík,

e) a $2x - 2y + 2z = 4$ egyenletű sík.

3.4. Feladat. Határozzuk meg az alábbi alakzatoknak az $x = 3t$, $y = 5t - 7$, $z = 2t + 2$ egyenletrendszerű egyenesre vonatkozó tükörtképét.

a) az $A = (2, -1, 3)$ pont,

b) az $x = y = z$ egyenletrendszerű egyenes,

c) az $x + y + z = 1$ egyenletű sík.

d) az $3x + 5y + 2z = 3$ egyenletű sík.

4. Határérték és folytonosság

4.1. Sorozatok határértéke

4.1. Feladat. A definíció alapján ellenőrizzük a határértékeket.

a) $\lim_{n\to\infty} \frac{\sin n}{n} = 0$

b) $\lim_{n\to\infty} \frac{2n^2+3}{n^2+1} = 2$

c) $\lim_{n\to\infty} n^3 - n^2 = \infty$

d) $\lim_{n\to\infty} n2^{-n} = 0$

4.2. Feladat. Számoljuk ki a határértékeket.

a) $\lim_{n\to\infty} \frac{n^{-1}}{1+n^{-2}}$

b) $\lim_{n\to\infty} \frac{n^5 - 216n^2 + n - 2}{-n^8 + 500n^4 + 86}$

c) $\lim_{n\to\infty} \frac{n^{22} + 18n^{18}}{8n^{22} - 4n^2}$

d) $\lim_{n\to\infty} \frac{2^n + 82n^{47} + 23610}{-14n^{25} + 2n^8 + 3}$

e) $\lim_{n\to\infty} \frac{5^n + 401n + 402}{2^{2n} + n - 88}$

f) $\lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)!}{(5-2n)n!}$

g) $\lim_{n\to\infty} \left(\sqrt{4n-3} - \sqrt{n+9}\right)$

h) $\lim_{n\to\infty} \left(\sqrt{2n^2+5n-3} - \sqrt{2n^2-n}\right)$

i) $\lim_{n\to\infty} \frac{25n! + n^{25}}{25n^n}$

j) $\lim_{n\to\infty} \frac{n^{2/3} + 8n^{\sqrt{3}} + \sqrt{n} + 12}{n^2 + 5n - 7}$

k) $\lim_{n\to\infty} \frac{n^{-2} + 4}{2n^{-3} - 1}$

l) $\lim_{n\to\infty} \frac{9\sqrt[3]{n} - 3\sqrt{2n} + 1}{\sqrt[4]{n} + \sqrt{3n}}$

m) $\lim_{n\to\infty} \frac{\log_{10}(n^2) + 3}{\log_3(n) - 1}$

n) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^3 2^n + 3^n}{n^{2n-3n^2}}$

o) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{7^n + n^7 + 7}{2^{2n} + (2n)^2 + 2}$

p) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt{n^4 + 2n} - n^2\right)$

q) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt[3]{n^3 - 3n + 3} - \sqrt[3]{n^3 + 123n^2 - 1}\right)$

4.3. Feladat. Számoljuk ki a határértékeket.

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 - \dfrac{3}{n^3}\right)^{n^3}$

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{n-1}{n+2}\right)^{2n-3}$

c) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{4n+1}{2n+3}\right)^{\frac{n}{2}+1}$

d) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{\sqrt{n}+3}{\sqrt{n}-2}\right)^{n}$

e) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{n^2-n+1}{n^2+n+1}\right)^{n}$

f) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \dfrac{1}{n^2+3}\right)^{4n^2}$

g) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{n^2+2n-5}{n^2+n+1}\right)^{\frac{n}{2}+1}$

h) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[99n]{n}$

i) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{99n^{99}}$

j) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n+5}$

k) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^2+3n-2}$

l) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\dfrac{2n^2+3}{4n^2+n}}$

m) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n!]{n}$

n) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n!}$

4.4. Feladat. Számoljuk ki a határértékeket (nehezebb).

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1+2+\cdots+n}{(n+5)(n+10)}$

b) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{\binom{n}{2}}{\binom{n}{3}}$

c) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{\ln\left(\sqrt{n^2+1}-\sqrt[3]{n^3-1}\right)}{\ln n}$

d) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2n}\log_2\binom{2n}{n}$ (útmutatás: mutassuk meg, hogy a $2^{2n} = \sum_{k=0}^{2} n\binom{2n}{k}$ összeg legnagyobb tagja $\binom{2n}{n}$)

e) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n$, ahol $a_0 = 1$, $a_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(a_n + \dfrac{2}{a_n}\right)$ (útmutatás: feltéve, hogy a sorozat konvergens, állapítsuk meg, hogy mi lehet a határértéke, majd mutassuk meg, hogy a sorozat egy bizonyos indextől kezdve monoton és korlátos)

f) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{n}$ (útmutatás: mutassuk meg, hogy ha minden n esetén $a_n > 0$ és $q_n = \frac{a_{n+1}}{a_n}$ konvergens, akkor $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} q_n$)

4.2. Függvények határértéke

4.5. Feladat. Határozzuk meg a függvényhatárértékeket.

a) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{2x+1}{x^2-2}$

b) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \left(\frac{x^3+3x^2}{x^2+1} - x\right)$

c) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{x+5}{x+1}$

d) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{x^2+4x-5}{x^2-1}$

e) $\displaystyle\lim_{x\to 1+} \frac{x^2+5x-4}{x^2-1}$

f) $\displaystyle\lim_{x\to 1-} \frac{x^2+5x-4}{x^2-1}$

g) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{x^k-1}{x-1}$ $(k\in\mathbb{N})$

h) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \left(\frac{2}{x^2-1} - \frac{3}{x^3-1}\right)$

i) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} x\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)$

j) $\displaystyle\lim_{x\to 2} \frac{x-2}{\sqrt{x+2}-2}$

k) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\tan x - \sin x}{\sin^3 x}$

$l)$ $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 3x}{\sin 5x}$

$m)$ $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \dfrac{\tan x}{2x-\pi}$

$n)$ $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{x^2}$

$o)$ $\lim\limits_{x\to 0} \sqrt[x]{1+x}$

$p)$ $\lim\limits_{x\to \pm\infty} \arctan x$

$q)$ $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin \sin x}{\sin x}$

$r)$ $\lim\limits_{x\to -\infty} xe^x$

$s)$ $\lim\limits_{x\to 0+} x\ln x$

4.3. Folytonosság

4.6. Feladat. Hol vannak és milyen típusúak a függvény szakadási helyei?

$a)$ $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$

$b)$ $f(x) = \dfrac{x}{\sin x}$

$c)$ $f(x) = \dfrac{|x|}{x}$

$d)$ $f(x) = \sin \dfrac{1}{x}$

$e)$ $f(x) = x \sin \dfrac{1}{x}$

$f)$ $f(x) = \arctan \dfrac{1}{x}$

$g)$ $f(x) = \dfrac{x^3+x^2+x-3}{x^4-1}$

$h)$ $f(x) = \lfloor x \rfloor$

$i)$ $f(x) = e^{-\frac{1}{x}}$

$j)$ $f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$

4.7. Feladat. Határozzuk meg az A és B valós paramétereket úgy, hogy az

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{ha } x < -1 \text{ vagy } x > 2, \\ Ax + B & \text{ha } -1 \le x \le 2 \end{cases}$$

függvény folytonos legyen.

4.8. Feladat. Mutassunk példát olyan $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvényre, amely

a) minden pontban folytonos,

b) semelyik pontban sem folytonos,

c) pontosan egy pontban nem folytonos,

d) pontosan egy pontban folytonos.

5. Differenciálszámítás

5.1. Deriváltfüggvény, differenciálhatóság

5.1. Feladat. Számoljuk ki a megadott függvények deriváltját a megadott pontban a definíció alapján.

a) $f(x) = x^2 - x + 3$, $x_0 = -1$

b) $f(x) = \sqrt{2x-5}$, $x_0 > \frac{5}{2}$

c) $f(x) = \dfrac{2x-1}{x+3}$, $x_0 = 3$

d) $f(x) = \sqrt[3]{2x-1}$, $x_0 = 1$

e) $f(x) = |x|$, $x_0 = 0$

5.2. Feladat. Számoljuk ki a következő függvények deriváltfüggvényeit.

a) $f(x) = x^7 + \dfrac{2}{x} - \sqrt{x}$

b) $f(x) = x^7 \cdot \dfrac{2}{x}\sqrt{x}$

c) $f(x) = \cot x \cdot e^x \cdot \sqrt[5]{x} - 3$

d) $f(x) = e^x + x^e + e^e$

e) $f(x) = \dfrac{x^2+2x-1}{x^7+2x+1}$

f) $f(x) = \sin(2x-1)$

g) $f(x) = \tan(\pi x)$

h) $f(x) = e^{\frac{1-x}{1+x}}$

i) $f(x) = \sin x^2 + \sin^2 x$

j) $f(x) = \ln(e^x + e^{-x})$

k) $f(x) = \sqrt[3]{x + \sqrt[3]{x}}$

l) $f(x) = \dfrac{\arctan \frac{1}{x}}{\operatorname{arsinh} \sqrt[3]{x}}$

m) $f(x) = \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}$

n) $f(x) = \operatorname{sgn} x$

o) $f(x) = x \sin x \cos x$

p) $f(x) = \sin^2 x + \cos^2 x$

q) $f(x) = \dfrac{1}{\cos x}$

r) $f(x) = (x^3 - 3x + 8)^{2024}$

s) $f(x) = \dfrac{x^2 + 1}{\sqrt{1 + 2x^2}}$

t) $f(x) = (\sin^3(x) + 2)^7$

u) $f(x) = \sin\sqrt{3x}$

v) $f(x) = x \ln x - x$

w) $f(x) = \arctan \dfrac{x + 1}{x - 1}$

x) $f(x) = \log_2(2x^3 - 4x^2)$

y) $f(x) = x^x$

z) $f(x) = x^{x^x}$

5.3. Feladat. Határozzuk meg az $f(x) = x^2 e^x$ függvény n-edik deriváltfüggvényét.

5.4. Feladat. Határozzuk meg az A, B, C, D valós paramétereket úgy, hogy az

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{ha } x < -1, \\ Ax^3 + Bx^2 + Cx + D & \text{ha } -1 \le x \le 1, \\ 1 & \text{ha } x > 1 \end{cases}$$

függvény mindenhol differenciálható legyen.

5.5. Feladat. Mutassuk meg, hogy az

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{ha } x \neq 0, \\ 0 & \text{ha } x = 0 \end{cases}$$

függvény végtelen sokszor differenciálható.

5.2. Hiperbolikus és inverz függvények

5.6. Feladat. Mutassuk meg az alábbi azonosságokat.

a) $\operatorname{arsinh} x = \ln(x + \sqrt{1 + x^2})$

b) $\tanh \operatorname{arsinh} x = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$

c) $\arctan \sinh x = \arcsin \tanh x$

5.7. Feladat. Deriváljuk az alábbi függvényeket.

a) $f(x) = \operatorname{arsinh} x^3$

b) $f(x) = \operatorname{artanh} \dfrac{1}{x}$

c) $f(x) = \operatorname{arsinh}(\sin 3x)$

d) $f(x) = \exp \operatorname{arcosh} x$

5.3. Zárt intervallumon folytonos függvények, középértéktételek

5.8. Feladat. Határozzuk meg a függvény abszolút maximumát és minimumát a megadott intervallumon.

a) $f(x) = x^3 + 6x^2 - 15x + 3$, $[-6, 6]$

b) $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$, $[-1, 8]$

c) $f(x) = xe^{-x}$, $[1/2, 5]$

d) $f(x) = x^2 \ln x$, $[1, e]$

e) $f(x) = e^{-|x|}$, $[-1, 2]$

5.9. Feladat. Ellenőrizzük a Lagrange-tétel feltételeit és konklúzióját az alábbi függvényekkel, a megadott intervallumokon.

a) $f(x) = 3x^2 - 5$, $[-2, 0]$

b) $f(x) = \dfrac{1}{x}$, $[-1, 1]$

c) $f(x) = \sqrt[3]{x}$, $[-1, 8]$

5.10. Feladat. Mutassuk meg, hogy a $3x^5 + 15x - 2 = 0$ egyenletnek pontosan egy valós gyöke van.

5.11. Feladat. Mutassuk meg, hogy minden $x, y \in \mathbb{R}$ esetén $|\sin x - \sin y| \leq |x - y|$

5.4. Érintő

5.12. Feladat. Határozzuk meg az alábbi függvények grafikonjának érintőjét az adott x_0 abszcisszájú pontban.

a) $f(x) = \sin \sqrt{x}$, $x_0 = \pi^2$

b) $f(x) = x^3 - 8x$, $x_0 = 3$

5.13. Feladat. Írjuk fel az $y = \ln(x^2+1)$ görbének az $y = x+2$ egyenessel párhuzamos/merőleges érintőinek egyenletét.

5.14. Feladat. Milyen összefüggés áll fenn a, b és c között, ha az $f(x) = ax^2 + bx + c$ egyenletű parabola érinti az x-tengelyt?

5.15. Feladat. Milyen szögben metszi egymást az $xy = 12$ és az $x^2 + y^2 = 25$ egyenletű görbe?

5.5. Függvényvizsgálat

5.16. Feladat. Hol vannak f zérushelyei? Hol szigorúan monoton növő, illetve csökkenő a függvény? Hol vannak lokális szélsőértékei? Határozzuk meg hol konvex, illetve konkáv, hol vannak inflexiós helyei! Határozzuk meg az aszimptotáit majd vázoljuk a grafikonját!

a) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$

b) $f(x) = \sin^2 x$

c) $f(x) = x^2 \ln x$

d) $f(x) = e^{-x^2}$

e) $f(x) = xe^x$

f) $f(x) = x + \dfrac{1}{x}$

g) $f(x) = \tanh x$

h) $f(x) = \dfrac{x}{1+x^2}$

i) $f(x) = xe^{-1/x}$

j) $f(x) = \dfrac{x^2}{(x-1)^2}$

k) $f(x) = x^x$

5.17. Feladat. Ábrázoljuk az $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ függvényt, ha $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ paraméterek.

5.6. Taylor-polinomok

5.18. Feladat. Írjuk fel az f függvény x_0 ponthoz tartozó n. Taylor-polinomját.

a) $f(x) = (x-2)^{-2}$, $x_0 = 3$, $n = 3$

b) $f(x) = e^{x^2}$, $x_0 = 0$, $n = 4$

c) $f(x) = \sin x$, $x_0 = \pi$, n tetszőleges

5.19. Feladat. Az $f(x) = e^x$ függvény $x_0 = 0$ ponthoz tartozó Taylor-polinomjai közül melyek közelítik az f függvényt a $[-1, 1]$ intervallumon 2 tizedesjegy pontossággal?

5.20. Feladat. Számítsuk ki $\sqrt[3]{29}$ értékét a négy alapművelet segítségével, 10^{-3} pontossággal.

5.7. Szöveges szélsőérték-feladatok

5.21. Feladat. Egy téglalap alakú, 1×2 méteres kartonpapírból felül nyitott, téglalap alakú dobozt hajtogatunk úgy, hogy a papír négy sarkából négy egybevágó négyzetet vágunk ki, majd felhajtjuk a doboz oldalait. Mekkora négyzeteket kell kivágnunk, hogy a doboz térfogata maximális legyen?

5.22. Feladat. Egy épülő atlétikapályán két párhuzamos egyenes szakaszból és az őket összekötő félkörívekből áll a futópálya. Hogyan kell kialakítani a pálya alakját, hogy a futópálya hossza 400 méter legyen, és a lehető legnagyobb területű téglalap alakú focipálya férjen el a belsejében?

5.23. Feladat. Egy derékszögű háromszög átfogója 10 cm. Maximum mennyi lehet a területe?

6. Integrálszámítás

6.1. Primitív függvény

6.1. Feladat. Határozzuk meg a primitív függvényeket.

a) $\displaystyle\int \frac{4+7x+x^4+\sqrt{x}}{x^2}\,\mathrm{d}x$

b) $\displaystyle\int \frac{x^2}{x^2+1}\,\mathrm{d}x$

c) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{2-2x^2}}\,\mathrm{d}x$

d) $\displaystyle\int \tan^2 x\,\mathrm{d}x$

e) $\displaystyle\int e^{-2x}\,\mathrm{d}x$

f) $\displaystyle\int \frac{3}{1-5x}\,\mathrm{d}x$

g) $\displaystyle\int \frac{x}{x^2+1}\,\mathrm{d}x$

h) $\displaystyle\int \sin(2x)\,\mathrm{d}x$

i) $\displaystyle\int \sin^2(x)\,\mathrm{d}x$

j) $\displaystyle\int \cos^3(x)\,\mathrm{d}x$

k) $\displaystyle\int \sinh^3(x)\,\mathrm{d}x$

l) $\displaystyle\int \frac{\sinh x}{\sqrt{\cosh x}}\,\mathrm{d}x$

m) $\displaystyle\int \frac{1}{\sin x}\,\mathrm{d}x$

6.2. Feladat. Határozzuk meg a primitív függvényeket.

a) $\displaystyle\int x^2e^x\,\mathrm{d}x$

b) $\displaystyle\int x\cos(x)\,\mathrm{d}x$

c) $\displaystyle\int \sin(x)\cos(2x)\,\mathrm{d}x$

d) $\displaystyle\int \ln(x)\,\mathrm{d}x$

e) $\displaystyle\int e^x\sin x\,\mathrm{d}x$

f) $\int \ln^2(x)\,\mathrm{d}x$

g) $\int \arcsin(x)\,\mathrm{d}x$

h) $\int \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x$

i) $\int \sqrt{3+2x+x^2}\,\mathrm{d}x$

6.3. Feladat. Határozzuk meg a primitív függvényeket.

a) $\int \sqrt{1+x^2}\,\mathrm{d}x$

b) $\int (3-2x-x^2)^{\frac{3}{2}}\,\mathrm{d}x$

c) $\int \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}\,\mathrm{d}x$

6.4. Feladat. Határozzuk meg a primitív függvényeket.

a) $\int \frac{1}{x^2-x}\,\mathrm{d}x$

b) $\int \frac{1}{x^4+x^2}\,\mathrm{d}x$

c) $\int \frac{x^3-3}{x^3-x}\,\mathrm{d}x$

d) $\int \frac{x^4+6x^3-11x^2-8x-1}{x^2-x-2}\,\mathrm{d}x$

e) $\int \frac{1-x^3}{x^5+2x^3+x}\,\mathrm{d}x$

f) $\int \frac{e^x+1}{e^{2x}+e^x+2}\,\mathrm{d}x$

g) $\int \frac{e^{2x}}{e^{3x}+1}\,\mathrm{d}x$

h) $\int \frac{1-\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$

i) $\int \frac{1}{\sin x+\cos x-2}\,\mathrm{d}x$

6.2. Határozott intergál alkalmazásai

6.5. Feladat. Számítsuk ki a következő síkidomok területét.

a) a $\log\frac{x}{2}$ függvény grafikonja, az x tengely, az $x=1$ és $x=e$ egyenesek által határolt korlátos síkidom

b) $y=x^2$ és $y=1-x^2$ görbék által határolt korlátos síkidom

c) egységkör

6.6. Feladat. Számítsuk ki az alábbi görbék ívhosszát.

a) $y = \frac{1}{2}(x^2 - 1)$, $x \in [-1, 1]$

b) $y = \log x$, $x \in [\sqrt{2}, \sqrt{8}]$

c) $x(t) = t \cos t$, $y(t) = t \sin t$ paraméteres görbe a $0 \leq t \leq 2\pi$ paraméterértékek között

d) egységkör

6.7. Feladat. Számítsuk ki az alábbi egyenletű görbeívek x tengely körüli megforgatásával keletkező forgás és a megadott intervallum végpontjaiban az x tengelyre merőlegesen állított síkok által határolt forgástestek térfogatát.

a) $y = x - 1/x$, $[1, 3]$

b) $y = \sin x$, $[0, 2\pi]$

c) $y = \sqrt{1 - x^2}$, $[-1, 1]$

6.8. Feladat. Számítsuk ki az alábbi egyenletű görbeívek x tengely körüli megforgatásával keletkező forgásfelületek felszínét.

a) $y = \sqrt{x}$, $x \in [0, 1]$

b) $y = \sin x$, $x \in [0, \pi]$

c) $y = \sqrt{1 - x^2}$, $[-1, 1]$

6.9. Feladat. Határozzuk meg az alábbi síkidomok tömegközéppontját.

a) $y = x^3$, $y = 0$, $x = 1$ görbék által határolt korlátos síkidom

b) negyedkör

6.3. Improprius integrál

6.10. Feladat. Számítsuk ki az alábbi improprius integrálok értékét.

a) $\displaystyle\int_0^\infty e^{-x} \, \mathrm{d}x$

b) $\displaystyle\int_0^\infty x^n e^{-x} \, \mathrm{d}x$

c) $\displaystyle\int_{-1}^1 x^{-2/3} \, \mathrm{d}x$

d) $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty \frac{1}{1 + x^2} \, \mathrm{d}x$

e) $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty \frac{x}{1 + x^2} \, \mathrm{d}x$

f) $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty \frac{1}{1 + x^4} \, \mathrm{d}x$

g) $\displaystyle\int_2^\infty \frac{1}{x} \, \mathrm{d}x$

h) $\displaystyle\int_2^{\infty} \frac{1}{x \log^2 x} \, \mathrm{d}x$