

F1. Oldja meg \mathbb{R} -en a következő egyenleteket és a megoldáshalmazokat szemléltesse a számegyenesen:

$$(a) |x^2 - 16| = 12, \quad (b) \left| \frac{3x + 2}{x - 1} \right| = 3,$$
$$(c) \sqrt{x - 4} = \sqrt{x + 5} - 9.$$

F2. Oldja meg \mathbb{R} -en a következő egyenlőtlenségeket és a megoldáshalmazokat szemléltesse a számegyenesen:

$$(a) \frac{3x + 4}{1 - 2x} < \frac{x - 1}{x + 1}, \quad (b) 8x^2 - 10x + 2 \leq 2,$$
$$(c) \frac{3x^2 + 7x - 4}{x^2 + 2x - 3} \leq 2, \quad (d) \left| \frac{x}{x + 1} \right| > \frac{x}{x + 1}.$$

F3. Legyen $A := \{2, 3, 4\}$, $B := \{2, 5, 6\}$, $C := \{5, 6, 2\}$ és $D := \{6\}$.

(a) Döntse el, hogy a következő állítások közül melyek igazak: $4 \in C$, $5 \in C$, $A \subset B$, $D \subset C$, $B = C$ és $A = B$.

(b) Határozza meg az $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$, $(A \cap B) \setminus (A \cup B)$ halmazokat.

F4. Igazolja direkt és indirekt módon azt, hogy

$$-x^2 + 5x - 4 > 0 \Rightarrow x > 0,$$

ahol $x \in \mathbb{R}$.

F5. Szemléltesse a síkon azon (x, y) pontok halmazát, amelyekre a következők teljesülnek:

$$(a) |x + y| = 1; \quad (b) |x + y| \geq 1.$$

F6. Ábrázolja a síkon az alábbi egyenlőtlenségrendszer megoldáshalmazát:

$$(a) x^2 + y^2 - 4x + 2y > 4 \text{ és } x > 2;$$
$$(b) x^2 + y^2 + 6y < 0 \text{ és } y > -3.$$

F7. Alakítsa szorzattá a következő kifejezéseket:

$$(a) -2x^2 + 7x - 3; \quad (b) x^4 + x^2 + 1.$$

F8. Végezze el a következő műveleteket (határozza meg a hányadost és a maradékot):

$$(a) (x^2 - x - 20) : (x - 5), \quad (b) (x^3 - 1) : (x - 1),$$
$$(c) (x^3 - 3x^2 - x - 1) : (3x^2 - 2x + 1),$$
$$(d) (3x^8 + x^2 + 1) : (x^3 - 2x + 1).$$

F9. Határozza meg a következő polinomok valamennyi valós gyökét:

- (a) $x^3 - 2x + 1$; (b) $x^3 + x^2 - 14x - 24$;
 (c) $x^4 - 2x^3 + 4x^2 + 2x - 5$; (d) $x^3 - 1$.

F10. A c valós szám mely értékére lesz az $x_1 = -2$ szám gyöke az

$$x^4 + cx^3 + x^2 - 4$$

polinomnak? Határozza meg az így adódó polinom valós gyökeit, és írja fel a polinom gyöktényezős alakját.

F11. Vázolja az alábbi függvények grafikonját:

- (a) $2x^2 - 5x + 3$ ($x \in \mathbb{R}$); (b) $\frac{2x+3}{x-1}$ ($x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$);
 (c) $\frac{\sqrt{3x-1}}{4} + 1$ ($x \in [\frac{1}{3}, +\infty)$).

F12. Írja fel az $f \circ g$ és a $g \circ f$ kompozíciót a következő függvények esetében:

- (a) $f(x) := \sqrt{|x|}$ ($x \in \mathbb{R}$), $g(u) := u^2$ ($u \in \mathbb{R}$);
 (b) $f(x) := \sin x$ ($x \in \mathbb{R}$), $g(u) := \frac{1}{u}$ ($u > 0$).

F13. Mutassa meg, hogy az alábbi függvények invertálhatók, és állítsa elő az inverzüket:

- (a) $\mathbb{R} \ni x \mapsto 2x - 3$; (b) $\mathbb{R} \ni x \mapsto \sqrt[5]{x+1}$;
 (c) $\mathbb{R} \setminus \{-3/2\} \ni x \mapsto \frac{x-2}{2x+3}$;
 (d) $f(x) := \begin{cases} \frac{7x-5}{3}, & \text{ha } -1 \leq x < 1 \\ \frac{2}{1+x}, & \text{ha } 1 \leq x \leq 2; \end{cases}$

F14. Számítsa ki az következő határértékeket:

- (a) $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{x-1} - \frac{3}{x^3-1} \right)$; (b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x+x^2}-1}{x}$;
 (c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-\cos x}{x}$; (d) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{x^3}$;
 (e) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2+1}{3x^2-2x+5}$; (f) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2-2x+1}{x^3+1000}$.

F15. Határozza meg az alábbi függvények szakadási helyeit és azok típusait:

$$(a) f(x) := \begin{cases} \frac{x^2 + 2x - 8}{x^2 - x - 2}, & \text{ha } x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 2\} \\ 2, & \text{ha } x = 2 \\ 0, & \text{ha } x = -1; \end{cases}$$

$$(b) f(x) := \begin{cases} \left| \frac{\sin x}{x} \right|, & \text{ha } x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \\ 1, & \text{ha } x = 0; \end{cases}$$

$$(c) f(x) := \begin{cases} e^{-1/x^2}, & \text{ha } x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \\ 1, & \text{ha } x = 0. \end{cases}$$