Matematika A1a – 2019. december 16.

Elmélet ($5 \times 3 = 15$ pont)

1. Mikor nevezünk egy függvényt invertálhatónak?

   Megoldás. Egy $f : D_f \to \mathbb{R}$ függvény ($D_f \subseteq \mathbb{R}$) invertálható, ha az értékkészletének minden elemét egyszer veszi fel, azaz $f(x_1) = f(x_2)$ esetén $x_1 = x_2$.

2. Mondja ki a Bolzano-tételt.

   Megoldás. Ha $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ folytonos függvény, akkor felvesz minden $f(a)$ és $f(b)$ közötti értéket.

3. Mondja ki a Lagrange-féle középértéktételt.

   Megoldás. Ha az $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ függvény az $[a, b]$-n folytonos és (a, b)-n differenciálható, akkor van olyan $x \in (a, b)$ belső pont, amire

$$f'(x) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

4. Mondja ki a Newton–Leibniz-tételt.

   Megoldás. Ha $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ integrálható $[a, b]$-n, és $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ primitív függvénye f-nek az (a, b)-n (azaz F differenciálható $(a, b) - n$, és itt $F'(x) = f(x)$), továbbá F folytonos $[a, b]$-n, akkor

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a).$$

5. Definiálja a határozatlan integrál fogalmát.

   Megoldás. Az $f : I \to \mathbb{R}$ ($I \subseteq \mathbb{R}$ nyílt intervallum) határozatlan integrálja az összes primitív függvényének halmaza. Jelölés: $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x$

Feladatok ($7 + 7 + 10 + 7 + 7 + 7 = 45$ pont)

1. Invertálható-e az $f(x) = \frac{x^3+2}{7-5x^3}$ függvény? Ha igen, adja meg az inverzét.

   Megoldás. Az $f(x) = y$ egyenletet kell megoldani az $y \in \mathbb{R}$ paraméter függvényében: f akkor invertálható, ha mindig legfeljebb 1 megoldás van és az inverz értéke az y pontban ez egyenlet megoldása (ha létezik). Azonos átalakításokat végzünk:

$$\begin{aligned}
\frac{x^3 + 2}{7 - 5x^3} &= y \\
x^3 + 2 &= y(7 - 5x^3) \\
(1 + 5y)x^3 &= 7y - 2 \\
x^3 &= \frac{7y - 2}{1 + 5y} \\
x &= \sqrt[3]{\frac{7y - 2}{1 + 5y}},
\end{aligned}$$

   ha $y \neq -\frac{1}{5}$, tehát invertálható, $D_{f^{-1}} = \mathbb{R} \setminus \{-\frac{1}{5}\}$ és

$$f^{-1}(y) = \sqrt[3]{\frac{7y - 2}{1 + 5y}}.$$

2. Egy teherautó üzemeltetésének költsége óránként $\frac{1}{2}v^2$ forint, ha a sebessége v km/h. A gépjárművezető bérköltsége óránként 5000 forint. Milyen sebesség mellett minimális a teherautóval történő szállítás kilóméterenkénti teljes költsége?

   Megoldás. Ha a jármű v sebességgel halad, akkor egy kilómétert $\frac{1}{v}$ óra alatt tesz meg, ennek a költsége $f(v) = \frac{1}{v}\left(\frac{1}{2}v^2 + 5000\right)$ forint. Ennek a függvénynek a minimumát keressük a $(0, \infty)$ intervallumon. Az elsőrendű szükséges feltétel szerint lokális minimum a derivált zérushelyeinél lehet:

$$f'(v) = \left(\frac{1}{2}v + \frac{5000}{v}\right)' = \frac{1}{2} - \frac{5000}{v^2},$$

   ez akkor 0, ha $v = 100$. Mivel $f''(v) = \frac{10000}{v^3}$ az egész intervallumon pozitív, ez valóban globális minimumhely.

3. Végezze el az $f(x) = x(4-x)^3$ függvény teljes függvényvizsgálatát (értelmezési tartomány, zérushely, paritás, periodicitás, határértékek, aszimptoták, monotonitás, lokális szélsőértékek, konvexitás, ábrázolás, értékkészlet).

   Megoldás. $D_f = \mathbb{R}$, nem páros, nem páratlan, nem periodikus. A zérushelyek 0 és 4. A határértékek

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} -x^4\left(1 - \frac{4}{x}\right)^3 = -\infty.$$

   A deriváltak

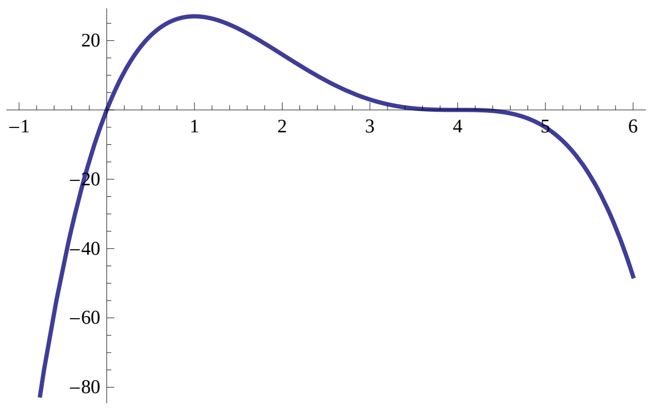
$$f'(x) = (4-x)^3 + x\cdot 3(4-x)^2\cdot(-1) = -4(x-4)^2(x-1)$$
$$f''(x) = -4\cdot 2(x-4)(x-1) - 4(x-4)^2 = -12(x-4)(x-2),$$

   f' zérushelyei 4 és 1, f'' zérushelyei 4 és 2. Az előjeleket a következő táblázat foglalja össze:

	$(-\infty;1)$	1	$(1;2)$	2	$(2;4)$	4	$(4;\infty)$
f	◜	max	◝	infl	◟	infl	◝
f'	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$-$
f''	$-$	$-$	$-$	0	$+$	0	$-$

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} -x^3\left(1 - \frac{4}{x}\right)^3 = \mp\infty,$$

   tehát egyik irányban sincs ferde aszimptota. A maximum $f(1) = 27$, így $R_f = (-\infty; 27]$, grafikon:



4. Számítsa ki a következő integrált.

$$\int \frac{\tan x}{\cos^3 x}\,\mathrm{d}x$$

Megoldás.

$$\int \frac{\tan x}{\cos^3 x}\,\mathrm{d}x = -\int -\sin(x)\cos^{-4}(x)\,\mathrm{d}x = -\frac{\cos^{-3} x}{-3} = \frac{1}{3\cos^3 x} + C.$$

5. Határozza meg az $y = x^3$ és $y = \sqrt[3]{x}$ egyenletű görbék által határolt síkidom $x \geq 0, y \geq 0$ síknegyedbe eső részének területét.

   Megoldás. Először a görbék metszéspontjait határozzuk meg $y = x^3$ és $y = \sqrt[3]{x}$ egyenletrendszer megoldásával. y kiküszöbölése és harmadik hatványra emelés után $x = x^9$, azaz $0 = x(x^8 - 1)$ adódik, aminek nemnegatív megoldásai 0 és 1. A $[0;1]$ intervallumon $\sqrt[3]{x} \geq x^3$, tehát a terület

$$T = \int_0^1 \left(\sqrt[3]{x} - x^3\right)\mathrm{d}x = \left[\frac{3}{4}x^{4/3} - \frac{1}{4}x^4\right]_0^1 = \frac{1}{2}.$$

6. Számítsa ki az $f(x) = xe^{-x}$, $x \in [0,1]$ függvény grafikonja alatti terület x tengely körüli megforgatásával adódó forgástest térfogatát.

   Megoldás. A térfogatot πf^2 integrálásával kapjuk, az integrált a parciális integrálás módszerével lehet kiszámítani:

$$\begin{aligned}
V &= \pi \int_0^1 f(x)^2\,\mathrm{d}x \\
&= \pi \int_0^1 x^2 e^{-2x}\,\mathrm{d}x \\
&= \pi \left[-x^2 \frac{e^{-2x}}{2}\right]_0^1 - \pi \int_0^1 2x \left(-\frac{e^{-2x}}{2}\right)\mathrm{d}x \\
&= \pi \left[-x^2 \frac{e^{-2x}}{2}\right]_0^1 + \pi \int_0^1 xe^{-2x}\,\mathrm{d}x \\
&= \pi \left[-x^2 \frac{e^{-2x}}{2} - x\frac{e^{-2x}}{2}\right]_0^1 - \pi \int_0^1 \left(-\frac{e^{-2x}}{2}\right)\mathrm{d}x \\
&= \pi \left[-x^2 \frac{e^{-2x}}{2} - x\frac{e^{-2x}}{2} - \frac{e^{-2x}}{4}\right]_0^1 = \left(\frac{1}{4} - \frac{5}{4e^2}\right)\pi.
\end{aligned}$$