Matematika A1a – 2020. január 6.

Elmélet ($5 \times 3 = 15$ pont)

1. Definiálja az inverz függvény fogalmát.

   Megoldás. Egy $f : D_f \to \mathbb{R}$ invertálható függvény ($D_f \subseteq \mathbb{R}$) inverze az az $f^{-1} : R_f \to D_f$ függvény, amelyre $f^{-1}(f(x)) = x$ minden $x \in D_f$-re.

2. Definiálja azt a fogalmat, amelyre a $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = -\infty$ jelölést használjuk.

   Megoldás. Az $f : D_f \to \mathbb{R}$ függvény ($D_f \subseteq \mathbb{R}$) határértéke az x_0 pontban $-\infty$, ha minden $K \in \mathbb{R}$-hez létezik $\delta > 0$, hogy $0 < |x - x_0| < \delta$ esetén $x \in D_f$ és $f(x) < K$.

3. Ismertesse a lokális szélsőérték létezésének elsőrendű elégséges feltételét.

   Megoldás. Ha az $f : D_f \to \mathbb{R}$ differenciálható függvényre ($D_f \subseteq \mathbb{R}$) $f'(x_0) = 0$ és x_0-ban előjelet vált a derivált függvény, akkor a függvénynek x_0-ban lokális szélsőértéke van.

4. Definiálja a primitív függvény fogalmát.

   Megoldás. Az $f : I \to \mathbb{R}$ ($I \subseteq \mathbb{R}$ nyílt intervallum) primitív függvénye $F : I \to \mathbb{R}$, ha F differenciálható I-n és $F'(x) = f(x)$ minden $x \in I$ esetén.

5. Hogyan lehet kiszámítani egy forgástest palástjának a felszínét?

   Megoldás. Az $f : [a, b] \to \mathbb{R}_+$ differenciálható függvény grafikonját az x tengely körül megforgatva kapott forgástest palástjának felszíne $2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + f'(x)^2}\,\mathrm{d}x$.

Feladatok ($7 + 7 + 10 + 7 + 7 + 7 = 45$ pont)

1. Határozza meg az

   $$f(x) = \begin{cases} \arctan \frac{1}{x} & \text{ha } x \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\} \\ \frac{\pi}{2} & \text{ha } x \in \{0, 1\} \end{cases}$$

   függvény szakadási helyeit és azok fajtáit.

   Megoldás. Ha $x \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$, akkor a függvény az $\arctan \frac{1}{x}$ függvénnyel egyezik meg, tehát folytonos. Az $x = 1$ pontban a határértéke

   $$\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1} \arctan \frac{1}{x} = \arctan 1 = \frac{\pi}{4},$$

   tehát létezik és nem egyenlő a helyettesítési értékkel. Itt megszüntethető szakadási hely van.
   Az $x = 0$ pontban a határértékek

   $$\lim_{x\to 0+} f(x) = \lim_{x\to 0+} \arctan \frac{1}{x} = \lim_{t\to\infty} \arctan t = \frac{\pi}{2}$$
   $$\lim_{x\to 0-} f(x) = \lim_{x\to 0-} \arctan \frac{1}{x} = \lim_{t\to -\infty} \arctan t = -\frac{\pi}{2}.$$

   Mindkét oldalról létezik és véges a határérték, de különböznek, így ebben a pontban a függvényken ugrása van.

2. Egy üzemben havi x darab termék előállításának teljes költsége $25000 + 10x^2$ forint, az elkészült termékeket darabonként 5000 forint áron lehet értékesíteni. Milyen mennyiség mellett maximális a nyereség?

Megoldás. x darab termék előállítása esetén a teljes árbevétel $5000x$. A bevétel és a költség különbsége $f(x) = 5000x - 25000 - 10x^2$, ennek a függvénynek keressük a maximumát a $(0, \infty)$ intervallumon. Az elsőrendű szükséges feltétel szerint lokális maximum a derivált zérushelyeinél lehet:

$$f'(x) = 5000 - 20x,$$

ez akkor 0, ha $x = 250$. Mivel $f''(x) = -20 < 0$, ez valóban globális maximumhely.

3. Végezze el az $f(x) = \dfrac{5}{1+e^x}$ függvény teljes függvényvizsgálatát (értelmezési tartomány, zérushely, paritás, periodicitás, határértékek, aszimptoták, monotonitás, lokális szélsőértékek, konvexitás, ábrázolás, értékkészlet).

Megoldás. $D_f = \mathbb{R}$, nem páros, nem páratlan, nem periodikus, nincs zérushelye. A határértékek

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{e^x}\frac{5}{e^{-x}+1} = 0$$
$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{5}{1+e^x} = 5,$$

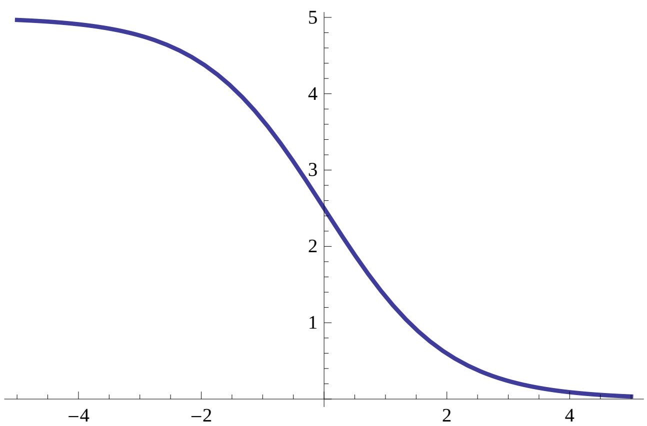
mivel $\lim_{x\to\infty} e^{-x} = \lim_{x\to-\infty} e^x = 0$. A deriváltak

$$f'(x) = -\frac{5e^x}{(1+e^x)^2}$$
$$f''(x) = -\frac{5e^x(1+e^x)^2 - 5e^x \cdot 2(1+e^x)e^x}{(1+e^x)^4} = \frac{5e^x(e^x-1)}{(1+e^x)^3}.$$

f' sehol nem 0, f'' zérushelye $x = 0$. Az előjeleket a következő táblázat foglalja össze:

	$(-\infty; 0)$	0	$(0; \infty)$
f	◝	infl	◟
f'	$-$	$-$	$-$
f''	$-$	0	$+$

Mindkét irányban vízszintes aszimptota van ($y = 5$ és $y = 0$). $R_f = (0; 5)$, grafikon:



4. Számítsa ki a következő integrált.

$$\int \frac{(\sqrt{x}+1)^2}{x\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$$

Megoldás.

$$\int \frac{(\sqrt{x}+1)^2}{x\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = \int \left(x^{-3/2} + 2x^{-1} + x^{-1/2}\right)\mathrm{d}x = -\frac{2}{\sqrt{x}} + 2\ln x + 2\sqrt{x} + C.$$

5. Számítsa ki a következő integrált.

$$\int_0^\pi x\sin x\,\mathrm{d}x$$

Megoldás.

$$\int_0^\pi x\sin x\,\mathrm{d}x = [-x\cos x]_0^\pi - \int_0^\pi (-\cos x)\,\mathrm{d}x = [-x\cos x + \sin x]_0^\pi = \pi.$$

6. Számítsa ki a következő integrált.

$$\int_1^\infty \frac{1}{x(x+1)}\,\mathrm{d}x$$

Megoldás. Az integrandust parciális törtekre bontjuk, azaz olyan $A, B \in \mathbb{R}$ számokat keresünk, amellyel

$$\frac{1}{x(x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1}$$

azonosság. Szorozzuk meg mindkét oldalt a közös nevezővel: $1 = A(x+1) + Bx = (A+B)x + A$, a kapott két polinom akkor egyenlő, ha $0 = A + B$ és $1 = A$, azaz $B = -1$. Az integrál ezzel

$$\begin{aligned}
\int_1^\infty \frac{1}{x(x+1)}\,\mathrm{d}x &= \lim_{b\to\infty} \int_1^b \frac{1}{x(x+1)}\,\mathrm{d}x \\
&= \lim_{b\to\infty} \int_1^b \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}\right)\mathrm{d}x \\
&= \lim_{b\to\infty} [\ln(x) - \ln(x+1)]_1^b \\
&= \lim_{b\to\infty} (\ln(b) - \ln(b+1) - \ln(1) + \ln(2)) \\
&= \lim_{b\to\infty} \ln\frac{2b}{b+1} \\
&= \lim_{b\to\infty} \ln\frac{2}{1+\frac{1}{b}} = \ln 2.
\end{aligned}$$