Matematika A1a – 2020. január 20.

Elmélet ($5 \times 3 = 15$ pont)

1. Mondja ki a kis Bézout-tételt.

   Megoldás. Ha x_0 gyöke egy $p(x)$ polinomnak, akkor a hozzá tartozó $x - x_0$ gyöktényező kiemelhető, azaz létezik olyan $q(x)$ polinom, hogy $p(x) = (x - x_0)q(x)$.

2. Definiálja azt a fogalmat, amelyre a $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ jelölést használjuk.

   Megoldás. Az $f : D_f \to \mathbb{R}$ függvény ($D_f \subseteq \mathbb{R}$) határértéke $-\infty$-ben $-\infty$, ha minden $K \in \mathbb{R}$-hez létezik $L \in \mathbb{R}$, hogy $x < L$ esetén $x \in D_f$ és $f(x) < K$.

3. Mikor nevezünk egy függvényt differenciálhatónak?

   Megoldás. Egy $f : D_f \to \mathbb{R}$ függvény ($D_f \subseteq \mathbb{R}$) differenciálható, ha minden $x_0 \in D_f$ pontban differenciálható.

4. Definiálja a határozatlan integrál fogalmát.

   Megoldás. Az $f : I \to \mathbb{R}$ ($I \subseteq \mathbb{R}$ nyílt intervallum) határozatlan integrálja az összes primitív függvényének halmaza. Jelölés: $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x$

5. Hogyan lehet kiszámítani egy valós függvény grafikonjának ívhosszát?

   Megoldás. Az $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ differenciálható függvény grafikonjának az ívhossza $\displaystyle\int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2}\,\mathrm{d}x$.

Feladatok ($7 + 7 + 10 + 7 + 7 + 7 = 45$ pont)

1. Határozza meg az $x^4 - x^3 - 5x^2 + 3x + 2$ polinom összes valós gyökét.

   Megoldás. Mivel a polinom negyedfokú és egész együtthatós, először az esetleges egész gyököket keressük meg, ezek a konstans tag osztói közül kerülhetnek ki: $-2, -1, 1, 2$. Behelyettesítéssel láthatjuk, hogy -2 és 1 is gyök. A kis Bézout-tétel szerint a polinom osztható az ezekhez tartozó gyöktényezőkkel, így a szorzatukkal is, vagyis az $(x+2)(x-1) = x^2+x-2$ polinommal. Polinomosztással kapjuk, hogy $x^4-x^3-5x^2+3x+2 = (x+2)(x-1)(x^2-2x-1)$. Az x^2-2x-1 hányados másodfokú, ennek a gyökeit a megoldóképlettel határozhatjuk meg:

   $$x_{\pm} = \frac{2 \pm \sqrt{2^2 - 4(-1)}}{2} = 1 \pm \sqrt{2}.$$

   Az eredeti polinom összes gyöke tehát $-2, 1, 1+\sqrt{2}, 1-\sqrt{2}$.

2. Egy cég a termékét darabonként 1000 forint költséggel tudja előállítani és 1100 forint áron értékesíteni. Egy piackutatás megállapította, hogy az árat x forinttal csökkentve az eladások $2x$ százalékkal növekednének. Mennyivel érdemes csökkenteni az árat, hogy a teljes nyereség maximális legyen?

   Megoldás. Ha x forinttal csökken az ár, akkor $100 - x$ forint a darabonként elért nyereség, miközben az eladott darabszám az eredeti $(1 + \frac{2x}{100})$-szorosa. Eszerint az

   $$f(x) = \left(1 + \frac{2x}{100}\right)(100 - x) = 100 + x - \frac{x^2}{50}$$

   függvény maximumát keressük. Az elsőrendű szükséges feltétel szerint lokális maximum a derivált zérushelyeinél lehet:

   $$f'(x) = 1 - \frac{x}{25},$$

   ez akkor 0, ha $x = 25$. Mivel $f''(x) = -\frac{1}{25} < 0$, ez valóban globális maximumhely.

3. Végezze el az $f(x) = x^2 \ln x$ függvény teljes függvényvizsgálatát (értelmezési tartomány, zérushely, paritás, periodicitás, határértékek, aszimptoták, monotonitás, lokális szélsőértékek, konvexitás, ábrázolás, értékkészlet).

Megoldás. $D_f = (0; \infty)$, nem páros, nem páratlan, nem periodikus. $x^2 \neq 0$ az értelmezési tartományon, f zérushelye megegyezik ln zérushelyével, tehát $x = 1$. A határértékek

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} x^2 \ln x = \infty$$

$$\lim_{x\to 0+} f(x) = \lim_{x\to 0+} \frac{\ln x}{x^{-2}} = \lim_{x\to 0+} \frac{\frac{1}{x}}{-2x^{-3}} = \lim_{x\to 0+} -\frac{1}{2}x^2 = 0.$$

A deriváltak

$$f'(x) = 2x\ln(x) + x^2\frac{1}{x} = 2x\ln(x) + x$$

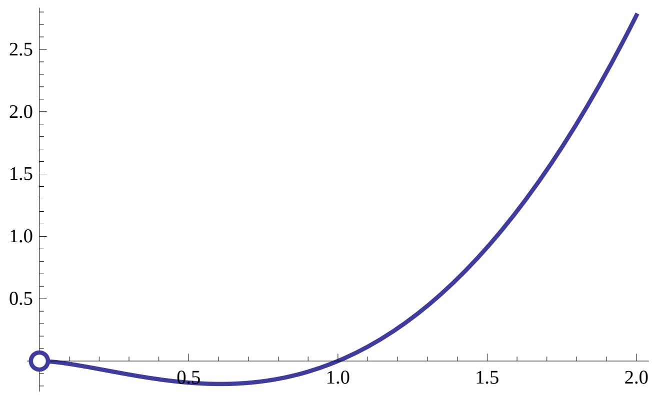
$$f''(x) = 2\ln(x) + 2x\frac{1}{x} + 1 = 2\ln(x) + 3.$$

f' zérushelye $2\ln x = -1$ alapján $x = e^{-1/2}$, f'' zérushelye $e^{-3/2}$. Az előjeleket a következő táblázat foglalja össze:

	$(0; e^{-3/2})$	$e^{-3/2}$	$(e^{-3/2}; e^{-1/2})$	$e^{-1/2}$	$(e^{-1/2}; \infty)$
f	$\searrow$	infl	$\searrow$	min	$\nearrow$
f'	$-$	$-$	$-$	0	$+$
f''	$-$	0	$+$	$+$	$+$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} x\ln x = \infty$$

alapján nincs ferde aszimptota. A minimum értéke $f(e^{-1/2}) = -\frac{1}{2e}$, $R_f = (-\frac{1}{2e}; \infty)$, grafikon:



4. Számítsa ki a következő integrált.

$$\int (x^2 - 1)\cos(2x)\,\mathrm{d}x$$

Megoldás. A parciális integrálás módszerét használjuk:

$$\begin{aligned}
\int (x^2-1)\cos(2x)\,\mathrm{d}x &= (x^2-1)\frac{\sin(2x)}{2} - \int 2x\frac{\sin(2x)}{2}\,\mathrm{d}x \\
&= (x^2-1)\frac{\sin(2x)}{2} - \int x\sin(2x)\,\mathrm{d}x \\
&= (x^2-1)\frac{\sin(2x)}{2} - \left(x\frac{-\cos(2x)}{2} - \int \frac{-\cos(2x)}{2}\,\mathrm{d}x\right) \\
&= (x^2-1)\frac{\sin(2x)}{2} + x\frac{\cos(2x)}{2} - \frac{\sin(2x)}{4} + C.
\end{aligned}$$

5. Számítsa ki a következő integrált.

$$\int_1^{20} \frac{2}{\sqrt[3]{x+7}}\,\mathrm{d}x$$

Megoldás. A Newton–Leibniz-tétel felhasználásával

$$\int_1^{20} \frac{2}{\sqrt[3]{x+7}}\,\mathrm{d}x = 2\int_1^{20} (x+7)^{-1/3}\,\mathrm{d}x = 2\left[\frac{(x+7)^{2/3}}{\frac{2}{3}}\right]_1^{20} = 3\left[(x+7)^{2/3}\right]_1^{20} = 3\left(27^{2/3} - 8^{2/3}\right) = 15.$$

6. Számítsa ki az $f(x) = 7 + 3x$, $x \in [-1, 1]$ függvény grafikonjának az x tengely körüli megforgatásával adódó forgásfelület felszínét (palást).

Megoldás. A felszínt $2\pi f\sqrt{1 + f'^2}$ integrálásával kapjuk:

$$\begin{aligned} A &= 2\pi \int_{-1}^{1} f(x)\sqrt{1 + f'(x)^2}\,\mathrm{d}x \\ &= 2\pi \int_{-1}^{1} (7 + 3x)\sqrt{1 + 3^2}\,\mathrm{d}x \\ &= 2\sqrt{10}\pi \left[7x + \frac{3}{2}x^2\right]_{-1}^{1} = 28\sqrt{10}\pi. \end{aligned}$$