Matematika A1a – 2020. január 27.

Elmélet ($5 \times 3 = 15$ pont)

1. Mikor nevezünk egy függvényt monoton csökkenőnek?

   Megoldás. Egy $f : D_f \to \mathbb{R}$ függvény ($D_f \subseteq \mathbb{R}$) monoton csökken, ha $x_1 < x_2$ ($x_1, x_2 \in D_f$) esetén $f(x_1) \geq f(x_2)$.

2. Mondja ki a Weierstrass-tételt.

   Megoldás. Ha $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ folytonos függvény, akkor van olyan $\alpha, \beta \in [a, b]$, melyekre $f(\alpha) \leq f(x) \leq f(\beta)$ minden $x \in [a, b]$-re.

3. Ismertesse a lokális szélsőérték létezésének (elsőrendű) szükséges feltételét.

   Megoldás. Ha az $f : D_f \to \mathbb{R}$ függvénynek ($D_f \subseteq \mathbb{R}$) az $x_0 \in D_f$ pontban lokális szélsőértéke (minimuma vagy maximuma) van és ebben a pontban differenciálható, akkor $f'(x_0) = 0$.

4. Hogyan lehet kiszámítani egy forgástest térfogatát?

   Megoldás. Az $f : [a, b] \to \mathbb{R}_+$ függvény grafikonját az x tengely körül megforgatva kapott forgástest térfogata $\pi \int_a^b f(x)^2 \, dx$.

5. Definiálja a primitív függvény fogalmát.

   Megoldás. Az $f : I \to \mathbb{R}$ ($I \subseteq \mathbb{R}$ nyílt intervallum) primitív függvénye $F : I \to \mathbb{R}$, ha F differenciálható I-n és $F'(x) = f(x)$ minden $x \in I$ esetén.

Feladatok ($7 + 7 + 10 + 7 + 7 + 7 = 45$ pont)

1. Határozza meg az

$$f(x) = \begin{cases} \frac{8-2x}{x^2-5x+4} & \text{ha } x \in \mathbb{R} \setminus \{1, 4\} \\ 0 & \text{ha } x \in \{1, 4\} \end{cases}$$

   függvény szakadási helyeit és azok fajtáit.

   Megoldás. Ha $x \in \mathbb{R} \setminus \{1, 4\}$, akkor a függvény egy racionális törtfüggvénnyel egyezik meg, tehát folytonos. Az $x = 1$ pontban

$$\lim_{x \to 1\pm} f(x) = \lim_{x \to 1\pm} \frac{-2(x-4)}{(x-4)(x-1)} = \lim_{x \to 1\pm} -\frac{2}{x-1} = \mp\infty,$$

   tehát szinguláris (másodfajú) szakadási hely van.
   Az $x = 4$ pontban a határérték

$$\lim_{x \to 4} f(x) = \lim_{x \to 4} -\frac{2}{x-1} = -\frac{2}{3},$$

   tehát létezik és véges, de nem egyenlő a függvényértékkel. Itt megszüntethető szakadási hely van.

2. Egy üzemben havi x darab termék előállításának teljes költsége $75000 + 10x^2$ forint, az elkészült termékeket darabonként 4000 forint áron lehet értékesíteni. Milyen mennyiség mellett maximális a nyereség?

   Megoldás. x darab gyártása és eladása után a nyereség $f(x) = 4000x - 75000 - 10x^2$, ennek a függvénynek keressük a maximumát a $[0, \infty)$ intervallumon. Az elsőrendű szükséges feltétel szerint lokális maximum a derivált zérushelyeinél lehet:

$$f'(x) = 4000 - 20x,$$

   ez akkor 0, ha $x = 200$. Mivel $f''(x) = -20 < 0$, ez valóban globális maximumhely.

3. Végezze el az $f(x) = xe^{-2x}$ függvény teljes függvényvizsgálatát (értelmezési tartomány, zérushely, paritás, periodicitás, határértékek, aszimptoták, monotonitás, lokális szélsőértékek, konvexitás, ábrázolás, értékkészlet).

   Megoldás. $D_f = \mathbb{R}$, nem páros, nem páratlan, nem periodikus. e^{-2x} sehol nem 0, f egyetlen zérushelye emiatt $x = 0$. A határértékek

   $$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty} f(x) &= \lim_{x\to\infty} xe^{-2x} = 0\\ \lim_{x\to-\infty} f(x) &= \lim_{x\to-\infty} xe^{-2x} = -\infty.\end{aligned}$$

   A deriváltak

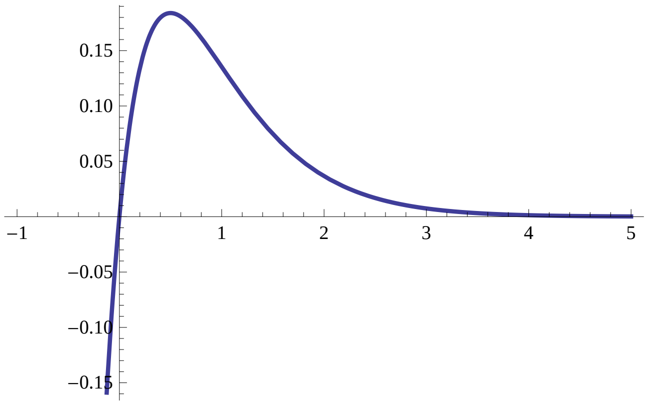
   $$\begin{aligned}f'(x) &= e^{-2x} + xe^{-2x}\cdot(-2) = (1-2x)e^{-2x}\\ f''(x) &= -2e^{-2x} + (1-2x)e^{-2x}\cdot(-2) = 4(x-1)e^{-2x}.\end{aligned}$$

   f' zérushelye $1 - 2x = 0$ alapján $x = \frac{1}{2}$, f'' zérushelye $x = 1$. Az előjeleket a következő táblázat foglalja össze:

	$(-\infty; \frac{1}{2})$	$\frac{1}{2}$	$(\frac{1}{2}; 1)$	1	$(1; \infty)$
f	◜	max	◝	infl	◟
f'	$+$	0	$-$	$-$	$-$
f''	$-$	$-$	$-$	0	$+$

   $$\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} e^{-2x} = \infty$$

   alapján nincs ferde aszimptota. A maximum értéke $f(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2e}$, $R_f = (-\infty; \frac{1}{2e}]$, grafikon:



4. Számítsa ki a következő integrált.

   $$\int \frac{2}{x^2 + 3x}\,\mathrm{d}x$$

   Megoldás. A nevező szorzattá alakítható: $x^2 + 3x = x(x+3)$. Az integrandust parciális törtekre bontjuk, azaz olyan $A, B \in \mathbb{R}$ számokat keresünk, amellyel

   $$\frac{2}{x(x+3)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+3}$$

   azonosság. Szorozzuk meg mindkét oldalt a közös nevezővel: $2 = A(x+3) + Bx = (A + B)x + 3A$, a kapott két polinom akkor egyenlő, ha $0 = A + B$ és $\frac{2}{3} = A$, azaz $B = -\frac{2}{3}$. Az integrál ezzel

   $$\begin{aligned}\int \frac{2}{x^2+3x}\,\mathrm{d}x &= \int \left(\frac{2}{3}\frac{1}{x} - \frac{2}{3}\frac{1}{x+3}\right)\mathrm{d}x\\ &= \frac{2}{3}\ln|x| - \frac{2}{3}\ln|x+3| + C.\end{aligned}$$

5. Számítsa ki a következő integrált.

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x$$

Megoldás. $x = \sin t$, $\mathrm{d}x = \cos t\,\mathrm{d}t$ helyettesítést alkalmazunk és felhasználjuk, hogy $\sqrt{1-\sin^2 t} = \sqrt{\cos^2 t} = \cos t$ a $t \in [0; \pi/2]$ intervallumon:

$$\begin{aligned}\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x &= \int_0^{\pi/2} \sqrt{1-\sin^2 t}\cos t\,\mathrm{d}t\\ &= \int_0^{\pi/2} \cos^2 t\,\mathrm{d}t\\ &= \int_0^{\pi/2} \frac{1+\cos 2t}{2}\,\mathrm{d}t\\ &= \left[\frac{t}{2} + \frac{\sin 2t}{4}\right]_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{4}.\end{aligned}$$

6. Mennyi az $f(x) = \left(\frac{x}{3} - 4\right)^{3/2}$, $x \in [12, 27]$ függvény grafikonjának ívhossza?

Megoldás. Az ívhosszt $\sqrt{1+f'^2}$ integrálásával kapjuk:

$$\begin{aligned}L &= \int_{12}^{27} \sqrt{1+f'(x)^2}\,\mathrm{d}x\\ &= \int_{12}^{27} \sqrt{1+\left(\frac{3}{2}\sqrt{\frac{x}{3}-4}\frac{1}{3}\right)^2}\,\mathrm{d}x\\ &= \int_{12}^{27} \frac{x^{1/2}}{2\sqrt{3}}\,\mathrm{d}x\\ &= \left[\frac{x^{3/2}}{3\sqrt{3}}\right]_{12}^{27} = 19.\end{aligned}$$