1. zárthelyi

1. Oldjuk meg $\mathbb{R}$-en a következő egyenleteket és a megoldáshalmazokat szemléltessük a számegyenesen.

   a) $x + 2 = \sqrt{10x - 1}$

   b) $\dfrac{x+5}{2x+3} = \dfrac{3x-1}{x+6}$

   c) $|x - 1| = 9 + x$

2. Oldjuk meg $\mathbb{R}$-en a következő egyenlőtlenségeket és a megoldáshalmazokat szemléltessük a számegyenesen.

   a) $2x^2 - 7x \leq 4$

   b) $x^2 + 5x > |x|$

   c) $\dfrac{3x+1}{x-2} > 0$

3. Végezzük el a maradékos osztást.

   a) $x^3 + 2x^2 - 3x - 1 : x + 4$

   b) $2x^4 - x^3 + 3x^2 + x - 5 : x^2 - 1$

   c) $6x^3 + 3x^2 - 4x - 1 : 2x + 1$

4. Határozzuk meg a polinomok összes valós gyökét.

   a) $x^3 + 2x^2 - 5x - 6$

   b) $x^3 - x^2 - 3x - 1$

   c) $2x^3 - 4x^2 - 5x - 3$

5. A c szám mely értékére lesz x_1 gyöke a polinomnak? Írjuk fel az így adódó polinom gyöktényezős alakját.

   a) $x^4 - 9x^3 + cx^2 + 9x - 14$, $x_1 = 7$

   b) $x^4 - 6x^3 + 4x^2 + cx - 5$, $x_1 = 5$

   c) $x^3 + cx^2 + 2x + 4$, $x_1 = 2$

6. Mutassuk meg, hogy az f függvény nem invertálható.

   a) $f(x) = |x^2 + 2x - 15|$

   b) $f(x) = \dfrac{x+3}{x^2+1}$

   c) $f(x) = x + |1 + 2x|$

7. Mutassuk meg, hogy az f függvény invertálható és határozzuk meg az inverz függvényt.

a) $f(x) = \dfrac{3x+2}{2x+1}$

b) $f(x) = 2 - \sqrt[5]{3x+7}$

c) $f(x) = \log_9(7-2x) + 3$

8. Számítsuk ki az alábbi határértékeket.

a) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{5x^3 - 6x^2 + 9}{2x^3 + x - 17}$

b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{8x}{\operatorname{tg}(3x)}$

c) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x^2 - 2x - 3}{x^3 - 2x^2 - x - 6}$

9. Határozzuk meg a függvény szakadási helyeit és azok fajtáit.

a) $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-x-2}{x^2-3x+2} & \text{ha } x \in \mathbb{R} \setminus \{1,2\} \\ 3 & \text{ha } x \in \{1,2\} \end{cases}$

b) $f(x) = \dfrac{|x|}{x}$

c) $f(x) = x \operatorname{ctg} x$

2. zárthelyi

10. Határozzuk meg az alábbi függvények deriváltját.

a) $f(x) = 2^x x^2 \operatorname{tg} x$

b) $f(x) = x\sqrt{1 + \sin^2 x}$

c) $f(x) = \log_x(1 + x^2)$

11. Írjuk fel az f függvény grafikonjának x_0 ponthoz tartozó érintőegyenesének egyenletét.

a) $f(x) = \dfrac{3x^2+6}{2x+\sqrt{2x}}$, $x_0 = 2$

b) $f(x) = x^x$, $x_0 = 1$

c) $f(x) = 2\sqrt{\pi \arctan x}$, $x_0 = 1$

12. Határozzuk meg az alábbi magasabb rendű deriváltakat.

a) $f(x) = xe^{2x}$, $f^{(4)}(x)$

b) $f(x) = \operatorname{tg} x$, $f^{(3)}(x)$

c) $f(x) = \dfrac{1}{\ln x}$, $f^{(3)}(x)$

13. Adjuk meg azokat a legbővebb intervallumokat, amelyeken az f függvény szigorúan monoton.

    a) $f(x) = \dfrac{x}{1+x^2}$
    b) $f(x) = x + 2\sin x$
    c) $f(x) = \dfrac{e^x}{x}$

14. Határozzuk meg az alábbi függvények lokális szélsőértékeit és szélsőértékhelyeit (alkalmazza az elsőrendű szükséges feltételt és az elsőrendű – vagy a másodrendű – elégséges feltételt).

    a) $f(x) = x^4 - 2x^2$
    b) $f(x) = x^4 e^x$
    c) $f(x) = \dfrac{e^x}{x}$

15. Oldjuk meg az alábbi szöveges szélsőérték-feladatokat.

    a) Egy üzem havonta 5000 darabot állít elő egy termékből, amelyeken egyenként 2000 Ft profitot ér el. Egy piackutatás szerint az árat x forinttal csökkentve az eladott mennyiség $4x$ darabbal növekedne. Mennyivel csökkenjen az ár, hogy a havi nyereség maximális legyen?
    b) Egyenlőszárú derékszögű háromszögbe téglalapot írunk úgy, hogy két szomszédos csúcsa az átfogón helyezkedik el, a másik kettő pedig egy-egy befogón. Mekkorák a legnagyobb területű ilyen téglalap oldalai, ha a háromszög átfogója 1 méter hosszú?
    c) Egy gyárban havonta x darab termék előállításának költsége összesen $1000000+10000x+\frac{x^2}{10}$ forint, amelynek eladásából darabonként 12000 forint bevétel származik. Havonta hány darab legyártásával tudják a profitot maximalizálni?

16. Adjuk meg azokat az intervallumokat, amelyeken f konvex, illetve konkáv. Van-e a függvénynek inflexiós pontja?

    a) $f(x) = xe^x$
    b) $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$
    c) $f(x) = x^6 - 3x^4 + 3x^2$

17. Van-e az alábbi f függvénynek aszimptotája $+\infty$-ben, illetve $-\infty$-ben? Ha igen, akkor határozzuk meg.

    a) $f(x) = \dfrac{\sqrt{1+x^4}}{x}$

b) $f(x) = 2x + \sin x$

c) $f(x) = x \arctan x$

18. A L'Hospital-szabály alkalmazásával számítsuk ki az alábbi határértékeket. (Minden egyes esetben állapítsuk meg, hogy milyen típusú „kritikus" határértékről van szó.)

a) $\lim\limits_{x \to 0+} \sqrt{x} \ln^2 x$

b) $\lim\limits_{x \to \infty} \left(x^3 \arctan x - \dfrac{\pi}{2} x^3 + x^2 \right)$

c) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - 1 - x}{\sin^2 x}$

19. Végezzünk teljes függvényvizsgálatot az alábbi függvényeken, és vázolja a grafikonjukat.

a) $f(x) = x^2 e^{-x}$

b) $f(x) = -x \ln x - (1 - x) \ln(1 - x)$

c) $f(x) = e^{2\sqrt{3} \sin x}$

Integrálás

20. Határozzuk meg az alábbi függvények primitív függvényeit.

a) $f(x) = \dfrac{(x+1)^2}{\sqrt[3]{x}}$

b) $f(x) = \dfrac{2}{\sqrt{1 + x^2}} + e^x + \cos(x) - \dfrac{5}{x}$

c) $f(x) = \sin^4 x$

21. Integráljuk az alábbi racionális törtfüggvényeket.

a) $f(x) = \dfrac{5x}{x^2 - x - 6}$

b) $f(x) = \dfrac{2x^3 + 5x^2 - 15}{x^2 + 4x + 5}$

c) $f(x) = \dfrac{3x^2 - 7}{(x-3)(x+1)(x+2)}$

22. Parciális integrálással határozzuk meg az alábbi függvények primitív függvényeit.

a) $f(x) = x^2 e^{2x}$

b) $f(x) = e^{-2x} \sin(3x)$

c) $f(x) = x \arctan x$

23. Helyettesítés alkalmazásával határozzuk meg az alábbi függvények primitív függvényeit.

a) $f(x) = \dfrac{1}{x\cos^2(\ln x)}$

b) $f(x) = \dfrac{e^{3x}}{1+e^x}$

c) $f(x) = \dfrac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}$

24. Számítsuk ki az alábbi határozott integrálokat.

a) $\displaystyle\int_0^\pi \sin^3 x \,\mathrm{d}x$

b) $\displaystyle\int_1^4 \frac{1}{\sqrt{x}} \,\mathrm{d}x$

c) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x+1} \,\mathrm{d}x$

25. Parciális integrálással számítsuk ki az alábbi határozott integrálokat.

a) $\displaystyle\int_0^\pi x\cos x \,\mathrm{d}x$

b) $\displaystyle\int_0^\pi x^2\sin(2x+1) \,\mathrm{d}x$

c) $\displaystyle\int_0^1 \arcsin x \,\mathrm{d}x$

26. Helyettesítés alkalmazásával számítsuk ki az alábbi határozott integrálokat.

a) $\displaystyle\int_0^1 xe^{-x^2} \,\mathrm{d}x$

b) $\displaystyle\int_0^1 x^2\sqrt{1-x^2} \,\mathrm{d}x$

c) $\displaystyle\int_0^{\pi^3} \sin(\sqrt[3]{x}) \,\mathrm{d}x$

27. Határozzuk meg az alábbi görbék által határolt síkidomok területét.

a) $y = x^2$, $x = y^2$

b) $y = \cos x$, $y = 4x^2 - \pi^2$

c) $y = x^3$, $y = 2 - x$, $y = 0$

28. Számítsuk ki az f függvény grafikonjának ívhosszát.

a) $f(x) = xe^x$, $0 \leq x \leq 1$

b) $f(x) = 1 - x^2$, $-1 \leq x \leq 1$

c) $f(x) = \cosh x$, $-1 \leq x \leq 1$

29. Számítsuk ki az f függvény grafikonjának az x tengely körüli megforgatásával adódó forgásfelület felszínét.

    a) $f(x) = \frac{x^2}{2}$, $0 \leq x \leq 1$

    b) $f(x) = e^x$, $0 \leq x \leq 1$

    c) $f(x) = \frac{x^2}{2} - \frac{1}{4}\ln x$, $1 \leq x \leq e$

30. Számítsuk ki az f függvény grafikonjának az x tengely körüli megforgatásával adódó forgástest térfogatát.

    a) $f(x) = xe^x$, $0 \leq x \leq 1$

    b) $f(x) = 1 - x^2$, $-1 \leq x \leq 1$

    c) $f(x) = \cosh x$, $-1 \leq x \leq 1$

31. Számítsuk ki az alábbi improprius integrálokat.

    a) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} \ln x \,\mathrm{d}x$

    b) $\displaystyle\int_0^\infty e^{-x} \sin x \,\mathrm{d}x$

    c) $\displaystyle\int_{-1}^8 \frac{1}{\sqrt[3]{x}} \,\mathrm{d}x$