Matematika A1a ZH1, 2019. október 15.

A csoport

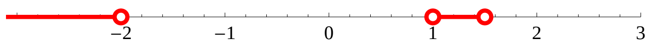
1. Oldja meg $\mathbb{R}$-en a következő egyenlőtlenséget és a megoldáshalmazt szemléltesse a számegyenesen.

$$\frac{2x^2+x-6}{x-1} < 0$$

Megoldás. A hányados akkor negatív, ha a számláló és a nevező előjele ellentétes. A számláló másodfokú polinom, a gyökei

$$x_{\pm} = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-6)}}{4} = \frac{-1 \pm 7}{4}$$

azaz -2 és $\frac{3}{2}$. A főegyüttható pozitív (felfelé néző parabola), tehát a két gyök között negatív, kívül pozitív. A nevező $x < 1$ esetén negatív, $x > 1$ esetén pozitív. Tehát a hányados akkor negatív, ha $x < -2$ vagy $1 < x < \frac{3}{2}$.



2. Ossza el maradékosan az $x^3+3x^2+2x+10$ polinomot az x^2-1 polinommal.

Megoldás. $x^3+3x^2+2x+10 = (x+3)(x^2-1)+3x+13$

3. Mutassa meg, hogy a következő függvény invertálható és adja meg az inverzét.

$$f(x) = 3 + 5^{4x-3}$$

Megoldás. Az $y = 3 + 5^{4x-3}$ paraméteres egyenletet kell megoldani (y paraméter), ha legfeljebb egy megoldás van, akkor a függvény invertálható és az inverz függvényt is le tudjuk olvasni a megoldásból. Azonos átalakításokat végzünk:

$$\begin{aligned} y &= 3 + 5^{4x-3} \\ y - 3 &= 5^{4x-3} \\ \log_5(y-3) &= 4x - 3 \\ 3 + \log_5(y-3) &= 4x \\ \frac{3+\log_5(y-3)}{4} &= x, \end{aligned}$$

tehát $D_{f^{-1}} = (3;\infty)$ és

$$f^{-1}(y) = \frac{3+\log_5(y-3)}{4}.$$

4. Számítsa ki az alábbi határértéket.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{8x^5+3x^2-12}{-2x^4+3x^3-x+10}$$

Megoldás.

$$\begin{aligned} \lim_{x\to\infty} \frac{8x^5+3x^2-12}{-2x^4+3x^3-x+10} &= \lim_{x\to\infty} \frac{x^5}{x^4} \frac{8+3\frac{1}{x^3}-12\frac{1}{x^5}}{-2+3\frac{1}{x}-\frac{1}{x^3}+10\frac{1}{x^4}} \\ &= -\infty, \end{aligned}$$

mivel az első tényező határértéke ∞, a második tényező határértéke pedig -4.

B csoport

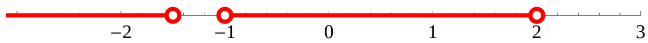
1. Oldja meg $\mathbb{R}$-en a következő egyenlőtlenséget és a megoldáshalmazt szemléltesse a számegyenesen.

$$\frac{2x^2 - x - 6}{x + 1} < 0$$

Megoldás. A hányados akkor negatív, ha a számláló és a nevező előjele ellentétes. A számláló másodfokú polinom, a gyökei

$$x_{\pm} = \frac{-1 \pm \sqrt{-1^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-6)}}{4} = \frac{1 \pm 7}{4}$$

azaz $-\frac{3}{2}$ és 2. A főegyüttható pozitív (felfelé néző parabola), tehát a két gyök között negatív, kívül pozitív. A nevező $x < -1$ esetén negatív, $x > -1$ esetén pozitív. Tehát a hányados akkor negatív, ha $x < -\frac{3}{2}$ vagy $-1 < x < 2$.



2. Ossza el maradékosan az $x^3 - 3x^2 + 2x - 10$ polinomot az $x^2 - 1$ polinommal.

Megoldás. $x^3 - 3x^2 + 2x - 10 = (x - 3)(x^2 - 1) + 3x - 13$

3. Mutassa meg, hogy a következő függvény invertálható és adja meg az inverzét.

$$f(x) = 3 + 5^{-4x-3}$$

Megoldás. Az $y = 3 + 5^{-4x-3}$ paraméteres egyenletet kell megoldani (y paraméter), ha legfeljebb egy megoldás van, akkor a függvény invertálható és az inverz függvényt is le tudjuk olvasni a megoldásból. Azonos átalakításokat végzünk:

$$\begin{aligned} y &= 3 + 5^{-4x-3} \\ y - 3 &= 5^{-4x-3} \\ \log_5(y-3) &= -4x - 3 \\ 3 + \log_5(y-3) &= -4x \\ -\frac{3 + \log_5(y-3)}{4} &= x, \end{aligned}$$

tehát $D_{f^{-1}} = (3; \infty)$ és

$$f^{-1}(y) = -\frac{3 + \log_5(y-3)}{4}.$$

4. Számítsa ki az alábbi határértéket.

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{8x^5 + 3x^2 - 12}{2x^4 + 3x^3 - x + 10}$$

Megoldás.

$$\begin{aligned} \lim_{x \to -\infty} \frac{8x^5 + 3x^2 - 12}{2x^4 + 3x^3 - x + 10} &= \lim_{x \to -\infty} \frac{x^5}{x^4} \frac{8 + 3\frac{1}{x^3} - 12\frac{1}{x^5}}{2 + 3\frac{1}{x} - \frac{1}{x^3} + 10\frac{1}{x^4}} \\ &= -\infty, \end{aligned}$$

mivel az első tényező határértéke $-\infty$, a második tényező határértéke pedig 4.

C csoport

1. Oldja meg $\mathbb{R}$-en a következő egyenlőtlenséget és a megoldáshalmazt szemléltesse a számegyenesen.

$$|5x+6| > x^2$$

Megoldás. Ha $5x+6 \geq 0$, akkor az abszolútértéke önmaga, tehát a feltétel $5x+6 > x^2$. Ha viszont $5x+6 < 0$, akkor az abszolútértéke $-5x-6$, tehát a feltétel $-5x-6 > x^2$. Az egyenlőtlenség eszerint akkor teljesül, ha $5x+6 > x^2$ vagy $5x+6 < -x^2$.
Az első esethez x^2-5x-6 gyökeit keressük, a két gyök közötti nyílt intervallum a megoldáshalmaz. A gyökök

$$x_\pm = \frac{5 \pm \sqrt{(-5)^2 - 4\cdot(-6)}}{2} = \frac{5\pm 7}{2},$$

azaz -1 és 6.
A második esethez x^2+5x+6 gyökeit keressük, a két gyök közötti nyílt intervallum a megoldáshalmaz. A gyökök

$$x_\pm = \frac{-5 \pm \sqrt{5^2 - 4\cdot 6}}{2} = \frac{-5\pm 1}{2},$$

azaz -3 és -2.
A teljes megoldáshalmaz a két intervallum egyesítése, $(-3;-2)\cup(-1;6)$.

2. Ossza el maradékosan az x^3+x^2+8 polinomot az x^2-2x+3 polinommal.

Megoldás. $x^3+x^2+8 = (x+3)(x^2-2x+3)+3x-1$

3. Mutassa meg, hogy a következő függvény invertálható és adja meg az inverzét.

$$f(x) = 5 + \log_7(3x+9)$$

Megoldás. Az $y = 5+\log_7(3x+9)$ paraméteres egyenletet kell megoldani (y paraméter), ha legfeljebb egy megoldás van, akkor a függvény invertálható és az inverz függvényt is le tudjuk olvasni a megoldásból. Azonos átalakításokat végzünk:

$$\begin{aligned} y &= 5+\log_7(3x+9) \\ y-5 &= \log_7(3x+9) \\ 7^{y-5} &= 3x+9 \\ 7^{y-5}-9 &= 3x \\ \frac{1}{3}7^{y-5}-3 &= x \end{aligned}$$

tehát $D_{f^{-1}} = \mathbb{R}$ és

$$f^{-1}(y) = \frac{1}{3}7^{y-5}-3.$$

4. Számítsa ki az alábbi határértéket.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(3x)}{7x}$$

Megoldás.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(3x)}{7x} = \lim_{x\to 0}\frac{3}{7}\cdot\frac{\sin(3x)}{3x} = \frac{3}{7},$$

mivel $\lim_{x\to 0} 3x = 0$ és $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$.

D csoport

1. Oldja meg $\mathbb{R}$-en a következő egyenlőtlenséget és a megoldáshalmazt szemléltesse a számegyenesen.

$$|5x-6| > x^2$$

Megoldás. Ha $5x-6 \geq 0$, akkor az abszolútértéke önmaga, tehát a feltétel $5x-6 > x^2$. Ha viszont $5x-6 < 0$, akkor az abszolútértéke $-5x+6$, tehát a feltétel $-5x+6 > x^2$. Az egyenlőtlenség eszerint akkor teljesül, ha $5x-6 > x^2$ vagy $5x-6 < -x^2$.
Az első esethez $x^2 - 5x + 6$ gyökeit keressük, a két gyök közötti nyílt intervallum a megoldáshalmaz. A gyökök

$$x_{\pm} = \frac{5 \pm \sqrt{(-5)^2 - 4 \cdot 6}}{2} = \frac{5 \pm 1}{2},$$

azaz 2 és 3.
A második esethez $x^2 + 5x - 6$ gyökeit keressük, a két gyök közötti nyílt intervallum a megoldáshalmaz. A gyökök

$$x_{\pm} = \frac{-5 \pm \sqrt{5^2 - 4 \cdot (-6)}}{2} = \frac{-5 \pm 7}{2},$$

azaz -6 és 1.
A teljes megoldáshalmaz a két intervallum egyesítése, $(-6;1) \cup (2;3)$.

2. Ossza el maradékosan az $x^3 - x^2 - 8$ polinomot az $x^2 + 2x + 3$ polinommal.
Megoldás. $x^3 - x^2 - 8 = (x-3)(x^2+2x+3) + 3x + 1$

3. Mutassa meg, hogy a következő függvény invertálható és adja meg az inverzét.

$$f(x) = 5 + \log_7(3x-9)$$

Megoldás. Az $y = 5 + \log_7(3x-9)$ paraméteres egyenletet kell megoldani (y paraméter), ha legfeljebb egy megoldás van, akkor a függvény invertálható és az inverz függvényt is le tudjuk olvasni a megoldásból. Azonos átalakításokat végzünk:

$$\begin{aligned} y &= 5 + \log_7(3x-9) \\ y - 5 &= \log_7(3x-9) \\ 7^{y-5} &= 3x - 9 \\ 7^{y-5} + 9 &= 3x \\ \frac{1}{3}7^{y-5} + 3 &= x \end{aligned}$$

tehát $D_{f^{-1}} = \mathbb{R}$ és

$$f^{-1}(y) = \frac{1}{3}7^{y-5} + 3.$$

4. Számítsa ki az alábbi határértéket.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(7x)}{3x}$$

Megoldás.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(7x)}{3x} = \lim_{x\to 0} \frac{7}{3} \cdot \frac{\sin(7x)}{7x} = \frac{7}{3},$$

mivel $\lim\limits_{x\to 0} 7x = 0$ és $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.