Matematika A1a ZH2, 2019. november 26.

A csoport

1. Írja fel az $f(x) = \sqrt{9+x^2}$ függvény grafikonjához az $x_0 = 4$ pontban húzott érintő egyenletét.

   Megoldás. Az érintő egyenletének általános alakja $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$, tehát meg kell határozni $f(x_0)$ és $f'(x_0)$ értékét. A deriváltfüggvény

   $$f'(x) = \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{9+x^2}} \cdot 2x,$$

   így

   $$\begin{aligned} f(x_0) &= \sqrt{9+4^2} = 5 \\ f'(x_0) &= \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{9+4^2}} \cdot 2 \cdot 4 = \frac{4}{5}. \end{aligned}$$

   Az érintőegyenes egyenlete $y = 5 + \frac{4}{5}(x-4)$.

2. Ha egy termékből x darabot állítunk elő, annak teljes költsége $10000 + 1000x$ forint, és azokat darabonként $2000 - \frac{1}{5}x$ forintért lehet eladni. Hány darab előállításával lehet a profitot maximalizálni?

   Megoldás. A szöveg alapján az x darab előállításából és eladásából származó profit $f(x) = x(2000 - \frac{1}{5}x) - (10000 + 1000x) = -10000 + 1000x - \frac{1}{5}x^2$, ennek a függvénynek a maximumát keressük. Lokális szélsőérték ott lehet, ahol a derivált 0, azaz

   $$0 = f'(x) = 1000 - \frac{2}{5}x,$$

   aminek a megoldása $x = 2500$. Mivel $f''(x) = -\frac{2}{5} < 0$, ez valóban a függvény globális maximumhelye. Eszerint 2500 darab előállításakor maximális a profit.

3. A L'Hospital-szabály alkalmazásával számítsa ki a

   $$\lim_{x \to 0} \frac{x - \sin x}{x^3}$$

   határértéket.

   Megoldás. A határérték $\frac{0}{0}$ típusú, a L'Hospital-szabály szerint megkísérelhetjük az eredeti számláló és nevező helyett a deriváltfüggvények hányadosainak határértékét kiszámolni. Ez újra $\frac{0}{0}$ típusú, de a L'Hospital-szabályt összesen háromszor alkalmazva már ki lehet számolni a határértéket:

   $$\begin{aligned} \lim_{x \to 0} \frac{x - \sin x}{x^3} &= \lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{3x^2} \\ &= \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{6x} \\ &= \lim_{x \to 0} \frac{\cos x}{6} = \frac{1}{6}. \end{aligned}$$

   Az utolsó határérték létezik, tehát az eredeti is és értékük megegyezik.

4. Végezze el az $f(x) = xe^{-x}$ függvény teljes függvényvizsgálatát (értelmezési tartomány, zérushely, paritás, periodicitás, határértékek, aszimptoták, monotonitás, lokális szélsőértékek, konvexitás, ábrázolás, értékkészlet)

Megoldás. $D_f = \mathbb{R}$, nem páros, nem páratlan, nem periodikus. e^{-x} sehol nem 0, így f egyetlen zérushelye $x = 0$. A határértékek

$$\lim_{x\to\infty} xe^{-x} = 0$$
$$\lim_{x\to-\infty} xe^{-x} = \infty.$$

A deriváltak

$$f'(x) = e^{-x} + x(-e^{-x}) = (1-x)e^{-x}$$
$$f''(x) = -e^{-x} + (1-x)(-e^{-x}) = (x-2)e^{-x},$$

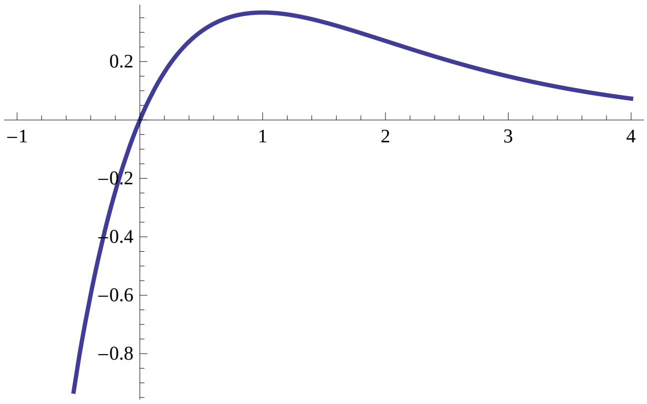
f' zérushelye $x = 1$, f' zérushelye $x = 2$. Az előjeleket a következő táblázat foglalja össze:

	$(-\infty, 1)$	1	$(1, 2)$	2	$(2, \infty)$
f	◜	max	◝	infl	◟
f'	$+$	0	$-$	$-$	$-$
f''	$-$	$-$	$-$	0	$+$

Láttuk, hogy $+\infty$-ben vízszintes aszimptota van, $-\infty$-ben viszont

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} e^{-x} = -\infty$$

miatt nincs. $R_f = (-\infty; e^{-1}]$, grafikon:



B csoport

1. Írja fel az $f(x) = \sqrt{9+x^2}$ függvény grafikonjához az $x_0 = -4$ pontban húzott érintő egyenletét.

   Megoldás. Az érintő egyenletének általános alakja $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$, tehát meg kell határozni $f(x_0)$ és $f'(x_0)$ értékét. A deriváltfüggvény

$$f'(x) = \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{9+x^2}} \cdot 2x,$$

   így

$$f(x_0) = \sqrt{9+(-4)^2} = 5$$
$$f'(x_0) = \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{9+(-4)^2}} \cdot 2 \cdot (-4) = -\frac{4}{5}.$$

   Az érintőegyenes egyenlete $y = 5 - \frac{4}{5}(x - 4)$.

2. Ha egy termékből x darabot állítunk elő, annak teljes költsége $5000+500x$ forint, és azokat darabonként $1000-\frac{1}{10}x$ forintért lehet eladni. Hány darab előállításával lehet a profitot maximalizálni?

   Megoldás. A szöveg alapján az x darab előállításából és eladásából származó profit $f(x) = x(1000-\frac{1}{10}x)-(5000+500x) = -5000+500x-\frac{1}{10}x^2$, ennek a függvénynek a maximumát keressük. Lokális szélsőérték ott lehet, ahol a derivált 0, azaz

$$0 = f'(x) = 500 - \frac{2}{10}x,$$

   aminek a megoldása $x = 2500$. Mivel $f''(x) = -\frac{2}{10} < 0$, ez valóban a függvény globális maximumhelye. Eszerint 2500 darab előállításakor maximális a profit.

3. A L'Hospital-szabály alkalmazásával számítsa ki a

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^3}{x-\sin x}$$

   határértéket.

   Megoldás. A határérték $\frac{0}{0}$ típusú, a L'Hospital-szabály szerint megkísérelhetjük az eredeti számláló és nevező helyett a deriváltfüggvények hányadosainak határértékét kiszámolni. Ez újra $\frac{0}{0}$ típusú, de a L'Hospital-szabályt összesen háromszor alkalmazva már ki lehet számolni a határértéket:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0} \frac{x^3}{x-\sin x} &= \lim_{x\to 0} \frac{3x^2}{1-\cos x} \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{6x}{\sin x} \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{6}{\cos x} = 6.\end{aligned}$$

   Az utolsó határérték létezik, tehát az eredeti is és értékük megegyezik.

4. Végezze el az $f(x) = xe^x$ függvény teljes függvényvizsgálatát (értelmezési tartomány, zérushely, paritás, periodicitás, határértékek, aszimptoták, monotonitás, lokális szélsőértékek, konvexitás, ábrázolás, értékkészlet)

   Megoldás. $D_f = \mathbb{R}$, nem páros, nem páratlan, nem periodikus. e^{-x} sehol nem 0, így f egyetlen zérushelye $x = 0$. A határértékek

$$\begin{aligned}&\lim_{x\to\infty} xe^x = \infty \\ &\lim_{x\to-\infty} xe^x = 0.\end{aligned}$$

   A deriváltak

$$\begin{aligned}f'(x) &= e^x + x(e^x) = (1+x)e^x \\ f''(x) &= e^x + (1+x)(e^x) = (x+2)e^x,\end{aligned}$$

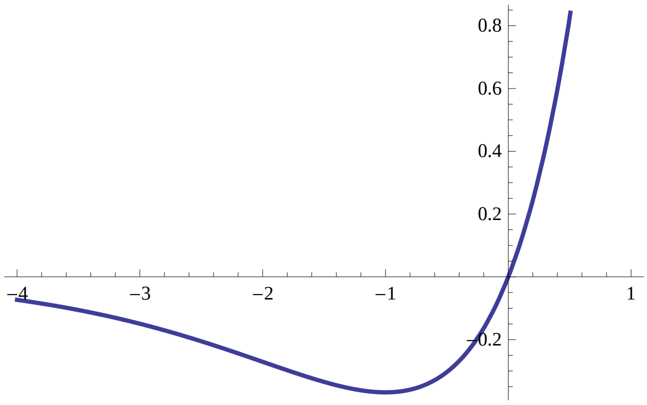
   f' zérushelye $x=-1$, f' zérushelye $x=-2$. Az előjeleket a következő táblázat foglalja össze:

	$(-\infty,-2)$	-2	$(-2,-1)$	-1	$(-1,\infty)$
f	$\searrow$	infl	$\searrow$	min	$\nearrow$
f'	$-$	$-$	$-$	0	$+$
f''	$-$	0	$+$	$+$	$+$

Láttuk, hogy ∞-ben vízszintes aszimptota van, $+\infty$-ben viszont

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} e^x = \infty$$

miatt nincs. $R_f = [-e^{-1}; \infty)$, grafikon:



C csoport

1. Írja fel az $f(x) = e^{\sqrt{1+\ln x}}$ függvény grafikonjához az $x_0 = 1$ pontban húzott érintő egyenletét.

   Megoldás. Az érintő egyenletének általános alakja $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$, tehát meg kell határozni $f(x_0)$ és $f'(x_0)$ értékét. A deriváltfüggvény

   $$f'(x) = e^{\sqrt{1+\ln x}} \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{1+\ln x}} \frac{1}{x},$$

   így

   $$f(x_0) = e^{\sqrt{1+\ln 1}} = e$$
   $$f'(x_0) = e^{\sqrt{1+\ln 1}} \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{1+\ln 1}} \frac{1}{1} = \frac{e}{2}.$$

   Az érintőegyenes egyenlete $y = e + \frac{e}{2}(x - 1)$.

2. Egy cukrászda süteményeket árul 500 forintos darabáron. Napi x darab előállításának költsége $1000 + 100x + x^2$ forint. Milyen mennyiség mellett maximális a napi profit?

   Megoldás. Ha egy nap x darab süteményt gyárt, akkor a teljes napi profit a szöveg alapján $f(x) = 500x - (1000 + 100x + x^2) = -1000 + 400x - x^2$. Lokális szélsőérték ott lehet, ahol a derivált 0, azaz

   $$0 = f'(x) = 400 - 2x,$$

   aminek a megoldása $x = 200$. Mivel $f''(x) = -2 < 0$, ez valóban a függvény globális maximumhelye. Eszerint 200 darab előállításakor maximális a profit.

3. A L'Hospital-szabály alkalmazásával számítsa ki a

   $$\lim_{x\to 0} \frac{x^2}{1 - \cos(2x)}$$

   határértéket.

Megoldás. A határérték $\frac{0}{0}$ típusú, a L'Hospital-szabály szerint megkísérelhetjük az eredeti számláló és nevező helyett a deriváltfüggvények hányadosainak határértékét kiszámolni. Ez újra $\frac{0}{0}$ típusú, de a L'Hospital-szabályt kétszer alkalmazva már ki lehet számolni a határértéket:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{1-\cos(2x)} &= \lim_{x\to 0}\frac{2x}{\sin(2x)\cdot 2}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{2}{\cos(2x)\cdot 4} = \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

Az utolsó határérték létezik, tehát az eredeti is és értékük megegyezik.

4. Végezze el az $f(x) = x\ln x$ függvény teljes függvényvizsgálatát (értelmezési tartomány, zérushely, paritás, periodicitás, határértékek, aszimptoták, monotonitás, lokális szélsőértékek, konvexitás, ábrázolás, értékkészlet)

   Megoldás. $D_f = (0;\infty)$, nem páros, nem páratlan, nem periodikus. $x \neq 0$ az értelmezési tartományon, így f egyetlen zérushelye $x = e^0 = 1$. A határértékek

$$\begin{aligned}&\lim_{x\to\infty} x\ln x = \infty\\ &\lim_{x\to 0+} x\ln x = \lim_{x\to 0+}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0+}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0+}(-x) = 0.\end{aligned}$$

   A deriváltak

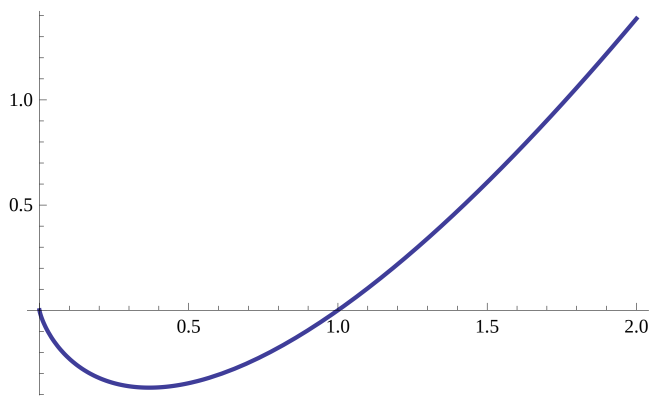
$$\begin{aligned}&f'(x) = \ln(x) + x\frac{1}{x} = 1+\ln x\\ &f''(x) = \frac{1}{x},\end{aligned}$$

   f' zérushelye $x = \frac{1}{e}$, f' sehol nem 0. Az előjeleket a következő táblázat foglalja össze:

	0	$(0,\frac{1}{e})$	$\frac{1}{e}$	$(\frac{1}{e},\infty)$
f	X	◟	min	◞
f'	X	$-$	0	$+$
f''	X	$+$	$+$	$+$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty}\ln x = \infty$$

   miatt nincs ferde aszimptota. $R_f = [-e^{-1};\infty)$, grafikon:



D csoport

1. Írja fel az $f(x) = e^{\sqrt{1-\ln x}}$ függvény grafikonjához az $x_0 = 1$ pontban húzott érintő egyenletét.

   Megoldás. Az érintő egyenletének általános alakja $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$, tehát meg kell határozni $f(x_0)$ és $f'(x_0)$ értékét. A deriváltfüggvény

   $$f'(x) = e^{\sqrt{1-\ln x}}\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{1-\ln x}}\left(-\frac{1}{x}\right),$$

   így

   $$f(x_0) = e^{\sqrt{1-\ln 1}} = e$$
   $$f'(x_0) = e^{\sqrt{1-\ln 1}}\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{1-\ln 1}}(-1) = -\frac{e}{2}.$$

   Az érintőegyenes egyenlete $y = e - \frac{e}{2}(x-1)$.

2. Egy utcai árus hamburgereket árul 500 forintos darabáron. Napi x darab előállításának költsége $1000 + 100x + x^2$ forint. Milyen mennyiség mellett maximális a napi profit?

   Megoldás. Ha egy nap x darab hamburgert gyárt, akkor a teljes napi profit a szöveg alapján $f(x) = 500x - (1000 + 100x + x^2) = -1000 + 400x - x^2$. Lokális szélsőérték ott lehet, ahol a derivált 0, azaz

   $$0 = f'(x) = 400 - 2x,$$

   aminek a megoldása $x = 200$. Mivel $f''(x) = -2 < 0$, ez valóban a függvény globális maximumhelye. Eszerint 200 darab előállításakor maximális a profit.

3. A L'Hospital-szabály alkalmazásával számítsa ki a

   $$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(2x)}{x^2}$$

   határértéket.

   Megoldás. A határérték $\frac{0}{0}$ típusú, a L'Hospital-szabály szerint megkísérelhetjük az eredeti számláló és nevező helyett a deriváltfüggvények hányadosainak határértékét kiszámolni. Ez újra $\frac{0}{0}$ típusú, de a L'Hospital-szabályt kétszer alkalmazva már ki lehet számolni a határértéket:

   $$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(2x)}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin(2x)\cdot 2}{2x} = \lim_{x\to 0}\frac{\cos(2x)\cdot 4}{2} = 2.$$

   Az utolsó határérték létezik, tehát az eredeti is és értékük megegyezik.

4. Végezze el az $f(x) = x\ln(-x)$ függvény teljes függvényvizsgálatát (értelmezési tartomány, zérushely, paritás, periodicitás, határértékek, aszimptoták, monotonitás, lokális szélsőértékek, konvexitás, ábrázolás, értékkészlet)

   Megoldás. $D_f = (-\infty; 0)$, nem páros, nem páratlan, nem periodikus. $x \neq 0$ az értelmezési tartományon, így f egyetlen zérushelye $x = e^0 = 1$. A határértékek

   $$\lim_{x\to-\infty} x\ln(-x) = -\infty$$
   $$\lim_{x\to 0-} x\ln(-x) = \lim_{x\to 0-}\frac{\ln(-x)}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0-}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0-}(-x) = 0.$$

A deriváltak

$$f'(x) = \ln(-x) + x\frac{1}{x} = 1 + \ln(-x)$$
$$f''(x) = \frac{1}{x},$$

f' zérushelye $x = -\frac{1}{e}$, f' sehol nem 0. Az előjeleket a következő táblázat foglalja össze:

	$(-\infty, -\frac{1}{e})$	$-\frac{1}{e}$	$(-\frac{1}{e}, 0)$	0
f	◜	max	◝	X
f'	$-$	0	$+$	X
f''	$+$	$+$	$+$	X

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \ln(-x) = \infty$$

miatt nincs ferde aszimptota. $R_f = (-\infty; e^{-1}]$, grafikon: