Matematika A2a – Vektorfüggvények gyakorlat

2023/2024/1
D1, D2, D3 kurzusok

Tartalomjegyzék

1. Improprius integrál

1.1. Feladat. Számítsuk ki az alábbi első típusú improprius integrálokat.

a) $\displaystyle\int_3^{+\infty} \frac{1}{(1-x)^3}\,\mathrm{d}x$

b) $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{6}{x^2+x-2}\,\mathrm{d}x$

c) $\displaystyle\int_0^{+\infty} xe^{-2x}\,\mathrm{d}x$

1.2. Feladat. Számítsuk ki az alábbi második típusú improprius integrálokat.

a) $\displaystyle\int_0^{1} \frac{1}{\sqrt[3]{(1-x)^4}}\,\mathrm{d}x$

b) $\displaystyle\int_{-2}^{0} \frac{6}{\sqrt{4+2x}}\,\mathrm{d}x$

c) $\displaystyle\int_0^{2} \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}\,\mathrm{d}x$

1.3. Feladat. Legyen $f_\lambda(x) := \lambda e^{-\lambda x}$ $(x \in [0,+\infty))$, ahol $\lambda > 0$ adott paraméter. Szemléltessük az f_λ függvényt $\lambda = 1$ és $\lambda = 2$ esetén, és mutassuk meg, hogy az f_λ grafikonja alatti terület a $[0,+\infty)$ intervallumon minden $\lambda > 0$ esetén 1-gyel egyenlő, azaz

$$\int_0^{+\infty} f_\lambda(x)\,\mathrm{d}x = 1 \qquad \text{minden } \lambda > 0 \text{ számra.}$$

1.4. Feladat (hf). Számítsuk ki az improprius integrálokat.

a) $\displaystyle\int_4^{+\infty} \frac{2}{(3x-1)^2}\,\mathrm{d}x$

b) $\displaystyle\int_2^{+\infty} e^{-5x}\,\mathrm{d}x$

c) $\displaystyle\int_1^{5} \frac{3}{\sqrt[4]{x-1}}\,\mathrm{d}x$

Opcionális (ha marad idő)

1.5. Feladat. Legyen

$$f(x) := \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & \text{ha } x \in [a,b] \\ 0, & \text{ha } x \in \mathbb{R} \setminus [a,b] \end{cases}$$

Számítsuk ki a következő integrálokat.

a) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$

b) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)\,\mathrm{d}x$

2. Komplex számok

2.1. Feladat. Legyen $z_1 = 3 + 2i$ és $z_2 = 1 - 3i$. Számoljuk ki az alábbiakat.

a) $z_1 + z_2$

b) $z_1 - z_2$

c) $z_1 z_2$

d) $\dfrac{z_1}{z_2}$

e) $\overline{z_1}$

f) $|z_1|$

2.2. Feladat. Legyen $z = -1 + i$. Írjuk fel trigonometrikus alakban, majd számoljuk ki a negyedik hatványát és a harmadik gyökeit.

2.3. Feladat (hf). Számoljuk ki az $\sqrt{3} - i$ komplex szám tizenegyedik hatványát (az eredményt algebrai alakban adjuk meg).

2.4. Feladat. Keressük meg a $z^4 - z^2 - 6 = 0$ polinom gyökeit a komplex számok körében.

2.5. Feladat. Keressük meg a $z^3 + 2z^2 + 3z = 0$ polinom gyökeit a komplex számok körében, és írjuk fel gyöktényezős alakban.

2.6. Feladat (hf). Keressük meg a $z^2 - 2z + 5 = 0$ polinom gyökeit a komplex számok körében.

Opcionális (ha marad idő)

2.7. Feladat. Ábrázoljuk a komplex számsíkon a következő számhalmazokat.

a) $\mathrm{Im}(z + i) > 2$

b) $|2z + 3| > 4$

3. Vektorok és koordinátageometria

3.1. Feladat. Számítsuk ki az $\mathbf{a} = (0, -1, 5)$ és $\mathbf{b} = (-2, 1, 2)$ vektorok skaláris szorzatát és a két vektor hajlásszögét.

3.2. Feladat. Bontsuk fel a $\mathbf{v} = (3, -1, 5)$ vektort az $\mathbf{a} = (3, 1, 0)$ vektorral párhuzamos és arra merőleges komponensek összegére.

3.3. Feladat (hf). Bontsuk fel a $\mathbf{v} = (3, 5, 7)$ vektort az $\mathbf{a} = (1, 2, -1)$ vektorral párhuzamos és arra merőleges komponensek összegére.

3.4. Feladat. Számítsuk ki az $\mathbf{a} = (1, 3, -2)$ és $\mathbf{b} = (-1, 2, 0)$ vektorok vektoriális szorzatát.

3.5. Feladat. Számítsuk ki az $A(-1, 0, 2)$, $B(2, 1, 0)$, $C(3, 2, 1)$ csúcspontú háromszög területét.

3.6. Feladat. Határozzuk meg az $\mathbf{a} = (2, -1, 5)$, $\mathbf{b} = (-1, 0, 4)$ és $\mathbf{c} = (0, 2, -3)$ vektorok $[abc]$ vegyes szorzatát, valamint a vektorok által kifeszített paralelepipedon térfogatát.

3.7. Feladat. Írjuk fel a $P_0(1, 2, 4)$ ponton átmenő $\mathbf{n} = (2, 1, 3)$ normálvektorú sík egyenletét.

3.8. Feladat. Írjuk fel a $P(3, 4, 6)$ ponton átmenő $\mathbf{n} = (1, -2, 1)$ normálvektorú sík egyenletét, és számítsuk ki a $Q(-1, 5, 4)$ pontnak ettől a síktól vett távolságát.

3.9. Feladat (hf). Írjuk fel a $P(3, -1, 2)$ ponton átmenő $\mathbf{n} = (2, 3, -4)$ normálvektorú sík egyenletét, és számítsuk ki a $Q(0, 3, 1)$ pontnak ettől a síktól vett távolságát.

3.10. Feladat. Írjuk fel a $\mathbf{v}_1 = (1, 2, -1)$ és $\mathbf{v}_2 = (2, 4, 3)$ vektorokkal párhuzamos, a $P(2, 3, 7)$ ponton átmenő sík egyenletét.

3.11. Feladat. Mutassuk meg, hogy a $3x + y - z = 1$ és a $6x + 2y - 2z = 1$ egyenletű síkok párhuzamosak, és határozzuk meg a két sík távolságát.

Opcionális (ha marad idő)

3.12. Feladat. Tükrözzük a $\mathbf{v} = (2, 1, 9)$ vektort az $\mathbf{a} = (3, 1, 0)$ vektorra. Határozzuk meg a tükörkép vektor koordinátáit.

3.13. Feladat. Határozzuk meg a $P_0(-2, -1, 8)$ ponton átmenő és az $x + 1 = -\frac{y}{2} = \frac{3-z}{3}$ egyenletű egyenesre merőleges síknak az egyenessel való döféspontját.

4. Vektorterek, lineáris függetlenség

4.1. Feladat. Döntsük el, hogy a következő $\mathbb{R}^3$-beli vektorok lineárisan függetlenek-e vagy nem.

a) $\{(2,-3,3),(-1,2,3),(1,0,-3)\}$

b) $\{(1,0,2),(1,2,1),(2,2,4)\}$

4.2. Feladat. Ellenőrizzük, hogy az alábbi V vektorterek megadott U részhalmazai alterek, és adjuk meg egy bázisukat és a dimenziójukat.

a) V a legfeljebb harmadfokú valós polinomok vektortere, $U = \{p \in V | p(1) = 0\}$,

b) $V = \mathbb{R}^3$, $U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | 3x - 2y = 4z\}$,

c) $V = \mathbb{R}^3$, U az $\mathbf{a} = (2, 2, 1)$, $\mathbf{b} = (-2, 1, 0)$ és $\mathbf{c} = (-2, 4, 1)$ vektorok összes lineáris kombinációjának halmaza.

4.3. Feladat. Fejezzük ki az $\mathbb{R}^3$ tér $\mathbf{x} = (-3, 1, 2)$ vektorát az $\mathbf{a} = (1, 3, 4)$, $\mathbf{b} = (2, 7, 2)$ és $\mathbf{c} = (-1, 2, 1)$ vektorok lineáris kombinácójaként, ha lehetséges.

4.4. Feladat. Az $(-3, 0, 1)$, $(-2, -1, 0)$, $(1, -1, -1)$, $(0, 3, 2)$ vektorok közül legfeljebb hány elemű lineárisan független halmazt lehet kiválasztani?

4.5. Feladat. Ellenőrizzük, hogy a legfeljebb másodfokú polinomok vektorterében a $p_0(x) = 1$, $p_1(x) = x + 1$, $p_2(x) = (x + 1)^2$ polinomok bázist alkotnak, és határozzuk meg az x^2 ezen bázisra vonatkozó koordinátáit.

5. Műveletek mátrixokkal, determináns, inverz

5.1. Feladat. Az alábbi mátrixok közül melyeket tudjuk összeszorozni? Számítsuk ki néhány szorzás eredményét. Írjuk fel a mátrixok transzponáltját is.

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}, \qquad C = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \qquad D = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

5.2. Feladat (hf). Tekintsük a

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}, \qquad A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & 4 & 3 \\ 3 & 2 & 5 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}, \qquad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}.$$

mátrixokat. Számítsuk ki a következő mátrixműveletek eredményét, ha lehetséges:

$$A + 3\mathbf{v},\ A - B,\ \mathbf{v}^T\mathbf{v},\ \mathbf{v}\mathbf{v}^T,\ A\mathbf{v},\ \mathbf{v}A,\ 3\mathbf{v}^T B,\ CB,\ AB\mathbf{v},\ BAC,\ A^2,\ B^2.$$

5.3. Feladat. Egy cég három gyárában négyféle terméket állít elő. Az

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 5 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 0 \\ 5 & 6 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

mátrix a_{ij} eleme jelentse az i. gyárban egy nap alatt előállított j. termék számát. A

$$\mathbf{p} = \begin{bmatrix} 40 \\ 60 \\ 50 \\ 20 \end{bmatrix}$$

vektor j. komponense a j. termék egységára.

a) Mekkora az egy nap alatt előállított termelési érték gyáranként?

b) Mi az $A\mathbf{e}_i$ szorzat eredménye, ahol $\mathbf{e}_i$ az $\mathbb{R}^4$ vektortér standard bázisának i. egységvektora? Mit jelent az eredmény?

c) Mik lesznek a komponensei az $\mathbf{1}^T A$ szorzat eredményvektorának, ahol $\mathbf{1}$ az a vektor, melyre a szorzás végrehajtható, és minden koordinátája 1? Mi az eredmény jelentése?

d) Írjuk fel mátrixszorzás segítségével a gyárakra az általuk termelt termékek összmennyiségét.

5.4. Feladat (hf). Egy kereskedelmi cég n féle terméket forgalmaz m boltjában. Az A mátrix a_{ij} eleme jelentse a j. termék i. boltban egy hónap alatt forgalmazott mennyiségét. A $\mathbf{p}$ vektor p_j komponense jelölje az j. termék egységárát. Az A mátrix, a $\mathbf{p}$ vektor, az e_i (a standard bázis vektorai), valamint az $\mathbf{1}$ (az az oszlopvektor, amelynek minden koordinátája 1) vektorok segítségével írjuk fel mátrixműveletként, és számítsuk ki:

a) a havi bevételt boltonként;

b) az i-edik bolt havi bevételét;

c) az i-edik boltban a j-edik áruból eladott mennyiséget;

d) az egy hónap alatt eladott termékmennyiséget termékenként;

e) a havi összbevételt.

5.5. Feladat. Számítsuk ki az alábbi mátrixok determinánsát.

a) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -1 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 4 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} -1 & -1 & -3 & 2 \\ 3 & 2 & 10 & 7 \\ 1 & 0 & 4 & 0 \\ 2 & 3 & 5 & 6 \end{bmatrix}$

5.6. Feladat (hf). Számítsuk ki az alábbi mátrix determinánsát.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 1 & -3 \\ 2 & 5 & 1 & -1 \\ -2 & 3 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

5.7. Feladat. A p valós paraméter függvényében számoljuk ki az alábbi mátrix determinánsát. A paraméter mely értékére lesz a mátrix szinguláris?

$$\begin{bmatrix} 2 & -5 & 9 \\ -1 & 3 & -5 \\ 3 & -9 & p \end{bmatrix}$$

5.8. Feladat. Számítsuk ki a Gauss–Jordan-módszerrel és az adjungált mátrix segítségével is az alábbi mátrix inverzét.

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -2 \\ -4 & -2 & 4 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

5.9. Feladat. Határozzuk meg az összes olyan X mátrixot, amelyre $AX = B + 6X$ teljesül, ahol

$$A = \begin{bmatrix} 9 & 1 & -2 \\ -4 & 4 & 4 \\ 1 & 0 & 5 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -4 & -10 & -2 \\ -1 & -4 & 0 \end{bmatrix}.$$

5.10. Feladat (hf). Határozza meg az összes olyan X mátrixot, amelyre $AX = B$ teljesül, ahol

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \\ 5 & 0 \end{bmatrix}.$$

Opcionális (ha marad idő)

5.11. Feladat. Határozzuk meg mindazon B mátrixokat, amelyek az

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

mátrixszal felcserélhetőek a mátrixszorzás műveletére nézve, azaz amelyekre $AB = BA$ teljesül.

5.12. Feladat. Mutassuk meg, hogy a

$$Z = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}, \qquad W = \begin{bmatrix} c & -d \\ d & c \end{bmatrix},$$

alakú mátrixok ($a, b, c, d \in \mathbb{R}$) a műveletekre nézve ugyanúgy viselkednek, mint a $z = a + bi$ és $w = c + di$ komplex számok, azaz

a) ha $c \neq 0$ vagy $d \neq 0$, akkor W invertálható;

b) a mátrixok felcserélhetőek, azaz $ZW = WZ$;

c) $Z + W$, $Z - W$, ZW, ZW^{-1}, Z^T bal felső és jobb alsó eleme egyenlő a $z + w$, $z - w$, zw, $\frac{z}{w}$, $\overline{z}$ komplex számok valós részével, bal alsó eleme és a jobb felső elem ellentettje pedig a képzetes részével;

d) $Z^T Z = |z|^2 E_2$.

6. Lineáris egyenletrendszerek

6.1. Feladat. Oldjuk meg Cramer-szabállyal a következő egyenletrendszert.

$$\begin{aligned} 3x + 2y + z &= 7 \\ 2x - y - 3z &= -4 \\ -x + 3y + 5z &= 10 \end{aligned}$$

6.2. Feladat. Határozzuk meg az alábbi mátrix rangját.

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 & 1 \\ -2 & 2 & 4 & 0 \\ -3 & 1 & 6 & 2 \end{bmatrix}$$

6.3. Feladat. Oldjuk meg az

$$\begin{aligned} x + y + 2z &= -1 \\ 2x - y + 2z &= -4 \\ 4x + y + 4z &= -2 \end{aligned}$$

egyenletrendszert Gauss-eliminációval.

6.4. Feladat (hf). Oldjuk meg a fenti egyenletrendszert az együtthatómátrix invertálásával és a Cramer-szabály segítségével is.

6.5. Feladat. Oldjuk meg az

$$\begin{aligned} x + 9y - 5z &= 1 \\ 3x + 5y - z &= 1 \\ x - 2y + 2z &= 2 \end{aligned}$$

egyenletrendszert Gauss-eliminációval. Mi történik, ha az utolsó egyenlet jobb oldalán 0 szerepel? Van-e megoldás, ha mindhárom egyenlet jobb oldala 0?

6.6. Feladat. Oldjuk meg a valós számok körében a

$$\begin{aligned} 3x_1 + x_2 - x_3 - x_4 \phantom{{}+2x_5} &= 2 \\ 9x_1 + x_2 - 2x_3 - x_4 - 2x_5 &= 5 \\ x_1 - x_2 \phantom{{}-2x_3} - x_4 + 2x_5 &= 1 \\ x_1 + x_2 - x_3 - 3x_4 + 4x_5 &= 2 \end{aligned}$$

egyenletrendszert.

Opcionális (ha marad idő)

6.7. Feladat. Hány lineárisan független vektor választható ki az alábbi vektorok közül?

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \\ -4 \\ 1 \end{bmatrix}$$

7. Paraméteres lineáris egyenletrendszerek, sajátértékek, sajátvektorok, diagonalizálás

7.1. Feladat. Határozzuk meg a paraméter függvényében az egyenletrendszer megoldását.

a)

$$\begin{aligned} 5x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 &= a \\ 2x_1 + x_2 + 4x_3 - 2x_4 &= 1 \\ x_1 - 3x_2 - 6x_3 + 5x_4 &= 0 \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} 3x - 2y + z &= 0 \\ -x + y + z &= 0 \\ y + bz &= 0 \end{aligned}$$

7.2. Feladat. Határozzuk meg az alábbi mátrix sajátértékeit és sajátvektorait.

$$\begin{bmatrix} -1 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

7.3. Feladat (hf). Kiválasztható-e az előző feladatban kiszámított mátrix sajátvektorai közül bázis az $\mathbb{R}^3$ vektortérben? Ha igen, adjunk meg egy mátrixot, mellyel diagonalizálhatjuk a mátrixot. Hajtsuk végre a diagonalizációt.

7.4. Feladat. Határozzuk meg a mátrix sajátértékeit és sajátvektorait. Adjunk meg a sajátvektorokból álló bázist. Diagonalizáljuk a mátrixot.

a) $\begin{bmatrix} 5 & -6 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

8. Többváltozós függvények deriválása

8.1. Feladat. Határozzuk meg az alábbi függvények elsőrendű parciális deriváltjait.

a) $f(x, y) = x^3 - 5x^2y - xy + 3y^6 - 1$,

b) $f(x, y) = e^{x^2+y^3}$,

c) $f(x, y, z) = xe^{-y} \tan(z)$.

8.2. Feladat (hf). Számítsuk ki az $f(x, y) = \arctan \frac{x}{y}$ függvény elsőrendű parciális deriváltjait.

8.3. Feladat. Írjuk fel az adott pontban az alábbi felületek érintősíkját.

a) $f(x, y) = x^2 + 3xy + y^2; \quad P(1, -2)$,

b) $f(x, y) = x \ln(x + y); \quad P(-2, 3)$.

8.4. Feladat (hf). Írjuk fel az $f(x, y) = \dfrac{\sqrt{x-2}}{e^{y-1}}$ függvény érintősíkját a $P(3, 1)$ pontban.

8.5. Feladat. Számítsuk ki az alábbi kétváltozós függvények iránymenti deriváltját az adott pontban.

a) $f(x, y) = 2x^2 - 3xy + y^2 + 15; \quad P(3, 2); \quad \mathbf{v} = (2, -4)$,

b) $f(x, y) = \tan(2x + y); \quad P(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}); \quad \varphi = 225°$.

8.6. Feladat. Az $f(x, y) = \frac{y^3}{e^{2x+1}}$ képlettel megadott felületre a $(-\frac{1}{2}, 1)$ pont fölött egy vízcseppet ejtünk. Merre fog elindulni? Mekkora az adott pontban a maximális meredekség?

8.7. Feladat (hf). Legyen $f(x, y) = \sqrt{x^2 - 4y}$. Számítsuk ki a $P(4, 3)$ pontban az iránymenti derivált minimumát és maximumát.

Opcionális (ha marad idő)

8.8. Feladat. Az $f(x, y) = \ln(xy)$ felületnek mely pontjában lesz az érintősík párhuzamos az $x + y + z = 1$ egyenletű síkkal?

9. Lokális szélsőértékek

9.1. Feladat. Írjuk fel az $\mathbf{f}(x,y,z) = (x + 2yz, \sqrt{x} + \ln z)$ függvény $(4,3,1)$ pontbeli Jacobi-mátrixát.

9.2. Feladat. Legyen $f(x,y) = 3x^2y$ és $x(t) = \sin t$, $y(t) = \ln t$. Határozzuk meg az $f(x(t), y(t))$ függvény deriváltját a többváltozós láncszabály segítségével.

9.3. Feladat. Határozzuk meg az alábbi kétváltozós függvények lokális szélsőértékeit.

a) $f(x,y) = 4x^2 + 2xy + 5y^2 + 2$,

b) $f(x,y) = y^4 - 3y + x^2y + 2xy$,

c) $f(x,y) = 2 + 2x + 2y - x^2 - e^y$.

9.4. Feladat (hf). Határozzuk meg az $f(x,y) = \dfrac{xy}{27} + \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y}$ függvény lokális szélsőértékeit.

9.5. Feladat. Egy $V = 4{,}5\,\mathrm{dm}^3$ térfogatú téglatest alakú dobozt hosszában egyszer, keresztben pedig kétszer átkötünk egy zsineggel. Mekkora legyen a csomag szélessége, hossza és magassága, hogy a legkevesebb zsineget kelljen felhasználni?

9.6. Feladat. Felül nyitott, téglatest alakú dobozt készítünk, melynek térfogata $1\,\mathrm{m}^3$. Mekkora legyen éleinek hosszúsága, hogy elkészítéséhez a lehető legkevesebb anyagot használjuk fel?

9.7. Feladat (hf). Egy $1\,\mathrm{m}^3$ térfogatú téglatest alját és tetejét két rétegben, a többi oldalát egy rétegben befestjük. Milyen hosszúak legyenek a téglatest oldalélei, hogy a lehető legkevesebb festék kelljen ehhez?

Opcionális (ha marad idő)

9.8. Feladat. A $z = 2x^2 + y^2$ felület és a $z = 5$ sík által határolt térrészbe a lehető legnagyobb térfogatú hasábot írjuk. Mekkora ennek a hasábnak a térfogata?

10. Sorozatok, numerikus sorok

10.1. Feladat. Állapítsuk meg a sorozatok határértékét.

a) $a_n = \dfrac{5n^2 - 3n - 1}{n+3}$,

b) $a_n = \sqrt[n]{n+3}$,

c) $a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$,

d) $a_n = \dfrac{\sqrt{n^2+1} - n}{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}$,

e) $a_n = \left(\dfrac{3n-1}{3n+2}\right)^{2n}$.

10.2. Feladat (hf). Számoljuk ki az $a_n = \left(\dfrac{n+2}{n-3}\right)^{n+1}$ sorozat határértékét.

10.3. Feladat. Írjuk fel az alábbi sorok részletösszeg-sorozatát, konvergensek-e ezek a sorok? Ha igen, akkor mi lesz a sor összege?

a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n$,

b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{2n-1} + 3^n}{6^{n+1}}$.

10.4. Feladat (hf). Számoljuk ki a $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 + 3^{n-1}}{5^n}$ sor összegét.

10.5. Feladat. Döntsük el, hogy az alábbi sorok Leibniz típusúak-e. Abszolút konvergensek a sorok?

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{2n+1}}$,

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{n^2+1}$,

10.6. Feladat. Döntsük el, hogy az alábbi sorok konvergensek, abszolút konvergensek vagy divergensek.

a) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n!}$,

b) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$,

c) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ln(n)}$, *d)* $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{n+1}{n+4}\right)^n$.

10.7. Feladat (hf). Döntsük el, hogy az alábbi sorok konvergensek, abszolút konvergensek vagy divergensek.

a) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n^3}}$,

b) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{3^n}{n!}$,

11. Hatványsorok, Taylor-sorok

11.1. Feladat. Állapítsuk meg az alábbi hatványsorok konvergenciatartományát.

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{\sqrt{n}}$,

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{2^{n-1}}$,

c) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-5)^n}{n!}$.

11.2. Feladat (hf). Állapítsuk meg a $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(x+1)^n}{3^{n+1}}$ hatványsor konvergenciatartományát.

11.3. Feladat. Írjuk fel a megadott függvények $x_0 = 0$ pont körüli Taylor-sorát. Határozzuk meg a sorok konvergenciasugarát is.

a) $\cos 5x$,

b) e^{-x^2},

c) $\displaystyle\frac{x}{4+x^2}$,

d) $\displaystyle\frac{x+1}{x+3}$.

11.4. Feladat (hf). Írjuk fel az $f(x) = x \sin 2x$ függvény $x_0 = 0$ pont körüli Taylor-sorát.

11.5. Feladat. Számoljuk ki $\sin(1)$ és $\dfrac{1}{e}$ értékét 3 tizedesjegy pontossággal.

11.6. Feladat (hf). Számoljuk ki $\cos(0{,}1)$ értékét 4 tizedesjegy pontossággal.

12. Többváltozós függvények integrálása

12.1. Feladat. Számítsuk ki az alábbi kétváltozós függvények integrálját a megadott tartományon.

a) $f(x, y) = 2x^2 + 3xy + 4y^2$, $1 \le x \le 2$, $0 \le y \le 3$,

b) $f(x, y) = xe^y$, $y = x^2$ és $y = x + 2$ között,

c) $f(x, y) = xy$, $y = x$, $y = 3 - x$ és az x-tengely közötti háromszögön.

12.2. Feladat. Cseréljük fel az integrálás sorrendjét, és számoljuk ki az alábbi integrálokat.

a) $\displaystyle\int_0^8 \int_{\sqrt[3]{x}}^2 \frac{1}{y^4 + 1} \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}x$,

b) $\displaystyle\int_0^1 \int_{y^2}^1 y \sin(x^2) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y$.

12.3. Feladat. Polárkoordináták segítségével számoljuk ki az alábbi integrálokat a megadott tartományon.

a) $\displaystyle\iint_A x^3 y \, \mathrm{d}(x, y)$, $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 \le 2, 0 \le x, 0 \le y\}$,

b) $\displaystyle\iint_A (x^2 + y^2) \, \mathrm{d}(x, y)$, $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | 1 \le x^2 + y^2 \le 9, 0 \le y, x \le y\}$.

12.4. Feladat (hf). Számítsuk ki az alábbi integrálokat.

a) $\displaystyle\iint_A \frac{x^2}{y^2} \, \mathrm{d}(x, y)$, ahol $A = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \middle| \frac{1}{x} \le y \le x, 1 \le x \le 2\right\}$,

b) $\displaystyle\int_0^1 \int_{2y}^2 4 \cos(x^2) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y$,

c) $\displaystyle\iint_A y^2 \, \mathrm{d}(x, y)$, ahol $A = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \middle| x^2 + y^2 \le 3, 0 \le y \le \sqrt{3}x\right\}$.

12.5. Feladat. Számítsuk ki az alábbi háromváltozós függvények integrálját a megadott térrészben.

a) $f(x, y, z) = x^2 + y - z$, $0 \le x \le 2$, $0 \le y \le 1$, $0 \le z \le 3$,

b) $f(x, y, z) = x - 2y + 4z$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ és $x + y + z = 1$ síkok közötti rész.

12.6. Feladat. Alkalmas koordináták bevezetésével határozzuk meg a felületek által határolt, illetve az egyenlőtlenségek által meghatározott tartományok térfogatát.

a) $z = 4 + x + 2y$, $z = 0$, $x^2 + y^2 = 1$,

b) $0 \le z \le \sqrt{4 - x^2 - y^2}$,

c) $0 \le z \le \sqrt{x^2 + y^2}$, $x^2 + y^2 \le 4$,

d) $x^2 + y^2 + z^2 \le 1$, $\sqrt{x^2 + y^2} \le z \le \sqrt{3}\sqrt{x^2 + y^2}$,

e) $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, $z = 6 - x^2 - y^2$.

12.7. Feladat (hf). Számítsuk ki az alábbi alakzatok térfogatát.

a) a $0 \leq x \leq 2$, $0 \leq y \leq 1$, $0 \leq z \leq x^2 + y^2$ egyenlőtlenségek által meghatározott térrész,

b) a $z = 0$, $x^2 + y^2 = 4$ és a $z = x^2 + y^2$ felületek által határolt tartomány,

c) az α félnyílásszögű egységsugarú gömbcikk.

13. Gyakorló feladatok

13.1. Feladat. Számítsuk ki az alábbi improprius integrálokat.

a) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x}}\,\mathrm{d}x$,

b) $\displaystyle\int_0^2 \frac{4}{x^3}\,\mathrm{d}x$,

c) $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{6}{\sqrt[3]{x+1}}\,\mathrm{d}x$,

d) $\displaystyle\int_0^3 \frac{1}{\sqrt{9-x^2}}\,\mathrm{d}x$,

e) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{2x-x^2}}\,\mathrm{d}x$,

f) $\displaystyle\int_0^\infty xe^{-3x}\,\mathrm{d}x$,

g) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{1}{2+x^2}\,\mathrm{d}x$,

h) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{1}{(x+1)(x+2)}\,\mathrm{d}x$,

i) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$,

j) $\displaystyle\int_2^\infty \frac{1}{\sqrt{(x+1)^5}}\,\mathrm{d}x$.

13.2. Feladat. Írja fel az alábbi komplex számokat algebrai alakban.

a) $\frac{2+i}{3-2i}$,

b) $(1+i)^3$,

c) $\frac{\overline{2+i}}{\sqrt{2}(\cos 45^\circ + i\sin 45^\circ)}$,

d) $(1-i)^{10}$.

13.3. Feladat. Írja fel az alábbi komplex számokat trigonometrikus alakban.

a) $\frac{\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)^4}{\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right)\overline{\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)}}$,

b) $(1+\sqrt{3}i)^5$,

c) $\sqrt[3]{4+4\sqrt{3}i}$,

d) $(1-i)^{10}$.

13.4. Feladat. Keressük meg a polinom gyökeit a komplex számok körében és írjuk fel gyöktényezős alakban.

a) z^2+9,

b) $z^2+4z+13$,

c) z^4+12z^2-48.

13.5. Feladat. Számítsuk ki az **a** és **b** vektorok skaláris szorzatát és hajlásszögét.

a) $\mathbf{a}=(-1,4,1)$, $\mathbf{b}=(0,3,-3)$,

b) $\mathbf{a}=(2,3,6)$, $\mathbf{b}=(1,-9,-4)$,

c) $\mathbf{a}=(-1,9,4)$, $\mathbf{b}=(3,8,-5)$.

13.6. Feladat. Bontsuk fel a **v** vektort az **a** vektorral párhuzamos és arra merőleges komponensek összegére.

a) $\mathbf{v}=(2,1,-2)$, $\mathbf{a}=(3,2,1)$,

b) $\mathbf{v}=(-2,3,-2)$, $\mathbf{a}=(1,-2,1)$,

c) $\mathbf{v}=(1,0,0)$, $\mathbf{a}=(1,1,1)$.

13.7. Feladat. Határozzuk meg az $ABC\triangle$ területét.

a) $A(1,0,0)$, $B(0,1,0)$, $C(0,0,1)$,

b) $A(7,-9,6)$, $B(1,3,2)$, $C(3,6,8)$,

c) $A(-1,3,2)$, $B(3,-1,4)$, $C(0,5,4)$.

13.8. Feladat. Írjuk fel a P ponton áthaladó, **n** normálvektorú sík egyenletét, és számítsuk ki a Q pontnak ettől a síktól vett távolságát.

a) $P(8,1,4)$, $\mathbf{n}=(2,1,-2)$, $Q(0,0,0)$,

b) $P(0,6,2)$, $\mathbf{n}=(2,-2,1)$, $Q(2,-5,3)$,

c) $P(2,-1,5)$, $\mathbf{n}=(3,0,3)$, $Q(-2,0,-3)$.

13.9. Feladat. Írjuk fel a P ponton áthaladó, $\mathbf{v}_1$ és $\mathbf{v}_2$ vektorokkal párhuzamos sík egyenletét.

a) $P(0,2,1)$, $\mathbf{v}_1=(1,2,1)$, $\mathbf{v}_2=(-1,1,0)$,

b) $P(-1,3,2)$, $\mathbf{v}_1=(3,0,-1)$, $\mathbf{v}_2=(1,0,2)$,

c) $P(0,0,0)$, $\mathbf{v}_1=(0,1,3)$, $\mathbf{v}_2=(2,2,-1)$,

13.10. Feladat. Fejezzük ki az $\mathbb{R}^3$ tér **x** vektorát az **a**, **b** és **c** vektorok lineáris kombinációjaként, ha lehetséges.

a) $\mathbf{x}=(3,4,-5)$, $\mathbf{a}=(-1,0,1)$, $\mathbf{b}=(-3,3,0)$, $\mathbf{c}=(-3,1,1)$,

b) $\mathbf{x}=(1,3,-1)$, $\mathbf{a}=(-3,1,-1)$, $\mathbf{b}=(1,1,1)$, $\mathbf{c}=(4,-4,0)$,

c) $\mathbf{x}=(-1,-2,3)$, $\mathbf{a}=(1,-3,-2)$, $\mathbf{b}=(0,-1,-3)$, $\mathbf{c}=(3,-2,0)$.

13.11. Feladat. Tekintsük a

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 4 & -3 & -1 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix}$$

mátrixokat. Számítsuk ki a következő mátrixműveletek eredményét, ha lehetséges:

a) $A \cdot B^T - C$

b) $C^T \cdot A$

c) $B^T \cdot C$

d) $A^T \cdot A + B^T \cdot B$

e) $A \cdot A^T + B \cdot B^T$

f) $C^T \cdot C + B \cdot B^T$

13.12. Feladat. Számítsuk ki a mátrix determinánsát. A p paramétertől függő mátrixok a paraméter mely értékére lesznek szingulárisak?

a) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 5 & 3 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 5 & 3 \end{bmatrix}$

d) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & p \end{bmatrix}$

e) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & p \\ 4 & 9 & p^2 \end{bmatrix}$

13.13. Feladat. Határozzuk meg azt az X mátrixot, amelyre $AX = B$ teljesül.

a) $A = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -3 & 3 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ -3 & -3 \end{bmatrix}$

b) $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 1 & -3 & -2 \\ 2 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

c) $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 6 & -1 & 2 \\ -2 & 2 & 6 \\ -4 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

13.14. Feladat. Oldjuk meg a valós számok körében az egyenletrendszert.

a)

$$\begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 - 3x_3 &= -7 \\ -x_1 - x_2 - x_3 &= 5 \\ -3x_1 + 3x_2 - 2x_3 &= 2 \\ 2x_1 - x_3 &= -3 \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} -x_1 + x_2 + 2x_3 &= -4 \\ 3x_1 - 3x_3 &= 6 \\ -2x_1 - 4x_2 - 2x_3 &= 4 \end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 &= 2 \\ x_2 + x_3 + x_4 &= 3 \\ x_3 + x_4 &= 4 \end{aligned}$$

13.15. Feladat. Határozzuk meg az A mátrix rangját.

a) $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & -4 \\ -4 & 0 & -2 & 8 \\ -2 & -2 & -1 & 6 \end{bmatrix}$

b) $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 3 \\ -2 & -2 & -2 \\ -1 & 3 & 0 \end{bmatrix}$

c) $A = \begin{bmatrix} -8 & 2 & -8 \\ -6 & 1 & -7 \\ 6 & -1 & 4 \\ 4 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

d) $A = \begin{bmatrix} -2 & 6 & 2 \\ 2 & 4 & 0 \\ 5 & 0 & -2 \end{bmatrix}$

13.16. Feladat. Határozzuk meg a paraméter függvényében az egyenletrendszer megoldását.

a)

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + \quad x_3 &= 0 \\ 7x_1 + 5x_2 + \ 4x_3 &= 0 \\ 5x_1 + \ x_2 + a \cdot x_3 &= 0 \\ 3x_1 \qquad + \quad x_3 &= 0 \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} 6x_2 &= 3 \\ 8x_1 + 2x_2 &= -1 \\ -12x_1 \qquad &= b \end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned} -x_1 - 2x_2 - 8x_3 + 5x_4 &= 4 \\ -2x_1 \qquad - 6x_3 + 4x_4 &= c \\ -4x_1 + 2x_2 - 7x_3 + 5x_4 &= 1 \end{aligned}$$

13.17. Feladat. Határozzuk meg az A mátrix sajátértékeit és sajátvektorait.

a) $A = \begin{bmatrix} 7 & 9 \\ -6 & -8 \end{bmatrix}$

b) $A = \begin{bmatrix} -4 & 9 & 4 \\ -1 & 2 & 1 \\ -2 & 5 & 2 \end{bmatrix}$

c) $A = \begin{bmatrix} 7 & 2 & 6 \\ 6 & 3 & 6 \\ -9 & -3 & -8 \end{bmatrix}$

13.18. Feladat. Írjuk fel az $f(x,y)$ függvény érintősíkját a P pontban.

a) $f(x,y) = x^2 + 4xy + y^2$, $P(-1,2)$,

b) $f(x,y) = \cos(x^2 + y^2)$, $P(0, \sqrt{\pi})$,

c) $f(x,y) = ye^{x+y^2}$, $P(0,0)$.

13.19. Feladat. Számítsuk ki a P pontban az f függvény iránymenti deriváltjának minimumát és maximumát.

a) $f(x,y) = x^2 - 3x + 4xy$, $P(2,2)$

b) $f(x,y) = \frac{\sin x}{\cos y}$, $P(\frac{\pi}{6}, 0)$

c) $f(x,y) = x \ln y$, $P(0,1)$.

13.20. Feladat. Határozzuk meg az összetett függvény deriváltját a többváltozós láncszabály segítségével.

a) $f(x(t), y(t))$, $f(x, y) = x^2 + y^2$, $x(t) = t\cos t$, $y(t) = t\sin t$

b) $\mathbf{f}(\mathbf{g}(s, t))$, $\mathbf{f}(x, y) = (x + y, x - y)$, $\mathbf{g}(s, t) = (s^2, t^2 - st)$

c) $\mathbf{f}(t(x, y))$, $\mathbf{f}(t) = (t, \frac{1}{t})$, $t(x, y) = x/y$

13.21. Feladat. Határozzuk meg az alábbi kétváltozós függvények lokális szélsőértékhelyeit.

a) $f(x, y) = 4x + y^2 + 2x^2y$,

b) $f(x, y) = x^4 - x^2y + y^3$,

c) $f(x, y) = xy - x^2 + x^3 - y^2$.

13.22. Feladat.

a) Egy gyümölcstermelő almát és barackot termel. Egy tonna almát 3 tallérért, egy tonna barackot pedig 4 tallérért tud értékesíteni, míg a tonna alma és b tonna barack előállításának költsége összesen $a^2 - ab + 3b^2$ tallér. Mennyi alma és barack termelésével tehet szert a legnagyobb haszonra?

b) Egy $8\,\mathrm{m}^3$ térfogatú téglatestet fogunk készíteni, és három egy csúcsban találkozó lapját két rétegben, a többit egy rétegben befesteni. Mekkorák legyenek az élek, hogy a lehető legkevesebb festékre legyen szükség?

c) Buli Béla hangulatindexe x dl sör, y dl bor és z dl pálinka elfogyasztása után xyz. Egy este kedvenc szórakozóhelyére indul, ahol 100 Ft egy dl sör, 250 Ft egy dl bor és 2000 Ft egy dl pálinka ára. Mennyit rendeljen az egyes italtermékekből, ha a lehető legjobb kedvet szeretné elérni, és 7500 Ft van nála?

13.23. Feladat. Állapítsuk meg a sorozatok határértékét.

a) $a_n = \frac{2n^2 - 3n + 5}{4n - 3}$,

b) $a_n = \frac{n}{\sqrt{n^2 - 1} - 1}$,

c) $a_n = \left(1 + \frac{n+1}{n^2 - 4}\right)^n$,

d) $a_n = \sqrt{n^4 + n^2} + n^2$.

13.24. Feladat. Számoljuk ki a sor összegét.

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{2n+1} - 3 \cdot 2^n}{5^n}$,

b) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{5 \cdot 3^{n-2} + 9 \cdot 2^n}{4^n}$.

c) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{5^{n+1} + 6^n}{8^n}$,

13.25. Feladat. Döntsük el, hogy az alábbi sorok feltételesen konvergensek, abszolút konvergensek vagy divergensek.

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{\sqrt{n+2}}$.

b) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n^5}{5^n}$,

c) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2^n}$,

d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{3n+5}$.

e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+2}}$.

13.26. Feladat. Állapítsuk meg az alábbi hatványsorok konvergenciatartományát.

a) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{15}{n+3} x^n$,

b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{(2n)!} x^n$,

c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{2^n} x^n$.

13.27. Feladat. Írjuk fel a megadott függvények $x_0 = 0$ pont körüli Taylor-sorát.

a) $f(x) = \frac{3}{2x+5}$,

b) $f(x) = x\cos(2x^2)$,

c) $f(x) = e^{3x-2}$.

13.28. Feladat. Számítsuk ki az alábbi kétváltozós függvények integrálját a megadott tartományon.

a) $f(x, y) = (x + y)^2$, $0 \le x \le 1$, $0 \le y \le 1$,

b) $f(x, y) = x$, $1 \le x \le 2$, $0 \le y \le x$,

c) $f(x, y) = e^y$, $0 \le y \le 2$, $-1 \le x \le y$.

13.29. Feladat. Cseréljük fel az integrálás sorrendjét, és számoljuk ki az alábbi integrálokat.

a) $\displaystyle\int_0^{\pi} \int_y^{\pi} \frac{\sin x}{x} \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y$,

b) $\displaystyle\int_0^{2} \int_x^{2} x\sqrt{1+y^3} \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}x$.

13.30. Feladat. Polárkoordináták segítségével számoljuk ki az alábbi integrálokat a megadott tartományon.

a) $\iint_A \sqrt{x^2+y^2} \,\mathrm{d}(x, y)$, $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | 1 \le x^2 + y^2 \le 4, 0 \le y\}$,

b) $\iint_A \frac{x}{x^2+y^2} \,\mathrm{d}(x, y)$, $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | 4 \le x^2 + y^2 \le 9, 0 \le x\}$,

c) $\iint_A xy \,\mathrm{d}(x, y)$, $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 \le 1, 0 \le y \le x\}$,

13.31. Feladat. Alkalmas koordináták bevezetésével határozzuk meg a felületek által határolt, illetve az egyenlőtlenségek által meghatározott tartományok térfogatát.

a) $0 \leq z \leq 1 - x^2 - y^2$,

b) $x^2 + y^2 \leq 4$, $0 \leq z \leq 2 + x$,

c) $1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 4$, $z^2 \geq x^2 + y^2$,

d) $x^2 + y^2 + z^2 \leq 9$, $0 \leq y \leq x$.