1. Számítsa ki az $f(x) = x^2e^{-x^3}$ függvény integrálját 0 és $+\infty$ között. (5 pont)

Megoldás.

$$\begin{aligned}\int_0^\infty x^2e^{-x^3}\,\mathrm{d}x &= \lim_{b\to\infty}\int_0^b x^2e^{-x^3}\,\mathrm{d}x\\ &= \lim_{b\to\infty}\left[-\frac{1}{3}e^{-x^3}\right]_0^b\\ &= \lim_{b\to\infty}\left(-\frac{1}{3}e^{-b^3}-\left(-\frac{1}{3}\right)\right) = 0+\frac{1}{3}=\frac{1}{3}.\end{aligned}$$

2. Határozza meg a $z^4 + 3z^2 - 4$ polinom gyökeit a komplex számok körében. (5 pont)

Megoldás. Az egyenlet a $w := z^2$ új változóra nézve másodfokú: $w^2 + 3w - 4 = 0$, megoldása $w_\pm = \frac{-3\pm\sqrt{3^2-4(-4)}}{2} = \frac{-3\pm5}{2}$, tehát $w_+ = 1$ és $w_- = -4$. Az eredeti polinom gyökei a $z^2 = 1$ illetve $z^2 = -4$ egyenlet megoldásai, azaz ±1 és $\pm2i$.

3. Bontsa fel a $\mathbf{v} = (2, 9, 2)$ vektort az $\mathbf{a} = (1, 1, -1)$ vektorral párhuzamos és arra merőleges komponensek összegére. (5 pont)

Megoldás. A párhuzamos összetevő

$$\begin{aligned}\mathbf{v}_\parallel &= \frac{\langle\mathbf{a},\mathbf{v}\rangle}{|\mathbf{a}|^2}\mathbf{a}\\ &= \frac{1\cdot2+1\cdot9+(-1)\cdot2}{1^2+1^2+(-1)^2}(1,1,-1)\\ &= (3,3,-3),\end{aligned}$$

a merőleges összetevő

$$\mathbf{v}_\perp = \mathbf{v}-\mathbf{v}_\parallel = (2,9,2)-(3,3,-3) = (-1,6,5).$$

4. Számítsa ki az A mátrix determinánsát. (5 pont)

$$A = \begin{bmatrix}1 & 2 & 2 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 3\\ 1 & -1 & -1 & 2\\ 0 & 0 & 2 & 1\end{bmatrix}$$

Megoldás.

$$\begin{aligned}\det A = \begin{vmatrix}1 & 2 & 2 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 3\\ 1 & -1 & -1 & 2\\ 0 & 0 & 2 & 1\end{vmatrix} &\overset{s_3-s_1}{=} \begin{vmatrix}1 & 2 & 2 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 3\\ 0 & -3 & -3 & 1\\ 0 & 0 & 2 & 1\end{vmatrix}\\ &\overset{s_2\leftrightarrow s_3}{=} -\begin{vmatrix}1 & 2 & 2 & 1\\ 0 & -3 & -3 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 3\\ 0 & 0 & 2 & 1\end{vmatrix} \overset{s_4-2s_3}{=} -\begin{vmatrix}1 & 2 & 2 & 1\\ 0 & -3 & -3 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 3\\ 0 & 0 & 0 & -5\end{vmatrix} = -15.\end{aligned}$$