1. Oldja meg a lineáris egyenletrendszert. (5 pont)

$$\begin{aligned} x_1 - 7x_2 + 6x_3 &= \phantom{-}5 \\ 5x_2 - 4x_3 &= -2 \\ 4x_1 + 2x_2 \phantom{+6x_3} &= \phantom{-}8 \end{aligned}$$

*Megoldás.* Végezzünk a kibővített mátrixon Gauss-eliminációt:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -7 & 6 & 5 \\ 0 & 5 & -4 & -2 \\ 4 & 2 & 0 & 8 \end{array}\right] \overset{s_3-4s_1}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -7 & 6 & 5 \\ 0 & 5 & -4 & -2 \\ 0 & 30 & -24 & -12 \end{array}\right] \overset{s_3-6s_2}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -7 & 6 & 5 \\ 0 & 5 & -4 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Az együtthatómátrix rangja 2 és az ismeretlenek száma 3, emiatt egy ismeretlen tetszőlegesen megválasztható. A megoldás: $x_3$ tetszőleges, $x_2 = \frac{-2+4x_3}{5}$, $x_1 = 5 - 6x_3 + 7x_2 = \frac{11-2x_3}{5}$.

2. Írja fel az $f(x,y) = e^{x+x^2-y}$ függvény grafikonjának $P(0,0)$ ponthoz tartozó érintősíkjának egyenletét. (5 pont)

*Megoldás.* A függvényérték a $P$ pontban $f(0,0) = e^0 = 1$. A parciális deriváltak

$$f'_x(x,y) = e^{x+x^2-y}(1+2x) \qquad\qquad f'_y(x,y) = -e^{x+x^2-y},$$

tehát $f'_x(0,0) = 1$ és $f'_y(0,0) = -1$. Az érintősík egyenlete tehát $z = 1 + x - y$.

3. Egy üzem xilofonokat és jojókat állít elő, $x$ darab xilofon és $y$ darab jojó előállításának költsége $x^2 + xy + y^2$ fabatka. Egy xilofont 5 fabatkáért lehet értékesíteni, míg egy jojót 4 fabatkáért. Mennyi xilofont és jojót állítson elő az üzem a lehető legnagyobb profit eléréséhez? (5 pont)

*Megoldás.* A profit $f(x,y) = 5x + 4y - (x^2 + xy + y^2)$, ennek maximumát keressük. A parciális deriváltak

$$f'_x(x,y) = 5 - 2x - y \qquad\qquad f'_y(x,y) = 4 - x - 2y,$$

az $f'_x(x,y) = f'_y(x,y) = 0$ egyenletrendszer megoldása $x = 2$, $y = 1$. Ez valóban minimumhely, mert

$$\begin{bmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} \\ f''_{yx} & f''_{yy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$$

determinánsa $(-2)\cdot(-2) - (-1)\cdot(-1) = 3 > 0$ és a főátló elemei negatívak. Tehát az üzemnek 2 xilofont és 1 jojót érdemes előállítania.

4. Határozza meg a $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{9\cdot 2^n + 2\cdot 3^{n+1}}{5^n}$ sor összegét. (5 pont)

*Megoldás.*

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{9\cdot 2^n + 2\cdot 3^{n+1}}{5^n} &= \sum_{n=1}^{\infty} \left[ 9\left(\frac{2}{5}\right)^n + 6\left(\frac{3}{5}\right)^n \right] \\ &= 9\cdot\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{1-\frac{2}{5}} + 6\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{1}{1-\frac{3}{5}} = 6 + 9 = 15. \end{aligned}$$