1. Számítsa ki az alábbi improprius integrált. (5 pont)

$$\int_2^3 \frac{1}{\sqrt{x-2}}\,\mathrm{d}x$$

Megoldás.

$$\begin{aligned}\int_2^3 \frac{1}{\sqrt{x-2}}\,\mathrm{d}x &= \lim_{a\to 2+}\int_a^3 \frac{1}{\sqrt{x-2}}\,\mathrm{d}x = \lim_{a\to 2+}\left[2\sqrt{x-2}\right]_a^3 \\ &= \lim_{a\to 2+}\left(2\sqrt{3-2}-2\sqrt{a-2}\right) = 2-0=2.\end{aligned}$$

2. Legyen $z=-2+2i$. Írja fel trigonometrikus alakban, majd számolja ki a harmadik gyökeit. (5 pont)

Megoldás. $|z|=\sqrt{(-2)^2+2^2}=2\sqrt{2}$, $z=2\sqrt{2}(-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}i)=2\sqrt{2}(\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4})$. A harmadik gyökök $\sqrt[3]{2\sqrt{2}}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}+k\frac{2\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{4}+k\frac{2\pi}{3}\right)\right)$, $k=0,1,2$, azaz

$$\begin{aligned}&\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}\left(\cos 45^\circ+i\sin 45^\circ\right)=1+i,\\ &\sqrt{2}\left(\cos\frac{11\pi}{12}+i\sin\frac{11\pi}{12}\right)=\sqrt{2}\left(\cos 165^\circ+i\sin 165^\circ\right),\\ &\sqrt{2}\left(\cos\frac{19\pi}{12}+i\sin\frac{19\pi}{12}\right)=\sqrt{2}\left(\cos 285^\circ+i\sin 285^\circ\right).\end{aligned}$$

3. Számítsa ki az $\mathbf{a}=(2,2,-1)$ és a $\mathbf{b}=(3,0,-3)$ vektorok skaláris szorzatát és hajlásszögét.

Megoldás.

$$\begin{aligned}\langle\mathbf{a},\mathbf{b}\rangle &= 2\cdot 3+2\cdot 0+(-1)\cdot(-3)=9\\ |\mathbf{a}| &= \sqrt{2^2+2^2+(-1)^2}=3\\ |\mathbf{b}| &= \sqrt{3^2+0^2+(-3)^2}=3\sqrt{2}\\ \cos\measuredangle(\mathbf{a},\mathbf{b}) &= \frac{\langle\mathbf{a},\mathbf{b}\rangle}{|\mathbf{a}||\mathbf{b}|}=\frac{9}{3\cdot 3\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\\ \measuredangle(\mathbf{a},\mathbf{b}) &= \frac{\pi}{4}=45^\circ\end{aligned}$$

4. Számítsa ki az A mátrix inverzét. (5 pont)

$$A=\begin{bmatrix}1&0&0\\2&1&0\\-3&1&1\end{bmatrix}$$

Megoldás.

$$\begin{aligned}\left[A\mid E_3\right]=\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&1&0&0\\2&1&0&0&1&0\\-3&1&1&0&0&1\end{array}\right]&\overset{\substack{s_2-2s_1\\ s_3+3s_1}}{\sim}\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&1&0&0\\0&1&0&-2&1&0\\0&1&1&3&0&1\end{array}\right]\\ &\overset{s_3-s_2}{\sim}\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&1&0&0\\0&1&0&-2&1&0\\0&0&1&5&-1&1\end{array}\right]=\left[E_3\mid A^{-1}\right],\end{aligned}$$

tehát $A^{-1}=\begin{bmatrix}1&0&0\\-2&1&0\\5&-1&1\end{bmatrix}$.