2023. december 4. Matematika A2a **PZH2**

1. Határozza meg az A mátrix rangját. (5 pont)

$$A = \begin{bmatrix} -2 & -3 & 7 & -4 \\ -4 & -1 & -11 & 2 \\ 0 & 1 & -5 & 2 \end{bmatrix}$$

Megoldás. Végezzünk Gauss-eliminációt:

$$\begin{bmatrix} -2 & -3 & 7 & -4 \\ -4 & -1 & -11 & 2 \\ 0 & 1 & -5 & 2 \end{bmatrix} \overset{s_2-2s_1}{\sim} \begin{bmatrix} -2 & -3 & 7 & -4 \\ 0 & 5 & -25 & 10 \\ 0 & 1 & -5 & 2 \end{bmatrix}$$
$$\overset{s_2\leftrightarrow s_3}{\sim} \begin{bmatrix} -2 & -3 & 7 & -4 \\ 0 & 1 & -5 & 2 \\ 0 & 5 & -25 & 10 \end{bmatrix} \overset{s_3-5s_2}{\sim} \begin{bmatrix} -2 & -3 & 7 & -4 \\ 0 & 1 & -5 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

A lépcsős alakban két nemnulla sor van, tehát a rang 2.

2. Számítsa ki az $f(x,y) = x^2 + y^2$ ($f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$) és $\mathbf{g}(u,v) = (u+v, u-v)$ ($g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$) függvények Jacobi-mátrixait, és a láncszabály segítségével határozza meg $f \circ \mathbf{g}$ Jacobi-mátrixát. (5 pont)

Megoldás.

$$f'(x,y) = \begin{bmatrix} 2x & 2y \end{bmatrix}$$
$$\mathbf{g}'(u,v) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$(f \circ \mathbf{g})'(u,v) = f'(\mathbf{g}(u,v)) \cdot \mathbf{g}'(u,v) = \begin{bmatrix} 2(u+v) & 2(u-v) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 4u & 4v \end{bmatrix}.$$

3. Határozza meg az $f(x,y) = x^2 + 3xy^2 + 18y^2$ függvény lokális szélsőértékhelyeit. (5 pont)

Megoldás. A parciális deriváltak

$$f'_x(x,y) = 2x + 3y^2 \qquad f'_y(x,y) = 6xy + 36y = 6(x+6)y,$$

az $f'_x(x,y) = f'_y(x,y) = 0$ egyenletrendszer megoldásai $(0,0)$ és $(-6, \pm 2)$.

$$\begin{bmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} \\ f''_{yx} & f''_{yy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 6y \\ 6y & 36+6x \end{bmatrix},$$

a $(0,0)$ pontban a determináns $2 \cdot 36 = 72 > 0$, tehát itt lokális szélsőérték van, lokális minimum, mivel a főátló elemei pozitívak. A másik két stacionárius pontban a determináns $2 \cdot 0 - 12^2 = -144 < 0$, tehát azok nyeregpontok.

4. Számítsa ki a $\lim_{n\to\infty} (\sqrt{n^2+n} - n)$ határértéket. (5 pont)

Megoldás.

$$\lim_{n\to\infty} (\sqrt{n^2+n} - n) = \lim_{n\to\infty} \frac{(\sqrt{n^2+n} - n)(\sqrt{n^2+n} + n)}{\sqrt{n^2+n} + n}$$
$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt{n^2+n} + n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{n}} + 1} = \frac{1}{2}.$$