2023. december 13. Matematika A2a **Vizsga**

E1. Hogyan számítjuk ki két komplex szám szorzatát és hányadosát, ha trigonometrikus alakban vannak megadva? Mi a szorzás művelet geometriai jelentése? (3 pont)

E2. Mit nevezünk k darab vektor lineáris kombinációjának? (3 pont)

E3. Ismertesse a mátrixrang fogalmát. Hogyan számítjuk ki egy mátrix rangját? (3 pont)

E4. Mit nevezünk egy többváltozós függvény lokális minimum- illetve maximumhelyének? (3 pont)

E5. Mondja ki a hatványsorokra vonatkozó Cauchy–Hadamard tételt. (3 pont)

1. Határozza meg a $z^4 + 3z^2 - 4$ polinom gyökeit a komplex számok körében, és írja fel a gyöktényezős alakját. (7 pont)

Megoldás. Az egyenlet a $w := z^2$ új változóra nézve másodfokú: $w^2 + 3w - 4 = 0$, megoldása $w_\pm = \frac{-3\pm\sqrt{3^2-4(-4)}}{2} = \frac{-3\pm 5}{2}$, tehát $w_+ = 1$ és $w_- = -4$. Az eredeti polinom gyökei a $z^2 = 1$ illetve $z^2 = -4$ egyenlet megoldásai, azaz ± 1 és $\pm 2i$. A gyöktényezős alak $(z-1)(z+1)(z-2i)(z+2i)$.

2. Bontsa fel a $\mathbf{v} = (2, 9, 2)$ vektort az $\mathbf{a} = (1, 1, -1)$ vektorral párhuzamos és arra merőleges komponensek összegére. (7 pont)

Megoldás. A párhuzamos összetevő

$$\begin{aligned}\mathbf{v}_\parallel &= \frac{\langle \mathbf{a}, \mathbf{v}\rangle}{|\mathbf{a}|^2}\mathbf{a} \\ &= \frac{1\cdot 2 + 1\cdot 9 + (-1)\cdot 2}{1^2 + 1^2 + (-1)^2}(1, 1, -1) \\ &= (3, 3, -3),\end{aligned}$$

a merőleges összetevő

$$\mathbf{v}_\perp = \mathbf{v} - \mathbf{v}_\parallel = (2, 9, 2) - (3, 3, -3) = (-1, 6, 5).$$

3. Oldja meg a lineáris egyenletrendszert. (7 pont)

$$\begin{aligned} x_1 - 7x_2 + 6x_3 &= 5 \\ 5x_2 - 4x_3 &= -2 \\ 4x_1 + 2x_2 \phantom{{}-4x_3} &= 8 \end{aligned}$$

Megoldás. Végezzünk a kibővített mátrixon Gauss-eliminációt:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -7 & 6 & 5 \\ 0 & 5 & -4 & -2 \\ 4 & 2 & 0 & 8 \end{array}\right] \overset{s_3-4s_1}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -7 & 6 & 5 \\ 0 & 5 & -4 & -2 \\ 0 & 30 & -24 & -12 \end{array}\right] \overset{s_3-6s_2}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -7 & 6 & 5 \\ 0 & 5 & -4 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Az együtthatómátrix rangja 2 és az ismeretlenek száma 3, emiatt egy ismeretlen tetszőlegesen megválasztható. A megoldás: x_3 tetszőleges, $x_2 = \frac{-2+4x_3}{5}$, $x_1 = 5 - 6x_3 + 7x_2 = \frac{11-2x_3}{5}$.

4. Határozza meg a $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{9\cdot 2^n + 2\cdot 3^{n+1}}{5^n}$ sor összegét. (8 pont)

Megoldás.

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{9\cdot 2^n + 2\cdot 3^{n+1}}{5^n} &= \sum_{n=1}^{\infty}\left[9\left(\frac{2}{5}\right)^n + 6\left(\frac{3}{5}\right)^n\right] \\ &= 9\cdot\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{1-\frac{2}{5}} + 6\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{1}{1-\frac{3}{5}} = 6 + 9 = 15.\end{aligned}$$

5. Állapítsa meg a $\displaystyle\sum_{n=5}^{\infty} \frac{7 \cdot 2^n}{5n-3} x^n$ hatványsor konvergenciatartományát. (8 pont)

Megoldás. A Cauchy–Hadamard-tétel szerint a konvergenciasugárra

$$\frac{1}{R} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|\frac{7 \cdot 2^n}{5n-3}\right|} = \lim_{n\to\infty} 2 \sqrt[n]{\left|\frac{7}{5n-3}\right|} = 2$$

teljesül. Az $x = \frac{1}{2}$ pontban a sor

$$\sum_{n=5}^{\infty} \frac{7 \cdot 2^n}{5n-3} \left(\frac{1}{2}\right)^n = \sum_{n=5}^{\infty} \frac{7}{5n-3},$$

ami divergens, mivel $\frac{7}{5n-3} \geq \frac{1}{n}$ és a harmonikus sor divergens. Az $x = \frac{1}{2}$ pontban a sor

$$\sum_{n=5}^{\infty} \frac{7 \cdot 2^n}{5n-3} \left(-\frac{1}{2}\right)^n = \sum_{n=5}^{\infty} (-1)^n \frac{7}{5n-3},$$

ami Leibniz típusú, tehát konvergens. A hatványsor konvergenciatartomány tehát $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.

6. Számítsa ki az $f(x,y) = xy^2$ függvény integrálját az $x = y$ és $y = x^2$ görbék által határolt korlátos tartományon. (8 pont)

Megoldás. Az $x = y$, $y = x^2$ egyenletrendszer megoldásai $x = y = 0$ illetve $x = y = 1$. A megadott alakzat normáltartomány, Fubini tétele szerint számoljuk az integrált:

$$\begin{aligned}
\iint_T f(x,y)\,\mathrm{d}(x,y) &= \int_0^1 \int_{x^2}^{x} xy^2 \,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 \left[\frac{xy^3}{3}\right]_{y=x^2}^{y=x} \mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 \frac{x^4 - x^7}{3}\,\mathrm{d}x \\
&= \left[\frac{x^5}{15} - \frac{x^8}{24}\right]_{x=0}^{x=1} \\
&= \frac{1}{15} - \frac{1}{24} = \frac{1}{40}.
\end{aligned}$$