2023. december 18. Matematika A2a **Vizsga**

E1. Definiálja egy függvény 2. típusú impropius integrálját egy $[a, b]$ intervallumon, ha f nem korlátos a-ban. Mikor nevezzük az integrált konvergensnek illetve divergensnek? (3 pont)

E2. Mit értünk két mátrix szorzata alatt? Sorolja fel a művelet három tulajdonságát. (3 pont)

E3. Mit mondhatunk el a szimmetrikus mátrixok sajátértékeiről és sajátvektorairól? (3 pont)

E4. Mit nevezünk egy többváltozós függvény parciális deriváltjainak? Mi egy kétváltozós függvény gradiensvektora? (3 pont)

E5. Mi egy numerikus sor konvergenciájának szükséges feltétele? Teljesül-e ez a harmonikus és az alternáló harmonikus sor esetében? Válaszát indokolja. (3 pont)

1. Számítsa ki az $\int_0^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$ integrált, ahol $f(x) = \dfrac{1}{x^2+4x+3}$. (7 pont)

Megoldás. Az integrandust parciális törtekre bontjuk. $x^2 + 4x + 3 = (x+1)(x+3)$, az

$$\frac{1}{x^2+4x+3} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x+3}$$

egyenlőséget a közös nevezővel megszorozva az $1 = A(x+3) + B(x+1) = (A+B)x + (3A+B)$ egyenlőséget kapjuk, ami akkor teljesül minden x esetén, ha $0 = A + B$ és $1 = 3A + B$, tehát $A = \frac{1}{2}$, $B = -\frac{1}{2}$. Ennek felhasználásával az integrál

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \frac{1}{x^2+4x+3}\,\mathrm{d}x &= \lim_{b\to\infty} \int_0^b \left(\frac{1}{2}\frac{1}{x+1} - \frac{1}{2}\frac{1}{x+3}\right)\mathrm{d}x \\ &= \lim_{b\to\infty} \left[\frac{1}{2}\ln|x+1| - \frac{1}{2}\ln|x+3|\right]_0^b \\ &= \lim_{b\to\infty} \left(\frac{1}{2}\ln\frac{b+1}{b+3} - \frac{1}{2}\ln\frac{1}{3}\right) = \frac{\ln 3}{2}.\end{aligned}$$

2. Számítsa ki az A mátrix determinánsát. (7 pont)

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 7 & -3 \\ 0 & 1 & 5 & 2 \\ 2 & -1 & 3 & -4 \end{bmatrix}$$

Megoldás.

$$\det A = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 7 & -3 \\ 0 & 1 & 5 & 2 \\ 2 & -1 & 3 & -4 \end{vmatrix} \overset{s_2-2s_3}{=} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -3 & -7 \\ 0 & 1 & 5 & 2 \\ 2 & -1 & 3 & -4 \end{vmatrix}$$

$$\overset{s_2\leftrightarrow s_3}{=} -\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & -3 & -7 \\ 2 & -1 & 3 & -4 \end{vmatrix} \overset{s_1\leftrightarrow s_4}{=} \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & -3 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -12.$$

3. Határozza meg az $f(x, y) = \sqrt{4 + x^2 + y^2}$ függvény $P(3, 6)$ pontbeli érintősíkjának egyenletét. (7 pont)

Megoldás. A parciális deriváltfüggvények

$$f'_x(x,y) = \frac{x}{\sqrt{4+x^2+y^2}}$$
$$f'_y(x,y) = \frac{y}{\sqrt{4+x^2+y^2}}.$$

A megadott pontban kiértékelve

$$f(3,6) = 7$$
$$f'_x(3,6) = \frac{3}{7}$$
$$f'_y(3,6) = \frac{6}{7}.$$

Az érintősík egyenlete $z = 7 + \frac{3}{7}(x-3) + \frac{6}{7}(y-3)$.

4. Tekintsük az $a_n = (-1)^{3n}\dfrac{2n^2+1}{n^4+3n}$ sorozatot. Abszolút konvergens, feltételesen konvergens vagy divergens a belőle képzett $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ sor? (8 pont)

Megoldás. $|a_n| = \dfrac{2n^2+1}{n^4+3n} \le \dfrac{3n^2}{n^4} = \dfrac{3}{n^2}$ és $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3}{n^2}$ konvergens (hiperharmonikus sor), tehát a majoránskritérium alapján $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}|a_n|$ konvergens, így $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ abszolút konvergens.

5. Határozza meg az $f(x) = \dfrac{6}{2x+3}$ függvény $x_0 = 0$ középpontú Taylor-sorát és annak konvergenciatartományát. (8 pont)

Megoldás.

$$f(x) = \frac{6}{2x+3} = 2\frac{1}{1-(-\frac{2}{3}x)}$$
$$= 2\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{2}{3}x\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{2^{n+1}}{3^n}x^n$$

ha $|-\frac{2}{3}x| < 1$, azaz $|x| < \frac{3}{2}$.

6. Az integrálás sorrendjének felcserélésével számítsa ki az $\displaystyle\int_0^1\int_0^{1-x} e^{y^2-2y}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$ integrált. (8 pont)

Megoldás.

$$\int_0^1\int_0^{1-x} e^{y^2-2y}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \int_0^1\int_0^{1-y} e^{y^2-2y}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^1 (1-y)e^{y^2-2y}\,\mathrm{d}y$$
$$= \left[-\frac{1}{2}e^{y^2-2y}\right]_0^1 = \frac{e-1}{2e}.$$