2024. január 8. Matematika A2a **Vizsga**

E1. Hogyan definiáljuk egy komplex szám konjugáltját és hosszát? Mondja ki a két művelet közötti algebrai összefüggést. (3 pont)

E2. Mit nevezünk két mátrix összegének? Sorolja fel a művelet három tulajdonságát. (3 pont)

E3. Milyen megoldási módszereket választhatunk lineáris egyenletrendszer esetén, ha az egyenletrendszer mátrixa reguláris? Ismertesse ezeket. (3 pont)

E4. Mit nevezünk egy kétváltozós függvény Hesse mátrixának? Mit mond ki a Young-tétel? (3 pont)

E5. Mit nevezünk numerikus sornak? Mikor lesz egy sor konvergens illetve divergens? (3 pont)

1. Írja fel az $\frac{2(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3})+1}{1+3i}$ komplex számot algebrai alakban. (7 pont)

Megoldás.

$$\frac{2(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3})+1}{1+3i}=\frac{2(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i)+1}{1+3i}=\frac{\sqrt{3}i}{1+3i}=\frac{\sqrt{3}i(1-3i)}{1^2+3^2}=\frac{3\sqrt{3}}{10}+\frac{\sqrt{3}}{10}i.$$

2. Mekkora az $ABC\triangle$ területe, ha $A=(3,-1,1)$, $B=(4,-2,1)$ és $C=(3,-2,3)$? (7 pont)

Megoldás. Két oldalvektor $\mathbf{v}=\overrightarrow{AB}=(1,-1,0)$ és $\mathbf{w}=\overrightarrow{AC}=(0,-1,2)$,

$$\begin{aligned}
T_{ABC\triangle}&=\frac{1}{2}|\mathbf{v}\times\mathbf{w}|\\
&=\frac{1}{2}|(\mathbf{i}-\mathbf{j})\times(-\mathbf{j}+2\mathbf{k})|\\
&=\frac{1}{2}|-2\mathbf{i}-2\mathbf{j}-\mathbf{k}|\\
&=\frac{1}{2}\sqrt{(-2)^2+(-2)^2+(-1)^2}=\frac{3}{2}.
\end{aligned}$$

3. Határozza meg az A mátrix rangját.

$$A=\begin{bmatrix}-1&0&-3\\1&1&2\\-3&-1&-8\\-3&1&1\end{bmatrix}$$

(7 pont)

Megoldás. A mátrixot Gauss-eliminációval lépcsős alakra hozzuk:

$$\begin{bmatrix}-1&0&-3\\1&1&2\\-3&-1&-8\\-3&1&1\end{bmatrix}\overset{\substack{s_2+s_1\\s_3-3s_1\\s_4-3s_1}}{\sim}\begin{bmatrix}-1&0&-3\\0&1&-1\\0&-1&1\\0&1&10\end{bmatrix}\overset{\substack{s_3+s_2\\s_4-s_2}}{\sim}\begin{bmatrix}-1&0&-3\\0&1&-1\\0&0&0\\0&0&11\end{bmatrix}\overset{s_3\leftrightarrow s_4}{\sim}\begin{bmatrix}-1&0&-3\\0&1&-1\\0&0&11\\0&0&0\end{bmatrix}$$

A lépcsős alakban három nemnulla sor van, tehát a rang 3.

4. Hol vannak és milyen típusúak az $f(x,y)=x^2+4xy+2y^4$ függvény lokális szélsőértékei? (8 pont)

Megoldás. Lokális szélsőérték ott lehet, ahol mindkét parciális derivált 0.

$$f'_x(x,y) = 2x + 4y$$
$$f'_y(x,y) = 4x + 8y^3,$$

f'_x akkor 0, ha $x = -2y$, ezt a második egyenletbe írva $0 = -8y + 8y^3 = 8y(y^2 - 1)$ adódik. Ennek zérushelyei 0 és ± 1, a stacionárius pontok $(0,0)$, $(-2,1)$ és $(2,-1)$. A Hesse-mátrix

$$H(x,y) = \begin{bmatrix} f''_{xx}(x,y) & f''_{xy}(x,y) \\ f''_{yx}(x,y) & f''_{yy}(x,y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 24y^2 \end{bmatrix},$$

a $(0,0)$ pontban a determináns $-4^2 = -16 < 0$, tehát ez nyeregpont, a $(\pm 2, \mp 1)$ pontokban a determináns $2 \cdot 24 - 4^2 = 32 > 0$, és a főátló elemei is pozitívak, tehát ez a két pont lokális minimumhely.

5. Határozza meg a $\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n} \frac{n^2}{n^4+1} x^n$ hatványsor konvergenciatartományát. (8 pont)

Megoldás. A konvergenciasugár meghatározásához a Cauchy–Hadamard-tételt használjuk:

$$\frac{1}{R} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left| \frac{(-1)^n}{2^n} \frac{n^2}{n^4+1} \right|} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2} \frac{\sqrt[n]{n}^2}{\sqrt[n]{n^4+1}} = \frac{1}{2},$$

tehát a konvergenciasugár $R = 2$. A végpontokban a sor $\sum_{n=3}^{\infty} (-1)^n \frac{n^2}{n^4+1}$ illetve $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{n^2}{n^4+1}$, mindkettő abszolút konvergens a majoránskritérium alapján, mivel $\frac{n^2}{n^4+1} \leq \frac{1}{n^2}$ és a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ hiperharmonikus sor $p > 1$ esetén konvergens.

6. Számítsa ki az $x^2 + y^2 + z^2 \leq 4$, $z \geq \sqrt{x^2 + y^2}$ egyenlőtlenség-rendszer által meghatározott tartomány térfogatát. (8 pont)

Megoldás. A tartomány egy gömb és egy kúp metszete, gömbi koordinátákat érdemes használni:

$$x(r,\vartheta,\varphi) = r \sin\vartheta \cos\varphi$$
$$y(r,\vartheta,\varphi) = r \sin\vartheta \sin\varphi$$
$$z(r,\vartheta,\varphi) = r \cos\vartheta,$$

a Jacobi-determináns $r^2 \sin\vartheta$. Az alakzatnak megfelelő paramétertartomány $0 \leq r \leq 2$, $0 \leq \vartheta \leq \frac{\pi}{4}$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$. A térfogat

$$\begin{aligned} V &= \iiint_V 1 \, \mathrm{d}(x,y,z) \\ &= \int_0^2 \int_0^{\pi/4} \int_0^{2\pi} r^2 \sin\vartheta \, \mathrm{d}\varphi \, \mathrm{d}\vartheta \, \mathrm{d}r \\ &= 2\pi \int_0^2 \int_0^{\pi/4} r^2 \sin\vartheta \, \mathrm{d}\vartheta \, \mathrm{d}r \\ &= 2\pi \int_0^2 r^2 \left[-\cos\vartheta \right]_0^{\pi/4} \mathrm{d}r \\ &= 2\pi \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \int_0^2 r^2 \, \mathrm{d}r \\ &= 2\pi \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \left[\frac{r^3}{3} \right]_0^2 r^2 \, \mathrm{d}r \\ &= \left(2 - \sqrt{2} \right) \frac{8}{3} \pi. \end{aligned}$$