2024. január 15. Matematika A2a **Vizsga**

E1. Hogyan számítjuk ki két algebrai alakban megadott komplex szám hányadosát? (3 pont)

E2. Mit értünk k darab vektor lineáris függetlensége és összefüggősége alatt? (3 pont)

E3. Definiálja az inverzmátrixot. Ismertesse az inverz egyik kiszámítási módszerét. (3 pont)

E4. Mit nevezünk egy kétváltozós függvény pontbeli adott irány menti deriváltjának? (3 pont)

E5. Mit nevezünk Leibniz-sornak? Mit tudunk a Leibniz-sorok konvergenciájáról? (3 pont)

1. Integrálja az $f(x) = \frac{1}{x^2-1}$ függvényt 1 és 2 között. (7 pont)

Megoldás. A primitív függvényt parciális törtekre bontással határozzuk meg. A nevező gyöktényezős alakja $(x^2-1) = (x-1)(x+1)$, emiatt

$$\frac{1}{x^2-1} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1}$$

alakú felbontást keresünk, ebből $1 = A(x+1) + B(x-1) = (A+B)x + (A-B)$, tehát $A = -B = \frac{1}{2}$. A primitív függvény

$$\int \frac{1}{x^2-1}\,\mathrm{d}x = \int \left(\frac{1}{2}\frac{1}{x-1} - \frac{1}{2}\frac{1}{x+1}\right)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\ln|x-1| - \frac{1}{2}\ln|x+1| + C.$$

$$\begin{aligned}\int_1^2 \frac{1}{x^2-1}\,\mathrm{d}x &= \lim_{a\to 1+}\int_a^2 \frac{1}{x^2-1}\,\mathrm{d}x = \lim_{a\to 1+}\left[\frac{1}{2}\ln|x-1| - \frac{1}{2}\ln|x+1|\right]_a^2\\ &= \lim_{a\to 1+}\left(-\frac{1}{2}\ln 3 - \left(\frac{1}{2}\ln(a-1) - \frac{1}{2}\ln(a+1)\right)\right) = \infty.\end{aligned}$$

2. Az s sík áthalad a $P(2,2,-1)$ ponton és párhuzamos az $\mathbf{u} = (1,1,0)$ és $\mathbf{v} = (0,1,1)$ vektorokkal. Milyen távol van az s sík az origótól? (7 pont)

Megoldás. A sík egyik egységnyi hosszú normálvektora

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{u}\times\mathbf{v}}{|\mathbf{u}\times\mathbf{v}|} = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,-1,1),$$

egyenlete $\frac{1}{\sqrt{3}}x - \frac{1}{\sqrt{3}}y + \frac{1}{\sqrt{3}}z = \frac{1}{\sqrt{3}}\cdot 2 - \frac{1}{\sqrt{3}}\cdot 2 + \frac{1}{\sqrt{3}}\cdot(-1) = -\frac{1}{\sqrt{3}}$. Az origótól mért távolság a jobb oldal abszolútértéke, tehát $\frac{1}{\sqrt{3}}$.

3. Határozza meg az A mátrix sajátértékeit és sajátvektorait.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2\\ 2 & 1 & 4\\ -1 & -1 & -3\end{bmatrix}$$

(7 pont)

Megoldás. A karakterisztikus polinom

$$\begin{aligned}\det(A-\lambda I) &= \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 2\\ 2 & 1-\lambda & 4\\ -1 & -1 & -3-\lambda\end{vmatrix}\\ &= -\lambda\left[(1-\lambda)(-3-\lambda) - 4\cdot(-1)\right] - 1\cdot\left[2\cdot(-3-\lambda) - 4\cdot(-1)\right]\\ &\quad + 2\left[2\cdot(-1) - (1-\lambda)\cdot(-1)\right]\\ &= -\lambda^3 - 2\lambda^2 - \lambda = -\lambda(\lambda+1)^2,\end{aligned}$$

tehát a sajátértékek 0 és -1.
A $\lambda = 0$ sajátértékhez tartozó sajátvektorok meghatározása:

$$A - 0 \cdot I = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \\ -1 & -1 & -3 \end{bmatrix} \overset{s_1 \leftrightarrow s_3}{\sim} \begin{bmatrix} -1 & -1 & -3 \\ 2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \overset{s_2 + 2s_1}{\sim} \begin{bmatrix} -1 & -1 & -3 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \overset{\substack{s_1 - s_2 \\ s_3 + s_2}}{\sim} \begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -2 \end{bmatrix}$$

tehát a sajátvektorok $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}^T$ nullától különböző többszörösei.
A $\lambda = -1$ sajátértékhez tartozó sajátvektorok meghatározása:

$$A - (-1) \cdot I = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \\ -1 & -1 & -2 \end{bmatrix} \overset{\substack{s_2 - 2s_1 \\ s_3 + s_1}}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \end{bmatrix},$$

tehát a sajátvektorok a $\begin{bmatrix} 2s + t & -t & -s \end{bmatrix}^T$ alakú vektorok, ahol $s, t \in \mathbb{R}$, $(s, t) \neq (0, 0)$.

4. Egy egyetemi hallgató egész félévben szorgalmasan látogatta az órákat, de szeretné még átnézni a tanultakat a holnapi vizsgája előtt. Ha x órán keresztül az elméletet ismétli át, y órán keresztül pedig a gyakorlatot és utána z órán át alszik, akkor a pontok $7(\sqrt{x} + \sqrt{2y} + \sqrt{7z})$ százalékát fogja megszerezni. Mennyi ideig tanulja az elméletet illetve a gyakorlatot, ha a lehető legtöbb pontot szeretné elérni, és 10 óra múlva kell elindulnia, hogy odaérjen a vizsgára? (8 pont)

Megoldás. x óra elmélet és y óra gyakorlat után $z = 10 - x - y$ órája marad aludni, tehát a pontok $f(x, y) = 7(\sqrt{x} + \sqrt{2y} + \sqrt{7(10 - x - y)})$ százalékát szerzi meg. Megkeressük a függvény stacionárius pontjait:

$$f'_x(x, y) = 7\left(\frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{7}{2\sqrt{7(10 - x - y)}}\right)$$

$$f'_y(x, y) = 7\left(\frac{2}{2\sqrt{2y}} - \frac{7}{2\sqrt{7(10 - x - y)}}\right),$$

ha mindkettő 0, akkor $\frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{2}{2\sqrt{2y}}$, azaz $y = 2x$, ezt valamelyik egyenletbe írva

$$0 = \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{\sqrt{7}}{2\sqrt{10 - 3x}},$$

amiből $10 - 3x = 7x$, vagyis $x = 1$ következik. Tehát egy stacionárius pont van, $(x, y) = (1, 2)$. Ez tényleg maximum, mert

$$H_f(x, y) = \begin{bmatrix} f''_{xx}(x, y) & f''_{xy}(x, y) \\ f''_{yx}(x, y) & f''_{yy}(x, y) \end{bmatrix} = 7 \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{7}}{4(10-x-y)^{3/2}} - \frac{1}{4x^{3/2}} & -\frac{\sqrt{7}}{4(10-x-y)^{3/2}} \\ -\frac{\sqrt{7}}{4(10-x-y)^{3/2}} & -\frac{1}{2\sqrt{2}y^{3/2}} - \frac{\sqrt{7}}{4(10-x-y)^{3/2}} \end{bmatrix},$$

$$H_f(1, 2) = \begin{bmatrix} -2 & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & -\frac{9}{8} \end{bmatrix}$$

determinánsa $\frac{9}{4} - \frac{1}{16} = \frac{35}{16} > 0$ és a főátló elemei negatívak.

5. Adja meg az $f(x) = \frac{x}{16+x^4}$ függvény $x_0 = 0$ középpontú Taylor-sorát és annak konvergenciatartományát. (8 pont)

Megoldás. A mértani sor összege $\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$, ha $|q| < 1$, ebből $q = -\frac{x^4}{16}$ helyettesítéssel kapjuk f Taylor-sorát:

$$\frac{x}{16+x^4} = \frac{x}{16}\frac{1}{1-\left(-\frac{x^4}{16}\right)} = \frac{x}{16}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{x^4}{16}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n 16^{-n-1}x^{4n+1},$$

ez pontosan akkor konvergens, ha $|x| < 2$.

6. Cserélje fel az integrálás sorrendjét, majd számítsa ki az integrált. (8 pont)

$$\int_0^2 \int_{\frac{y}{2}}^1 e^{(x^2)} \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y$$

Megoldás. $T = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \middle| 0 \le y \le 2, \frac{y}{2} \le x \le 1\right\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 2x\}$,

$$\begin{aligned}\int_0^2 \int_{\frac{y}{2}}^1 e^{(x^2)} \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y &= \iint_T e^{(x^2)} \, \mathrm{d}(x,y) = \int_0^1 \int_0^{2x} e^{x^2} \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}x \\ &= \int_0^1 \left[e^{x^2} y\right]_{y=0}^{y=2x} \mathrm{d}x = \int_0^1 2xe^{x^2} \, \mathrm{d}x = \left[e^{x^2}\right]_0^1 = e-1.\end{aligned}$$