2023. október 9. Matematika A2a **ZH1 A csoport**

1. Számítsa ki az alábbi improprius integrált. (5 pont)

$$\int_0^2 \frac{1}{\sqrt{2-x}}\,\mathrm{d}x$$

Megoldás.

$$\begin{aligned}\int_0^2 \frac{1}{\sqrt{2-x}}\,\mathrm{d}x &= \lim_{b\to 2-}\int_0^b \frac{1}{\sqrt{2-x}}\,\mathrm{d}x\\ &= \lim_{b\to 2-}\left[-2\sqrt{2-x}\right]_0^b\\ &= \lim_{b\to 2-}\left(-2\sqrt{2-b}+2\sqrt{2-0}\right) = 0+2\sqrt{2} = 2\sqrt{2}.\end{aligned}$$

2. Legyen $z = 1+i$ és $w = 2(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3})$. Írja fel trigonometrikus alakban a $\frac{z^4}{w^2}$ komplex számot. (5 pont)

Megoldás. $|z| = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$, $z = \sqrt{2}(\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}) = \sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4})$.

$$\begin{aligned}\frac{z^4}{w^2} &= \frac{\sqrt{2}^4(\cos\frac{4\pi}{4} + i\sin\frac{4\pi}{4})}{2^2(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3})}\\ &= \cos\left(\pi - \frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(\pi - \frac{2\pi}{3}\right)\\ &= \cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}.\end{aligned}$$

3. Bontsa fel a $\mathbf{v} = (2,2,9)$ vektort az $\mathbf{a} = (1,-1,1)$ vektorral párhuzamos és arra merőleges komponensek összegére. (5 pont)

Megoldás. A párhuzamos összetevő

$$\begin{aligned}\mathbf{v}_\parallel &= \frac{\langle \mathbf{a},\mathbf{v}\rangle}{|\mathbf{a}|^2}\mathbf{a}\\ &= \frac{1\cdot 2 + (-1)\cdot 2 + 1\cdot 9}{1^2+(-1)^2+1^2}(1,-1,1)\\ &= (3,-3,3),\end{aligned}$$

a merőleges összetevő

$$\mathbf{v}_\perp = \mathbf{v} - \mathbf{v}_\parallel = (2,2,9) - (3,-3,3) = (-1,5,6).$$

4. Számítsa ki az A mátrix determinánsát. (5 pont)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 & -1\\ 3 & 9 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 2 & -2\\ 0 & 0 & 2 & 3\end{bmatrix}$$

Megoldás.

$$\begin{aligned}\det(A) &= \begin{vmatrix} 1 & 4 & 2 & -1\\ 3 & 9 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 2 & -2\\ 0 & 0 & 2 & 3\end{vmatrix} \overset{s_2-3s_1}{=} \begin{vmatrix} 1 & 4 & 2 & -1\\ 0 & -3 & -3 & 3\\ 0 & 0 & 2 & -2\\ 0 & 0 & 2 & 3\end{vmatrix} \overset{s_4-s_3}{=} \begin{vmatrix} 1 & 4 & 2 & -1\\ 0 & -3 & -3 & 3\\ 0 & 0 & 2 & -2\\ 0 & 0 & 0 & 5\end{vmatrix}\\ &= 1\cdot(-3)\cdot 2\cdot 5 = -30.\end{aligned}$$